総説

Δ-パラコンパクト性と近傍フィルターの性質

平田　康史*

Δ-paracompactness and Neighborhood Properties

Yasushi HIRATA*

1.　はじめに

本稿では，集合族の一般化として，擬フィルター付き集合系の概念を定義する．次に，擬イデアル $\mathbb{J}$ に対し，擬フィルター付き集合系の間の二項関係 $\preceq_{\mathbb{J}}$ を定義する．この $\preceq_{\mathbb{J}}$ を使うことで，集合族の間の (部分) 細分の一般化である (部分)$\mathbb{J}$-細分の概念を定義して，そこから自然に，空間の性質としての $\mathbb{J}$-パラコンパクトの概念が定義される．$\mathbb{J}$-パラコンパクト性は，擬イデアル $\mathbb{J}$ を適宜入れ替えることで，通常のパラコンパクト，Buzyakova[1] によって定義された Δ-パラコンパクト，さらに，その一般化である Δ^n-パラコンパクトや $\Delta^{<\omega}$-パラコンパクト[3] などの，被覆の細分に関する条件を表現することができる．

また，$\preceq_{\mathbb{J}}$ を使って，フィルターが擬イデアル $\mathbb{J}$ を κ-保持するという概念を定義する．この κ-保持性もまた，擬イデアル $\mathbb{J}$ を適宜入れ替えることで，空間の点における近傍フィルターの性質であるところの orthocaliber κ 性[7]，κ-dop 性[5]，κ-nbdΔ 性[6] などを表現できる．これらの近傍フィルターの性質は，単調正規空間と，パラコンパクトで $\mathbb{DC}$-like な空間の積の位相的性質を特徴づけるのに重要な役割をはたすものであり，その概要を述べることも本稿の意図するところである．

以下，特に断らない限り，空間は正則な T_1-位相空間を表すものとする．

2.　Δ^ν-パラコンパクト性と κ-nbdΔ^ν-性の定義

定義 1. $\mathbb{V}$ はすべての集合からなるクラスとする．

集合族は，それそのものが集合であり，その各元もまた集合であるもの (つまり，$\mathcal{G} \in \mathbb{V}$，かつ，$\mathcal{G} \subseteq \mathbb{V}$ となるような $\mathcal{G}$) である．また，写像 φ で，その定義域 Ξ の各元 ξ に対して，値 $\varphi(\xi)$ が集合 であるようなもの (つまり，写像 $\varphi : \Xi \to \mathbb{V}$) のことを**集合系**とよぶ．

例 1. 集合 Ξ の各元 ξ に対して集合 V_ξ が与えられたとする．$\{V_\xi : \xi \in \Xi\}$ は集合族であるが，これを，各 $\xi \in \Xi$ に対して V_ξ を対応させる集合系とみなすとき，それを強調して $\langle V_\xi : \xi \in \Xi\rangle$ と書く．特に，集合族 $\mathcal{G}$ に対して，$\langle G : G \in \mathcal{G}\rangle$ は，各 $G \in \mathcal{G}$ に対して，G そのものを対応させる集合系 ($\mathcal{G}$ 上の恒等写像) を表す．

定義 2. 集合 Ξ の部分集合の全体からなる集合族を Ξ の**べき集合**といい，$\mathcal{P}(\Xi)$ で表す．

$$\mathcal{P}(\Xi) = \{J \in \mathbb{V} : J \subseteq \Xi\}$$

$\mathcal{M}$ が集合 Ξ 上の**擬フィルター**とは，それが $\mathcal{P}(\Xi)$ の部分族で，$M \in \mathcal{M}$, $M \subseteq M' \subseteq \Xi$ ならば，$M' \in \mathcal{M}$ となることとする．

集合 Ξ，その上の擬フィルター $\mathcal{M}$，集合系 $\varphi : \Xi \to \mathbb{V}$ の 3 つ組 $\langle \Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ を**擬フィルター付き集合系**とよぶ．

例 2. ここでは主に次の擬フィルターを扱う．

(1) 集合 Ξ の空でない部分集合の全体 $\mathcal{P}(\Xi) \setminus \{\emptyset\}$ を NE_Ξ で表すことにする．これは Ξ 上の擬フィルターである．

(2) 正則基数 κ の，有界な部分集合の全体の族を Bd_κ で表すと，$\mathrm{Bd}_\kappa^+ = \mathcal{P}(\kappa) \setminus \mathrm{Bd}_\kappa$ は κ の非有界な部分集合全体の族であり，これは κ 上の擬フィルターである．

また，主に次の擬フィルター付き集合系を扱う．

(1) κ が正則基数で $\langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle$ が集合系のとき，$\langle \kappa, \mathrm{Bd}_\kappa^+, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ は擬フィルター付き集合系である．

*特任准教授　工学部数学教室
Associate Professor, Dept. of Mathematics

(2) 集合族 $\mathcal{G}$ に対して，擬フィルター付き集合系 $\lceil\mathcal{G}\rceil$ を次のように定義する：

$$\lceil\mathcal{G}\rceil = \langle\mathcal{G}, \mathrm{NE}_{\mathcal{G}}, \langle G : G \in \mathcal{G}\rangle\rangle.$$

(3) 特に，任意の集合 F に対して，擬フィルター付き集合系 $\lceil\{F\}\rceil$ が定義される．

定義 3. 集合 J と擬フィルター付き集合系 $\langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ に対して，$J \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ によって，

$$\{\xi \in \Xi : J \subseteq \varphi(\xi)\} \in \mathcal{M}$$

という関係を表すこととする．

例 3. J は集合とする．

(1) 正則基数 κ と，集合系 $\langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle$ について，
$J \trianglelefteq \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ は，
$\{\xi \in \kappa : J \subseteq F_\xi\}$ が κ 上非有界であること．

(2) 集合族 $\mathcal{G}$ について，$J \trianglelefteq \lceil\mathcal{G}\rceil$ は，$J \subset G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在すること．

(3) 集合 F について，$J \trianglelefteq \lceil\{F\}\rceil$ は，$J \subseteq F$ であること．

定義 4. $\mathbb{V}$ の部分クラス $\mathbb{J}$ が**擬イデアル**とは，$J \in \mathbb{J}, J' \subseteq J$ ならば，$J' \in \mathbb{J}$ となることとする．

例 4. 基数 ν に対して，

$$\mathbb{J}_{\leq\nu} = \{J \in \mathbb{V} : |J| \leq \nu\},\ \mathbb{J}_{<\nu} = \{J \in \mathbb{V} : |J| < \nu\}$$

とする．また，$\mathbb{J}_{<\infty}$ は $\mathbb{V}$ のこととする．
$\mathbb{J}_{\leq\nu}, \mathbb{J}_{<\nu}, \mathbb{J}_{<\infty}$ は明らかに擬イデアルである．

以下，$\mathbb{J}_{\leq\nu}$ と書いたら ν は基数を表してるものとする．また，$\mathbb{J}_{<\nu}$ と書いたら ν は基数または ∞ を表しているものとする．

定義 5. $\mathbb{J}$ は擬イデアル，$\langle\Gamma, \mathcal{N}, \psi\rangle$ と $\langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は擬フィルター付き集合系とする．$\langle\Gamma, \mathcal{N}, \psi\rangle \leq_{\mathbb{J}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ によって，

任意の $J \in \mathbb{J}$ に対して，
$J \trianglelefteq \langle\Gamma, \mathcal{N}, \psi\rangle$ ならば $J \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$

という関係を表すこととする．

例 5. $\mathbb{J}$ は擬イデアル，$\langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は擬フィルター付き集合系とする．

(1) 集合族 $\mathcal{U}$ について，$\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は次のことを意味する：

各 $U \in \mathcal{U}$ と，$\mathbb{J}$ に属す U の任意の部分集合 J に対して，
$J \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$.

(2) 集合 F について，$\lceil\{F\}\rceil \leq_{\mathbb{J}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は次のことを意味する：

$\mathbb{J}$ に属す F の任意の部分集合 J に対して，$J \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$.

定義 6. $\mathbb{J}$ は擬イデアルとする．集合族 $\mathcal{U}, \mathcal{G}$ について，$\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}} \lceil\mathcal{G}\rceil$ が成り立つとき，$\mathcal{U}$ は $\mathcal{G}$ の**部分** $\mathbb{J}$**-細分**であるということとする．

これは，任意の $U \in \mathcal{U}$ とその部分集合 J について，$J \in \mathbb{J}$ ならば，$J \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在する，ということである．

定義 7. X は位相空間，$\mathcal{U}, \mathcal{G}$ はその部分集合族で，$\mathbb{J}$ は擬イデアルとする．$\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}$-細分で，$\mathcal{U}$ が空間 X を被覆するとき，$\mathcal{U}$ は $\mathcal{G}$ の $\mathbb{J}$**-細分**であるという．$\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の (部分)$\mathbb{J}$-細分で，$\mathcal{U}$ の各元が開集合であるとき，$\mathcal{U}$ は $\mathcal{G}$ の **(部分) 開** $\mathbb{J}$**-細分**であるという．

定義 8. X は位相空間，$\mathcal{U}$ は開集合族とする．

- $\mathcal{U}$ が**局所有限**であるとは，X の各点 x に対して，その近傍 V で，

$$|\{U \in \mathcal{U} : U \cap V \neq \emptyset\}| < \omega$$

となるものが存在すること．

- $\mathcal{U}$ が**点有限**であるとは，X の各点 x に対して，$|\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}| < \omega$ となること．
- $\mathcal{U}$ が**内部保存**であるとは，$\mathcal{U}$ の任意の部分族 $\mathcal{U}'$ 対して，共通部分 $\bigcap\mathcal{U}'$ が開になること．

定義 9. X は位相空間，$\mathbb{J}$ は擬イデアルとする．

(1) X の任意の開被覆が，局所有限な開 $\mathbb{J}$-細分をもつとき，X は $\mathbb{J}$**-パラコンパクト**であるという．

(2) X の任意の開被覆が，点有限な開 $\mathbb{J}$-細分をもつとき，X は $\mathbb{J}$**-メタコンパクト**であるという．

(3) X の任意の開被覆が，内部保存な開 $\mathbb{J}$-細分をもつとき，X は $\mathbb{J}$**-オーソコンパクト**であるという．

定義 10. 空間 X が $\mathbb{J}_{\leq\nu}$-パラコンパクト ($\mathbb{J}_{<\nu}$-パラコンパクト) であるとき，X は Δ^ν**-パラコンパクト** ($\Delta^{<\nu}$**-パラコンパクト**) であるという．

定義 11. $\mathcal{M}$ は集合 Ξ 上の擬フィルターとする．集合 A 上の擬フィルター $\mathcal{F}$ が擬イデアル $\mathbb{J}$ を $\langle\Xi, \mathcal{M}\rangle$**-保持する**とは，任意の写像 $\varphi : \Xi \to \mathcal{F}$ に対して，$F \in \mathcal{F}$ が存在して，$\lceil\{F\}\rceil \leq_{\mathbb{J}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ となることとする．

定義 12. 正則基数 κ について，集合 A 上の擬フィルター $\mathcal{F}$ が擬イデアル $\mathbb{J}$ を $\langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa\rangle$-保持することを，$\mathcal{F}$ は $\mathbb{J}$ を κ**-保持する**ということにする．

これは，各 $\xi \in \kappa$ に対して $F_\xi \in \mathcal{F}$ が与えられると，$F \in \mathcal{F}$ が存在して，$\mathbb{J}$ に属す F の任意の部分集合 J に対して，$\{\xi \in \kappa : J \subseteq F_\xi\}$ が κ において非有界であるということである．

定義 13. 集合 A 上の擬フィルター $\mathcal{F}$ が擬イデアル $\mathbb{J}_{\leq\nu}$ ($\mathbb{J}_{<\nu}$) を κ-保持することを，$\mathcal{F}$ は κ**-nbd**Δ^ν **性** (κ**-nbd**$\Delta^{<\nu}$ **性**) をもつということとする．

定義 14. 位相空間 Y の点 q における近傍フィルターが κ-nbdΔ^ν 性 (κ-nbd$\Delta^{<\nu}$ 性) をもつことを，空間 Y は点 q において κ-nbdΔ^ν 性 (κ-nbd$\Delta^{<\nu}$ 性) をもつという．「点 q において」を省略した場合は，Y のすべての点においてその性質をもつことを表すものとする．

3. 既知の概念との関係

例 6. 次が成り立つ．

(1) $\mathbb{J}_{\leq 0} = \{\emptyset\}$.

(2) n が自然数ならば，
$\mathbb{J}_{\leq n} = \{\emptyset\} \cup \{\{z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}\} :$
$z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in \bigcup \mathbb{V}\}$.

(3) $\mathbb{J}_{<\omega}$ は有限集合の全体のクラス．

例 7. $\langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は擬フィルター付き集合系とする．

(1) $\emptyset \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は $\Xi \in \mathcal{M}$ と同値．

(2) $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in \bigcup \mathbb{V}$ について，
$\{z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}\} \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は

$$\{\xi \in \Xi : z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in \varphi(\xi)\} \in \mathcal{M}$$

と同値．

例 8. 空集合 $\emptyset$ について，次が成り立つ．

(1) 正則基数 κ と集合系 $\langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle$ に対し，$\emptyset \trianglelefteq \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ は常に成り立つ．

(2) 集合族 $\mathcal{G}$ について，$\emptyset \trianglelefteq \lceil\mathcal{G}\rceil$ と $\mathcal{G} \neq \emptyset$ は同値．

(3) 集合 F について，$\emptyset \trianglelefteq \lceil\{F\}\rceil$ は常に成り立つ．

例 9. $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in \bigcup \mathbb{V}$ とする．

(1) 正則基数 κ と，集合系 $\langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle$ について，

$$\{z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}\} \trianglelefteq \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$$

は，$\{\xi \in \Xi : z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in F_\xi\}$ が κ において非有界であることを意味する．

(2) 集合族 $\mathcal{G}$ について，
$\{z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}\} \trianglelefteq \lceil\mathcal{G}\rceil$ は，
$z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することを意味する．特に，$\{z_0\} \trianglelefteq \lceil\mathcal{G}\rceil$ は，$z_0 \in \bigcup \mathcal{G}$ のことである．

(3) 集合 F について，
$\{z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}\} \trianglelefteq \lceil\{F\}\rceil$ は，
$z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in F$ となることを意味する．

例 10. $\mathcal{U}$ は集合族，$\langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は擬フィルター付き集合系とする．

(0) 空集合 $\emptyset$ を集合族とみなせば，任意の擬イデアル $\mathbb{J}$ に対して，$\lceil\emptyset\rceil \leq_{\mathbb{J}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は常に成り立つ．

(1) 基数 ν に対して，$\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq\nu}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は，任意の $U \in \mathcal{U}$ とその部分集合 J について，$|J| \leq \nu$ ならば，$J \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ が成り立つという意味である．

(2) 基数 ν に対して，$\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{<\nu}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ は，任意の $U \in \mathcal{U}$ とその部分集合 J について，$|J| < \nu$ ならば，$J \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ が成り立つという意味である．

(3) $\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq 0}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ であるためには，$\mathcal{U} = \emptyset$ か，または $\emptyset \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ であることが必要十分である．

(4) $0 < n < \omega$ とする．$\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq n}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ であるためには，$\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq 0}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ であり，任意の $U \in \mathcal{U}$ と $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in U$ に対して，$\{z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}\} \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ であることが必要十分である．

(5) $\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq 1}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ であるためには，
$\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq 0}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ であり，任意の $z \in \bigcup \mathcal{U}$ に対して，$\{z\} \trianglelefteq \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ であることが必要十分である．

(6) $\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq 2}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ であるためには，
$\lceil\mathcal{U}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq 0}} \langle\Xi, \mathcal{M}, \varphi\rangle$ であり，任意の $U \in \mathcal{U}$ と

$z_0, z_1 \in U$ に対して，$\{z_0, z_1\} \trianglelefteq \langle \Xi, \mathcal{M}, \varphi \rangle$ であることが必要十分である．

(7) $\lceil \mathcal{U} \rceil \leq_{\mathbb{J}_{<\omega}} \langle \Xi, \mathcal{M}, \varphi \rangle$ であるためには，任意の $U \in \mathcal{U}$ とその任意の有限部分集合 J に対して，$J \trianglelefteq \langle \Xi, \mathcal{M}, \varphi \rangle$ であることが必要十分である．

(8) $\lceil \mathcal{U} \rceil \leq_{\mathbb{J}_{<\infty}} \langle \Xi, \mathcal{M}, \varphi \rangle$ であるためには，任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して，$U \trianglelefteq \langle \Xi, \mathcal{M}, \varphi \rangle$ であることが必要十分である．

例 11. $\mathcal{U}, \mathcal{G}$ は集合族とする．

(0) 任意の擬イデアル $\mathbb{J}$ に対して，$\emptyset$ は $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}$-細分である．

(1) 基数 ν に対して，$\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{\leq\lambda}$-細分であるためには，任意の $U \in \mathcal{U}$ とその任意の部分集合 J に対して，$|J| \leq \lambda$ ならば，$J \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．

(2) 基数 ν に対して，$\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{<\lambda}$-細分であるためには，任意の $U \in \mathcal{U}$ とその任意の部分集合 J に対して，$|J| < \lambda$ ならば，$J \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．

(3) $\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{\leq 0}$-細分であるためには，$\mathcal{U} = \emptyset$ か，または $\mathcal{G} \neq \emptyset$ であることが必要十分である．

(4) $0 < n < \omega$ とする．$\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{\leq n}$-細分であるためには，$\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{\leq 0}$-細分であり，任意の $U \in \mathcal{U}$ と $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in U$ に対して，$z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．

(5) $\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{\leq 1}$-細分であるためには，$\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{\leq 0}$-細分であり，$\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{G}$ であることが必要十分である．

(6) $\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{\leq 2}$-細分であるためには，$\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{\leq 0}$-細分であり，任意の $U \in \mathcal{U}$ と $z_0, z_1 \in U$ に対して，$z_0, z_1 \in G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．

(7) $\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{<\omega}$-細分であるためには，任意の $U \in \mathcal{U}$ とその任意の有限部分集合 J に対して，$J \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．

(8) $\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の部分 $\mathbb{J}_{<\infty}$-細分であるためには，任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して，$U \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．これは，通常の意味で，$\mathcal{U}$ が $\mathcal{G}$ の**部分細分**であるということである．

例 12. X は位相空間とする．

(0) 空な空間 $\emptyset$ は任意の擬イデアル $\mathbb{J}$ に対して，$\mathbb{J}$-パラコンパクトである．

(1) 基数 ν に対して，X が Δ^{ν}-パラコンパクトであるためには，X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して，X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して，任意の $U \in \mathcal{U}$ とその任意の部分集合 J に対して，$|J| \leq \lambda$ ならば，$J \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．

(2) 基数 ν に対して，X が $\Delta^{<\nu}$-パラコンパクトであるためには，X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して，X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して，任意の $U \in \mathcal{U}$ とその任意の部分集合 J に対して，$|J| < \lambda$ ならば，$J \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．

(3) X は Δ^{0}-パラコンパクトである．

(4) $0 < n < \omega$ とする．X が Δ^{n}-パラコンパクトであるためには，X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して，X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して，任意の $U \in \mathcal{U}$ と $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in U$ に対して，$z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \in G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．

(5) X は Δ^{1}-パラコンパクトである．

(6) X が Δ^{2}-パラコンパクトであるためには，X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して，X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して，任意の $U \in \mathcal{U}$ と $z_0, z_1 \in U$ に対して，$z_0, z_1 \in G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．

(7) X が $\Delta^{<\omega}$-パラコンパクトであるためには，X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して，X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して，任意の $U \in \mathcal{U}$ とその任意の有限部分集合 J に対して，$J \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．

(8) X が $\Delta^{<\infty}$-パラコンパクトであるためには，X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して，X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して，任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して，$U \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在することが必要十分である．これは，通常の意味で，X が**パラコンパクト**であるということである．

同様に，$\Delta^{<\infty}$-メタコンパクト性，$\Delta^{<\infty}$-オーソコンパクト性は，通常の意味でのメタコンパクト性，オーソコンパクト性と一致する．

事実 13. 位相空間 X と $n \in \omega$ について，X が $\varDelta^n$-パラコンパクトであることと，次の条件は同値である．

X^n の閉集合 C が，対角線集合

$$\varDelta^n = \{\langle x, x, \cdots, x\rangle \in X^n : x \in X\}$$

と交わらなければ，
X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ で，
$\bigcup\{U^n : U \in \mathcal{U}\}$
が C と交わらないものが存在する．

特に，X が $\varDelta^2$-パラコンパクトであることと，次の条件は同値である．

$X \times X$ の閉集合 C が，対角線集合
$\varDelta = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$
と交わらなければ，
X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ で，
$\bigcup\{U \times U : U \in \mathcal{U}\}$
が C と交わらないものが存在する．

よって，$\varDelta^2$-パラコンパクト性は Buzyakova[(1)] が定義した $\varDelta$-パラコンパクト性と一致し，$\varDelta^n$-パラコンパクト性や $\varDelta^{<\omega}$-パラコンパクト性も，[(3)] において定義したものと一致する．

例 14. κ は正則基数，F は集合，$\langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle$ は集合系とする．

(1) 基数 ν に対して，
$\lceil\{F\}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq\nu}} \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ は，
F の任意の部分集合 J について，$|J| \leq \nu$ ならば，$\{\xi \in \kappa : J \subseteq F_\xi\}$ が κ において非有界であるという意味である．

(2) 基数 ν に対して，
$\lceil\{F\}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{<\nu}} \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ は，
F の任意の部分集合 J について，$|J| < \nu$ ならば，$\{\xi \in \kappa : J \subseteq F_\xi\}$ が κ において非有界であるという意味である．

(3) $\lceil\{F\}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq 0}} \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ は常に成り立つ．

(4) $0 < n < \omega$ とする．
$\lceil\{F\}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq n}} \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ であるためには，任意の $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1} \in F$ に対して，$\{\xi \in \kappa : y_0, y_1, \cdots, y_{n-1} \in F_\xi\}$ が κ において非有界であることが必要十分である．

(5) $\lceil\{F\}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq 1}} \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ であるためには，任意の $y \in F$ に対して，
$\{\xi \in \kappa : y \in F_\xi\}$ が κ において非有界であることが必要十分である．

(6) $\lceil\{F\}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{\leq 2}} \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ であるためには，任意の $y_0, y_1 \in F$ に対して，$\{\xi \in \kappa : y_0, y_1 \in F_\xi\}$ が κ において非有界であることが必要十分である．

(7) $\lceil\{F\}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{<\omega}} \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ であるためには，F の任意の有限部分集合 J に対して，$\{\xi \in \kappa : J \subseteq F_\xi\}$ が κ において非有界であることが必要十分である．

(8) $\lceil\{F\}\rceil \leq_{\mathbb{J}_{<\infty}} \langle\kappa, \mathrm{Bd}^+_\kappa, \langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle\rangle$ であるためには，$\{\xi \in \kappa : F \subseteq F_\xi\}$ が κ において非有界であることが必要十分である．

例 15. κ は正則基数，$\mathcal{F}$ は集合 A 上の擬フィルターとする．

(1) 基数 ν に対して，$\mathcal{F}$ が κ-nbd$\varDelta^\nu$ 性をもつとは，$F_\xi \in \mathcal{F}$ が各 $\xi \in \kappa$ に対して与えられたら，$F \in \mathcal{F}$ が存在して，その任意の部分集合 J について，$|J| \leq \nu$ ならば，$\{\xi \in \kappa : J \subseteq F_\xi\}$ が κ において非有界であるという意味である．

(2) 基数 ν に対して，$\mathcal{F}$ が κ-nbd$\varDelta^{<\nu}$ 性をもつとは，$F_\xi \in \mathcal{F}$ が各 $\xi \in \kappa$ に対して与えられたら，$F \in \mathcal{F}$ が存在して，その任意の部分集合 J について，$|J| < \nu$ ならば，$\{\xi \in \kappa : J \subseteq F_\xi\}$ が κ において非有界であるという意味である．

(3) $\mathcal{F}$ は κ-nbd$\varDelta^0$ 性をもつ．

(4) $0 < n < \omega$ とする．$\mathcal{F}$ が κ-nbd$\varDelta^n$ 性をもつためには，$F_\xi \in \mathcal{F}$ が各 $\xi \in \kappa$ に対して与えられたら，$F \in \mathcal{F}$ が存在して，任意の $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1} \in F$ に対して，$\{\xi \in \kappa : y_0, y_1, \cdots, y_{n-1} \in F_\xi\}$ が κ において非有界であることが必要十分である．

(5) $\mathcal{F}$ が κ-nbd$\varDelta^1$ 性をもつためには，$F_\xi \in \mathcal{F}$ が各 $\xi \in \kappa$ に対して与えられたら，$F \in \mathcal{F}$ が存在して，任意の $y \in F$ に対して，
$\{\xi \in \kappa : y \in F_\xi\}$ が κ において非有界であることが必要十分である．

(6) $\mathcal{F}$ が κ-nbd$\varDelta^2$ 性をもつためには，$F_\xi \in \mathcal{F}$ が各 $\xi \in \kappa$ に対して与えられたら，$F \in \mathcal{F}$ が存在して，任意の $y_0, y_1 \in F$ に対して，$\{\xi \in \kappa : y_0, y_1 \in F_\xi\}$

が κ において非有界であることが必要十分である.

(7) $\mathcal{F}$ が κ-nbd$\Delta^{<\omega}$ 性をもつためには, $F_\xi \in \mathcal{F}$ が各 $\xi \in \kappa$ に対して与えられたら, $F \in \mathcal{F}$ が存在して, その任意の有限部分集合 J に対して, $\{\xi \in \kappa : J \subseteq F_\xi\}$ が κ において非有界であることが必要十分である.

(8) $\mathcal{F}$ が κ-nbd$\Delta^{<\infty}$ 性をもつためには, $F_\xi \in \mathcal{F}$ が各 $\xi \in \kappa$ に対して与えられたら, $F \in \mathcal{F}$ が存在して, $\{\xi \in \kappa : F \subseteq F_\xi\}$ が κ において非有界であることが必要十分である.

事実 16. κ は正則基数で, $\mathcal{F}$ は集合 A 上の擬フィルターとする.

(1) $\mathcal{F}$ が κ-nbdΔ^1 性をもつためには,
$\langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle : \kappa \to \mathcal{F}$ が減少列ならば, $\bigcap_{\xi\in\kappa} F_\xi \in \mathcal{F}$ となることが必要十分である.
尚, $\langle F_\xi : \xi \in \kappa\rangle$ が減少列であるとは, 各 $\zeta, \xi \in \kappa$ について, $\zeta < \xi < \kappa$ ならば $F_\zeta \supseteq F_\xi$ となることである.

(2) $n \in \omega$ について, $\mathcal{F}$ が κ-nbdΔ^n 性をもつためには, A^n 上の積擬フィルター $\mathcal{F}^n =$
$\{F' \subseteq X^n : F^n \subseteq F' \text{ for some } F \in \mathcal{F}\}$
が κ-nbdΔ^1 性をもつことが必要十分である.

(3) $\mathcal{F}$ が κ-nbd$\Delta^{<\infty}$ 性をもつためには, $\mathcal{F}$ の部分族 $\mathcal{F}'$ が $|\mathcal{F}'| = \kappa$ ならば, その部分族 $\mathcal{F}''$ で, $|\mathcal{F}''| = \kappa$, かつ, $\bigcap \mathcal{F}'' \in \mathcal{F}$ となるものが存在することが必要十分である.

このことから, 次のことがわかる.

- 文献 (7) の中で, 空間 Y が点 q において orthocaliber κ をもつ, と表現されている性質と, κ-nbd$\Delta^{<\infty}$ 性は一致する.
- 文献 (5) の中で, 空間 Y が点 q において κ-dop 性をもつ, と表現されている性質と, κ-nbdΔ^1 性は一致する.
- 文献 (6) の中で, 空間 Y が点 q において κ-nbdΔ 性をもつ, と表現されている性質と, κ-nbdΔ^2 性は一致する.

それらの用語を近傍フィルター以外にも流用して, 集合 A 上の擬フィルター $\mathcal{F}$ が, κ-nbd$\Delta^{<\infty}$ 性, κ-nbdΔ^1 性, κ-nbdΔ^2 性をもつことをそれぞれ, orthocaliber κ をもつ, κ-dop 性をもつ, κ-nbdΔ 性をもつ, ということにする.

4. 積空間の位相的性質と近傍フィルターの関係

定義 15. 全順序集合に開区間の全体の族を開基とする位相を入れたものを**全順序位相空間**という. 全順序位相空間の部分位相空間と同相な空間のことを **GO 空間**という.

位相空間 X の交わらない閉集合 F_0, F_1 に対して, 交わらない開集合 U_0, U_1 があって, $F_0 \subseteq U_0, F_1 \subseteq U_1$ となるとき, X は**正規**であるという. GO-空間はオーソコンパクトであり, 正規よりもさらに強い単調正規とよばれる性質をもつことがよく知られている.

例 17. 距離空間 (X, d) の点 $x \in X$ と実数 $\epsilon > 0$ に対して, x の ϵ-近傍を $B(x, \epsilon)$ とする.

$$B(x, \epsilon) = \{x' \in X : d(x, x') < \epsilon\}.$$

各点 $x \in X$ とその各近傍 V に対して, $B(x, \epsilon) \subseteq V$ となるような $\epsilon > 0$ を 1 つとり, $H(x, V) = B(x, \epsilon/2)$ とおけば, 次の条件が成り立つ.

(MN) 点 $x_0, x_1 \in X$ とそれぞれの近傍 V_0, V_1 について, $H(x_0, V_0) \cap H(x_1, V_1) \neq \emptyset$ ならば, $x_0 \in V_1$ か $x_1 \in V_0$ のいずれかが成り立つ.

定義 16. 位相空間 X の各点 x とその各近傍 V に対して, x の近傍 $H(x, V)$ をうまく割り当てて, 例 17 の条件 (MN) が成り立つようにできるとき, X は**単調正規**であるという.

Buzyakova は次の定理を示した.

定理 18 (1). GO 空間は Δ-パラコンパクトである.

Hirata と Yajima はこの定理を一般化した.

定理 19 (6). オーソコンパクトな単調正規空間は Δ-パラコンパクトである.

この証明をみれば, 更に次のように一般化できる.

系 20 (3). オーソコンパクトな単調正規空間は $\Delta^{<\omega}$-パラコンパクトである.

一方で, $\Delta^{<\omega}$-パラコンパクトな単調正規空間で, オーソコンパクトでないものは存在する. (4)

問題 1. Δ-パラコンパクトだが, Δ^3-パラコンパクトでない空間は存在するか?

これについては, 次のことがわかっている.

定理 21 [3]．正規でオーソコンパクトな空間 X が Δ-パラコンパクトならば，任意の $n \in \omega$ に対して，X は Δ^n-パラコンパクトである．

Hirata, Kemoto, Yajima は，ある種の積空間の位相的性質を近傍フィルターの性質に帰着させるいくつかの結果を得た．

補題 22 [5~7]．S は正則非可算基数 κ の定常集合で，Y は位相空間とする．

(1) $S \times Y$ がオーソコンパクトならば，Y は orthocaliber κ をもつ．

(2) $S \times Y$ が Δ-パラコンパクトならば，Y は κ-nndΔ 性をもつ．

(3) $S \times Y$ が正規，かつ，長方形的積空間ならば，Y は κ-dop 性をもつ．

ここで，S が κ の**定常集合**とは，S が κ の任意の非有界閉集合と交わるということである．

定義 17 [2,8]．空間 Y の各閉集合 F に対して，コンパクト部分空間からなる疎な族で被覆できる F の閉部分集合 $s(F)$ を対応させて，次の条件を満たすようにできるとき，Y は **$\mathbb{DC}$-like** であるという．

> Y の閉集合の減少列 $\{F_n : n \in \omega\}$ について，$F_0 = Y$，かつ，すべての $n \in \omega$ に対して $F_{n+1} \cap s(F_n) = \emptyset$ ならば，$\bigcap_{n\in\omega} F_n = \emptyset$.

定理 23 [5,6]．X はオーソコンパクトな単調正規空間，Y はパラコンパクトな $\mathbb{DC}$-like 空間とする．

(1) $X \times Y$ がオーソコンパクトであるためには，任意の $\kappa \in \mathcal{S}^*(X)$ に対して，Y が orthocaliber κ をもつことが必要十分である．

(2) $X \times Y$ が Δ-パラコンパクトであるためには，任意の $\kappa \in \mathcal{S}^*(X)$ に対して，Y が κ-nndΔ 性をもつことが必要十分である．

(3) $X \times Y$ が正規，かつ，長方形的積空間であるためには，任意の $\kappa \in \mathcal{S}^*(X)$ に対して，Y が κ-dop 性をもつことが必要十分である．

ここで，$\mathcal{S}^*(X)$ は，X の閉集合と同相な定常部分集合をもつような正則非可算基数 κ 全体の集合．

定義 18．空間が非孤立点を高々1 つしかもたないとき**ほとんど離散**であるという．唯一の非孤立点 q を明示して，(Y, q) はほとんど離散な空間である，などともいう．

コンパクト空間や，ほとんど離散な空間は，明らかにパラコンパクトで $\mathbb{DC}$-like である．また，正則非可算基数 κ は全順序位相空間，特に GO 空間なので，オーソコンパクトな単調正規空間でり，$\mathcal{S}^*(\kappa) = \{\kappa\}$ である．よって，上の定理から次の系が得られる．

系 24 [5,6]．κ は正則非可算基数で，(Y, q) はほとんど離散な空間とする．

(1) $\kappa \times Y$ がオーソコンパクトであるためには，Y が点 q において orthocaliber κ をもつことが必要十分である．

(2) $\kappa \times Y$ が Δ-パラコンパクトであるためには，Y が点 q において κ-nbdΔ 性をもつことが必要十分である．

(3) $\kappa \times Y$ が (正規，かつ) 長方形的積空間であるためには，Y が点 q において κ-dop 性をもつことが必要十分である．

問題 2 (nbdΔ^n-問題)．κ は正則基数，$2 \leq n < \omega$ とする．ほとんど離散な空間 (Y, q) で，Y が q において，κ-nbdΔ^{n-1} 性をもつが，κ-nbdΔ^n 性をもたないようなものは存在するか?

定義 19．集合 D 上のフィルター $\mathcal{F}$ で，各 $d \in D$ に対して，$D \setminus \{d\} \in \mathcal{F}$ となるものを，T_1-フィルターとよぶことにする．

ほとんど離散な (T_1-) 空間を考えることは，任意の集合上の (T_1-) フィルターを考えることと概ね同じことなので，上記の nbdΔ^n-問題は，次のように，フィルターに関する問題に書き換えられる．

問題 3 (nbdΔ^n-問題)．κ は正則基数，$2 \leq n < \omega$ とする．ある集合上の T_1-フィルターで，κ-nbdΔ^{n-1} 性をもつが，κ-nbdΔ^n 性をもたないものは存在するか?

補題 25．正則非可算基数 κ と $n \in \omega$ に対して，次は同値である．

(a) ほとんど離散な空間 Y で，$\kappa \times Y$ が長方形的積空間であるが，Δ-パラコンパクトでないようなものが存在する．

(b) ほとんど離散な空間 (Y, q) で，Y が q において κ-dop 性をもつが，κ-nbdΔ 性をもたないものが存在する．

(c) ある集合 D 上の T_1-フィルター $\mathcal{F}$ で，κ-dop 性をもつが，κ-nbdΔ 性をもたないものが存在する．

(d) κ に対して nbd$\varDelta^2$-問題が肯定的な答えをもつ．

系 26．オーソコンパクトな単調正規空間 X とパラコンパクトな $\mathbb{DC}$-like 空間 Y の積 $X \times Y$ で，長方形的積空間であるが，$\varDelta$-パラコンパクトでないようなものが存在するためには，ある正則非可算基数 κ に対して，nbd$\varDelta^2$-問題が肯定的な答えをもつことが必要十分である．

定理 27 [(4)]．θ が正則基数で $\kappa = \theta^+ = 2^\theta$ ならば，κ に対して nbd$\varDelta^2$-問題は肯定的．特に，連続体仮説の下では，ω_1 に対して nbd$\varDelta^2$-問題は肯定的.

問題 4．ZFC のみから，nbd$\varDelta^2$-問題が肯定的となる正則非可算基数 κ の存在を導くことはできるか?

補題 28．正則非可算基数 κ と $n \in \omega$ に対して，次は同値である．

(a) ほとんど離散な空間 Y で，$\kappa \times Y$ が $\varDelta$-パラコンパクトであるが，$\varDelta^3$-パラコンパクトでないようなものが存在する．

(b) ほとんど離散な空間 (Y, q) で，Y が q において κ-nbd$\varDelta$ 性をもつが，κ-nbd$\varDelta^3$ 性をもたないものが存在する．

(c) ある集合 D 上の T_1 フィルター $\mathcal{F}$ で，κ-nbd$\varDelta$ 性をもつが，κ-nbd$\varDelta^3$ 性をもたないものが存在する．

(d) κ に対して nbd$\varDelta^3$-問題が肯定的な答えをもつ．

系 29．オーソコンパクトな単調正規空間 X とパラコンパクトな $\mathbb{DC}$-like 空間 Y の積 $X \times Y$ が $\varDelta$-パラコンパクトであるが，$\varDelta^3$-パラコンパクトでないようなものが存在するためには，ある正則非可算基数 κ に対して，nbd$\varDelta^3$-問題が肯定的な答えをもつことが必要十分である．

事実 30．ある正則非可算基数 κ に対して nbd$\varDelta^3$-問題が肯定的な答えをもつならば，単調正規空間 M で，$\varDelta$-パラコンパクトであるが，$\varDelta^3$-パラコンパクトでないものが存在する．

問題 5．ZFC に，nbd$\varDelta^3$-問題が肯定的となる正則非可算基数 κ の存在を追加した公理系は無矛盾か?

謝辞

本稿，特に 4 節の多くの部分において，家本宣幸氏，矢島幸信氏との共同研究の内容をもとにさせていただきました．ここに感謝の意を表します．

参考文献

(1) R. Z. Buzyakova, Separation of a diagonal, Topology and Appl. **157** (2010), 352–358.
(2) F. Galvin and R. Telgársky, Stationary strategies in topological games, Topology and Appl. **22** (1986), 51–69.
(3) Y. Hirata, Orthocompactness implies $\varDelta$-paracompactness for the product of a $\varDelta$-paracompact normal space and a compact space, preprint.
(4) Y. Hirata, Dividing Δ-properties on monotonically normal spaces, preprint.
(5) Y. Hirata, N. Kemoto and Y. Yajima, Products of monotonically normal spaces with various special factors, Topology and Appl. **164** (2014), 45–86.
(6) Y. Hirata and Y. Yajima, Separation of diagonal in monotonically normal spaces and their products, Topology and Appl., to appear.
(7) N. Kemoto and Y. Yajima, Orthocompactness and normality of products with a cardinal factor, Topology and Appl. **49** (1993), 141–148.
(8) R. Telgársky, Spaces defined by topological games, Fund. Math. **88** (1975), 193–223.
(9) Y. Yajima, Products of monotonically normal spaces with factors defined by topological games, Topology and Appl. **159** (2012), 1223–1235.