



一般異方性円筒殻の座屈

高野 敦*

Buckling and Static Strength of Anisotropic Cylinders

Atsushi TAKANO*

1. 緒言

衛星のセントラルシリンダやストラット、航空機の胴体など、薄肉またはやや厚肉の円筒殻は重要な構造部材である。これらの構造物は年々大型化しており、それに伴い主構造として使用される円筒殻も長大化している。円筒殻の表皮としては、複合材を用いた積層円筒殻や、複合材料表皮を有するハニカムサンドイッチ円筒殻等が用いられている。これらの円筒殻は軽量化のため薄肉となるが、その場合、圧縮・せん断などの荷重による座屈と呼ばれる不安定現象での崩壊が起こりやすくなり、強度設計上重要なパラメータとなる。図 1 に、半径 r 、長さ l の円筒殻の両端に一樣圧縮荷重 P 、ねじりトルクによる一樣剪断荷重 T が負荷された状況を示す。

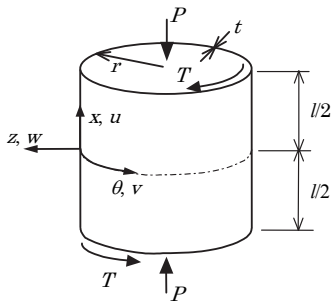


図 1 円筒殻の座屈軸及び記号

座屈とは、材料力学で学んだ長柱の座屈のように、細長い 1 次元部材が面内圧縮(ねじりの場合はせん断)荷重を受けて軸外にたわむことや、板や円筒殻などのシェルなどの 2 次元部材が、面内圧縮・せん断荷重により面外にたわむことにより、ある一定以上の荷重を支えられな

くなる現象である。図 2 に、金属円筒殻での座屈実験における座屈後の様子を示す⁽¹⁾。

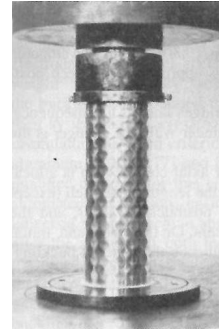


図 2 典型的な座屈波形

円筒殻の場合は、図 2 のような、座屈後は“ダイヤモンドパターン”と呼ばれる菱形状の特徴的なたわみ波形を示す。

過去何十年かの間に、多くの積層円筒殻または異方性円筒殻の座屈解析⁽²⁾⁻⁽¹⁰⁾が発表されている。その中でも、設計に用い易い、解が陽に与えられる閉じた形の式としては、NASA の Design Criteria⁽⁸⁾や小林、世古および広瀬の式⁽⁹⁾があるが、対象が直交異方性に限定されているので、カップリング剛性が存在する場合には適用できない。最近、Wong と Weaver⁽¹⁰⁾によって一般異方性円筒殻に対する、非常にシンプルな解が得られているが、面外剪断変形を考慮していないので、きわめて薄肉の円筒殻にしか適用できない。さらに言うと、これらの解析⁽²⁾⁻⁽¹⁰⁾は Donnell⁽¹¹⁾の理論に基づいているため、長いセントラルシリンダやストラットなど長い円筒殻に対しては適用できない。Donnell の理論は、Shallow Shell の近似に基づくため、円筒殻の半径に対し、全長が長い場合は適用範囲外となり、Deep Shell 理論に基づいた解析が必要とな

*准教授 機械工学科

Professor, Dept. of Mechanical Engineering

る。

Donnell の理論によらない、Deep-Shell の理論に基づく解析としては、Cheng と Ho^{(12),(13)}によって、Deep Shell 理論のひとつである Flügge⁽¹⁴⁾の座屈解析理論を引張り一剪断カップリング剛性、面内一面外カップリング剛性および曲げ—ねじりカップリング剛性のすべてを含む一般対称積層円筒殻に関して拡張されたものがある。さらに、Bert および Kim⁽¹⁵⁾は Cheng と Ho の理論を、細いシャフトのねじり座屈解析に適用している。しかし、Cheng と Ho の理論はシェルの面外剪断変形を無視した古典積層理論に基づいているため、その理論を面外剪断変形が無視できない樹脂をマトリックスとする複合材料積層円筒殻やハニカムサンドイッチ積層円筒殻に用いた場合、座屈荷重を高目（危険側）に予測してしまう可能性がある。さらに付け加えると、Ho と Cheng⁽¹³⁾、Lei と Cheng⁽¹⁶⁾および Wu⁽¹⁷⁾は Cheng と Ho の理論を用いてある特定の積層についての数値計算は実施しているが、カップリング剛性及び長さが座屈荷重に対する影響についての系統的な調査は行っていない。

Stein と Mayers⁽¹⁸⁾は、面外剪断変形を考慮した直交異方性円筒殻の軸圧縮座屈に関する簡潔な解を得ている。ただし、その理論もやはり Donnell の理論に基づいているため、長い円筒殻には適用できない。

また、Geier と Singh⁽¹⁹⁾および Resse と Bert⁽²⁰⁾は、面外剪断変形を考慮しかつ Deep Shell 理論に基づいた積層円筒殻の座屈解析を示した。Kardomateas と Philobos⁽²¹⁾は三次元弾性論に基づく直交異方性円筒殻の軸圧縮および外圧による座屈の解析を行っている。しかしそれら解析では、積層は対称積層に限られ、かつ曲げ—ねじりカップリングを無視している。

このように、長さによらず適用できる Deep Shell 理論に基づき、かつ面外剪断剛性とカップリング剛性のすべてを考慮した座屈解析法はいまだ確立されていない。さらに、円筒殻の座屈に関して、長さ、面外剪断剛性とカップリング剛性の影響およびそれらの相互作用を系統的に明らかにした研究は行われていない。

また一方で、円筒殻の座屈、特に軸圧縮座屈に於いては、初期不整等の影響により、解析結果と実験値にかなりの差があることが知られている。この実験値と解析結果の比は、いわゆる knockdown factor として整理されることが多い。図 3 に、複合材料円筒殻の軸圧縮座屈についての knockdown factor を示す。図中の点は過去の実験値と理論値⁽³⁰⁾の比率であり、100%が実験値と理論値が一致した場合、100%以下は実験が理論を下回ったことを示す。それ以外の破線、実線については後述する。図

3 のより、解析結果に対し実験結果はかなり低く、かつばらつきも大きいことが分かる。

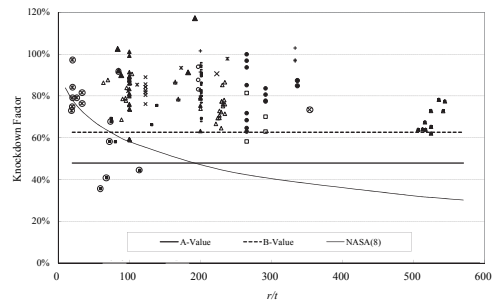


図3 複合材料円筒殻の軸圧縮座屈についての knockdown factor

この knockdown factor を考慮した一般異方性円筒殻の座屈評価方法については、依然として定まった方法は無い。初期不整等を有する現実の円筒殻の座屈荷重の評価方法としては、線形の座屈解析を実施し、それにその解析結果と実験結果の差異、すなわち knockdown factor を考慮する方法と、初期不整などを考慮した、非線形解析を実施する方法の二つに大別される。初期不整などを考慮した非線形解析は、非線形有限要素法を用いて実施されることが多いが、Bisagni⁽²²⁾が行った実験と非線形有限要素解析による荷重変位線図の比較に示されているとおり、いまだ十分に精度良い予測が出来ているとはいえない。また、Hilburger⁽²³⁾が行った、実測した形状の初期不整のみならず、弾性率、板厚、積層角などのばらつきを考慮した、非常に精密な非線形有限要素解析と実験結果の比較においても、依然として 5-10%の差異が残ることが示されている。また、初期不整を考慮した非線形解析を行う場合、事前に初期不整についての情報が必要であり、設計の段階では初期不整の情報がある場合は少ないこと、またこの初期不整を有限要素モデルに反映する際の時間的コストがかかることを考慮すれば、設計の段階においてこの手法の適用は困難である。

一方、knockdown factor と、それに対応する線形座屈評価式についても情報は少ない。Bruhn⁽²⁴⁾は、実験結果に基づく統計的な処理をした knockdown factor を、信頼性限界値とともにチャートの形で示したが、等方性円筒殻の実験結果に基づいているため一般異方性円筒殻には適用できない。Weingarten 他⁽²⁵⁾によって、過去に行われた実験結果の下限値としての knockdown factor が簡単な計算式で示されているが、これも等方性円筒殻を対象としている。NASA の Design Criteria⁽⁸⁾には、直交異方性円筒殻を対象として、先に言及した Donnell の式に基づく

線形座屈評価式とともに、knockdown factor が示されているが、Weingarten 他⁽²⁵⁾によって提案された等方性円筒殻の knockdown factor をそのまま直交異方性の場合に当てはめたと過ぎない。座屈一般について、各種解析法やチャートを集めたハンドブック^{(26), (27)}や、各種の座屈の試験結果を収集・整理した書籍⁽¹⁾も存在するが、それらにも直ちに設計に適用できるような、knockdown factor を考慮した一般異方性円筒殻の座屈評価方法は示されていない。

このように、一般異方性円筒殻の座屈の予測には定まった方法が無く、したがって設計の際には極端に安全側の評価を行って用いるしかないのが現状である。そこで、統計的手法に基づき信頼度が明示された knockdown factor の導出が求められる。

2. 統計の評価について

統計的手法は、大きく 2 種類に分けられる。1 つ目は Elishakoff⁽²⁸⁾などに代表される手法である。この手法の概念的説明を図 4 に示す。この手法は、対象とする円筒殻の座屈荷重に影響を与えらると思われる各種初期不整（形状、境界条件、弾性定数、荷重、厚さなど）の平均と分散などを把握し、これを確率的な解析入力とし、確率的な解析手法（たとえば First-Order Second-Moment methods またはモンテカルロ法など）を用いて、確率的な座屈荷重（座屈荷重の平均および分散、または座屈荷重についての信頼度関数）を得るものである。

2 つ目は著者による方法である⁽²⁹⁾⁽³⁰⁾。この手法の概念的説明を図 5 に示す。この方法は、解析においては対象とする円筒殻のノミナル情報（形状、境界条件、弾性定数、荷重、厚さなど）を用い、解析も確定論的手法を用い、得られた座屈荷重に対して推測統計学により得られた無限母集団に対する確率的な knockdown factor を乗じることで確率的な座屈荷重を得ようとする手法である。この確率的な knockdown factor は、従

来の実験結果と確定論的解析結果の比率から、推測統計学を用いて、無限母集団に対する knockdown factor として得られている。

1 つ目の Elishakoff⁽²⁸⁾の手法は、対象とする円筒殻の初期不整に対する統計的情報が正確かつ十分多いサンプルについて集められれば、得られた結果の精度は極めて高いことが予想される。ただし、設計者の立場から考えると、設計の初期段階でこれらの情報が得られることはきわめてまれである。これらの情報が得られる場面としては、実際に円筒殻が多数製造され、形状測定や、弾性定数の測定などが完了していることを意味する。この状況は、円筒殻としての設計が完了し、量産段階に移行していることを意味する。したがって、この手法は設計のための予測としては適用しがたいことを意味する。また、この手法では後述するようにサンプルと母集団の区別を行っていない、すなわち、記述統計の手法に基づいている。したがって、解析に用いる統計データのサンプル数が十分多し、すなわちサンプルと母集団が同一視できるほどのサンプル数がないと、新たに製造する円筒殻の座屈荷重の精度が保証できないことを意味する。

2 つ目の著者による方法においては、このような問題はなく、設計者は確定論的な解析入力情報、すなわちノミナル情報を用いて確定論的な解析を行い、得られた結果に対して推計統計学から得られた knockdown factor 単に乗じればよい。この knockdown factor は、推計統計学に基づく。すなわち、母集団とサンプルを区別し、過去の実験データをサンプルとして取り扱ってそのサンプルが属している母集団の knockdown factor となっている。この場合の制約条件としては、新たに設計した円筒殻が、knockdown factor を求めるための実験に用いた円筒殻と同じ母集団に属していることが必要となる。概念的には、新たに設計した円筒殻のばらつきが、knockdown factor を求めるための実験に用いた円筒殻のばらつきの範囲に収まっていることが要求されるといえよう。

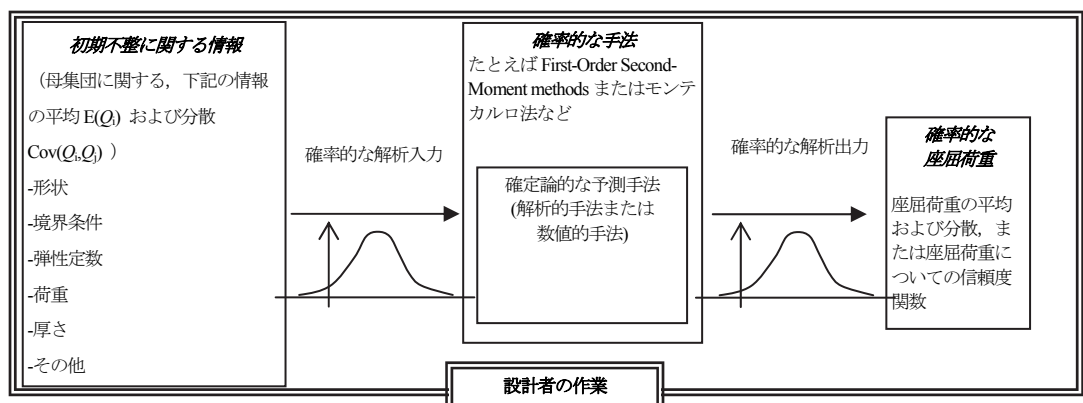
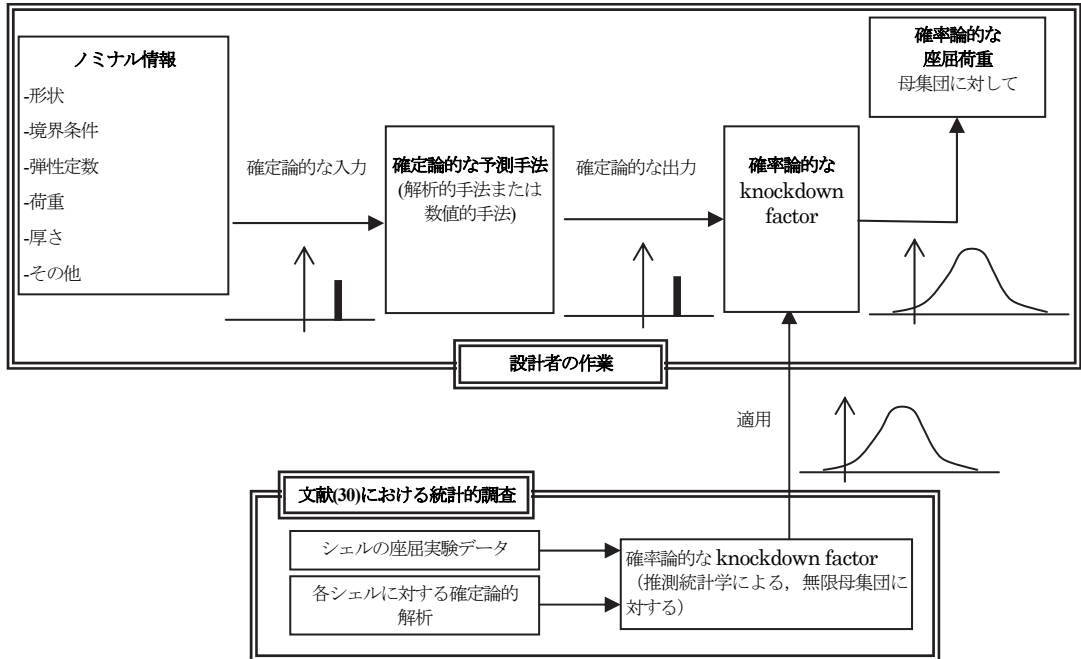


図 4 解析入力に対して確率的取り扱いをする方法⁽²⁸⁾

図5 解析結果に対して確率論的評価を適用する方法⁽³⁰⁾

3. 著者の取り組み

上述した背景と先行の研究の調査に基づき、著者は文献⁽²⁹⁾⁽³³⁾において、以下の様な取り組みを行った。

- 1) 長さによらず適用できるよう、Deep Shell 理論に基づき、かつ面外剪断変形を考慮した一般異方性円筒殻の軸圧縮およびねじり、さらにそれらの複合荷重下における座屈基礎式を導出し、その解析法を示した⁽²⁹⁾⁽³²⁾。
- 2) 上述の解析法を用いて、軸圧縮およびねじり、さらにそれらの複合荷重下における座屈に対する、円筒殻の長さ、面外剪断剛性および、一般異方性すなわちカップリング剛性の影響を系統的に調査し、その振舞いの全貌を明らかにした⁽²⁹⁾⁽³²⁾。特に、円筒殻の長さ及びカップリング剛性の影響は、Cheng 及び Ho⁽¹²⁾の解析法で扱えたが、系統的な調査は行われていなかったため、文献⁽²⁹⁾⁽³³⁾の中で明らかにした。
- 3) 特に実験結果との差異が大きいと言われている軸圧縮座屈について、実験結果と解析の比較をし、設計に用いることの出来る knockdown factor を求めた⁽²⁹⁾⁽³⁰⁾。
- 4) 同時に、実験結果と本論文での解析法による結果及び従来の解析法による結果を比較し、本論文による解析結果が最も精度良く実験結果を予測できることを示した⁽²⁹⁾⁽³⁰⁾。
- 5) 設計に使いやすいよう、解が陽な形で与えられる、閉

じた形の解を求めた⁽²⁹⁾⁽³¹⁾。

特に、一口に Deep Shell 理論と言っても、Love⁽³⁴⁾、Timoshenko⁽³⁵⁾、Sanders⁽³⁶⁾および Flügge⁽¹⁴⁾など、さまざまな種類があるため、それらの優劣を論じた後に最も妥当と思われる理論を選定するのが望ましいが、その作業はきわめて煩雑になることが予想される。

そこで著者は、文献⁽²⁹⁾⁽³²⁾において、従来伝統的に幾何学的非線形性を考慮する際に用いられてきた Green-Lagrange の歪⁽³⁷⁾⁽⁴²⁾から出発し、変分原理を用いて、面外剪断変形を考慮した Deep-Shell 理論に基づく座屈に関する基礎式を導出した⁽²⁹⁾⁽³²⁾。また、その基礎式において、面外剪断変形の項を無視すれば、Cheng および Ho⁽¹²⁾によって一般異方性に拡張された Flügge の基礎式と一致することを示した。これによって、幾何学的非線形性を考慮する歪の定義として、Green-Lagrange の歪を受け入れるのであれば、結果的に Flügge の基礎式が理論上正確であると言えることを示した⁽²⁹⁾⁽³²⁾。

しかしながら、近年、Green-Lagrange の歪について理論的な不備が指摘されており、その不備を克服した Jaumann の歪および応力が提案されている⁽⁴³⁾。それによれば、大変形時には、Green-Lagrange の歪と仕事に関して共役である第二 Piola-Kirchhoff 応力を結び付ける構成式に用いる弾性率は歪に関して定数となりえず、その構

成式に工学歪および工学応力から算出された弾性率を用いると、大変形時に差異が大きくなることが示されている。文献⁽⁴³⁾に提案されている Jaumann の歪および応力は、工学歪および応力から算出された弾性率が適用できるように考慮されており、大変形時にも問題が無いことが示されている。

そこで、著者は、Jaumann の歪と Green-Lagrange の歪の統一的な表記から出発し、再度座屈に関する基礎式を導出する。同時に、Green-Lagrange の歪を受け入れるのであれば、Flügge の基礎式に一致することを再度確認した⁽²⁹⁾⁽³¹⁾。

さらに、従来伝統的に幾何学的非線形性を考慮する際には Green-Lagrange の歪が用いられて来たことを踏まえて、前述の基礎式のうち、Green-Lagrange の歪に基づく基礎式を用いて実際に数値計算を実施し、基礎式及び解析法の妥当性を確認し、さらに長さ、面外剪断変形及びカップリング剛性の影響が適切に考慮されていることを確認した⁽²⁹⁾⁽³²⁾。同時に、軸圧縮、ねじり、および軸圧縮とねじりの複合荷重における一般異方性円筒殻の座屈に対する、長さ、面外剪断剛性及びカップリング剛性の影響を系統的に調査し、その全貌を明らかにした⁽²⁹⁾⁽³³⁾。

加えて、Jaumann の歪に基づく基礎式から軸圧縮座屈についての閉じた解を導出するための準備として、Jaumann の歪と Green-Lagrange の歪のそれぞれに基づく基礎式を用いて一般異方性円筒殻の軸圧縮座屈についての数値解をいくつか示し、どちらの歪の定義から出発しても解析結果にはほとんど影響がない事を示した。

また、Jaumann の歪に基づく基礎式から出発し、境界条件を近似的に満足することによって、設計に使いやすいよう、閉じた解を導出した⁽²⁹⁾⁽³¹⁾。この解 $q_2 = P/A_{22}$ を式 (1) に示す。

$$q_2 = \frac{1}{2\tilde{k}_{11}\lambda^2} \left\{ \begin{array}{l} -(\tilde{k}_{12}^2 - \tilde{k}_{11}\tilde{k}_{22} + \tilde{k}_{13}^2 - \tilde{k}_{11}\tilde{k}_{33}) \\ \pm \sqrt{(\tilde{k}_{12}^2 - \tilde{k}_{11}\tilde{k}_{22} + \tilde{k}_{13}^2 - \tilde{k}_{11}\tilde{k}_{33})^2} \\ - 4\tilde{k}_{11}(-\tilde{k}_{13}^2\tilde{k}_{22} - \tilde{k}_{11}\tilde{k}_{23}^2 - \tilde{k}_{12}^2\tilde{k}_{33} \\ + 2\tilde{k}_{12}\tilde{k}_{13}\tilde{k}_{23} + \tilde{k}_{11}\tilde{k}_{22}\tilde{k}_{33}) \end{array} \right\} \quad (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{11} &= k_{11} - (k_{15}^2 k_{44} - 2k_{14}k_{15}k_{45} + k_{14}^2 k_{55})/\Delta \\ \tilde{k}_{12} &= k_{12} + (-k_{15}k_{25}k_{44} + k_{15}k_{24}k_{45} + k_{14}k_{25}k_{45} - k_{14}k_{24}k_{55})/\Delta \\ \tilde{k}_{13} &= k_{13} + (-k_{15}k_{35}k_{44} + k_{15}k_{34}k_{45} + k_{14}k_{35}k_{45} - k_{14}k_{34}k_{55})/\Delta \\ \tilde{k}_{22} &= k_{22} - (k_{25}^2 k_{44} - 2k_{24}k_{25}k_{45} + k_{24}^2 k_{55})/\Delta \\ \tilde{k}_{23} &= k_{23} + (-k_{25}k_{35}k_{44} + k_{25}k_{34}k_{45} + k_{24}k_{35}k_{45} - k_{24}k_{34}k_{55})/\Delta \\ \tilde{k}_{33} &= k_{33} - (k_{35}^2 k_{44} - 2k_{34}k_{35}k_{45} + k_{34}^2 k_{55})/\Delta \\ \Delta &= k_{44}k_{55} - k_{45}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= (a_{11} + b_{11})\lambda^2 + \frac{2na_{16}\lambda + n^2(a_{66} - b_{66} + d_{66})}{\lambda^2} \\ k_{12} &= (a_{16} + 2b_{16} + d_{16})\lambda^2 + n(a_{12} + a_{66} + b_{12} + b_{66})\lambda + \frac{n^2 a_{26}}{\lambda^2} \\ k_{13} &= (b_{11} + d_{11})\lambda^3 + \frac{n(3b_{16} + d_{16})\lambda^2}{\lambda^2} \\ &\quad + [n^2(b_{12} + 2b_{66} - d_{66}) + a_{12}]\lambda + \frac{n^3(b_{26} - d_{26})}{\lambda^2} \\ &\quad + \frac{n(a_{26} - b_{26} + d_{26})}{\lambda^2} \\ k_{14} &= (b_{11} + d_{11})\lambda^2 + \frac{2nb_{16}\lambda + n^2(b_{66} - d_{66})}{\lambda^2} \\ k_{15} &= (b_{16} + d_{16})\lambda^2 + n(b_{12} + b_{66})\lambda + \frac{n^2(b_{26} - d_{26})}{\lambda^2} \\ k_{22} &= (a_{66} + 3b_{66} + 3d_{66})\lambda^2 + \frac{2n(a_{26} + 2b_{26} + d_{26})\lambda}{\lambda^2} \\ &\quad + n^2(1 + b_{22}) \\ k_{23} &= (b_{16} + 2d_{16})\lambda^3 + n(b_{12} + 2b_{66} + d_{12} + 3d_{66})\lambda^2 \\ &\quad + [n^2(3b_{26} + 2d_{26}) + a_{26} + b_{26}]\lambda + n^3b_{22} + n \\ k_{24} &= (b_{16} + 2d_{16})\lambda^2 + n(b_{12} + b_{66} + d_{12} + d_{66})\lambda + \frac{n^2 b_{26}}{\lambda^2} \\ k_{25} &= (b_{66} + 2d_{66})\lambda^2 + \frac{2n(b_{26} + d_{26})\lambda + n^2 b_{22}}{\lambda^2} \\ k_{33} &= d_{11}\lambda^4 + \frac{4nd_{16}\lambda^3}{\lambda^2} + 2[n^2(d_{12} + 2d_{66}) + b_{12}]\lambda^2 \\ &\quad + \frac{2n(2n^2 d_{26} + 2b_{26} - d_{26})\lambda + (n^2 - 1)^2 d_{22} + (2n^2 - 1)b_{22} + 1}{\lambda^2} \\ k_{34} &= d_{11}\lambda^3 + \frac{3nd_{16}\lambda^2}{\lambda^2} + [n^2(d_{12} + 2d_{66}) + b_{12}]\lambda \\ &\quad + \frac{n[b_{26} + (n^2 - 1)d_{26}]}{\lambda^2} \\ k_{35} &= \frac{d_{16}\lambda^3}{\lambda^2} + n(d_{12} + 2d_{66})\lambda^2 + \frac{(b_{26} + 3n^2 d_{26})\lambda}{\lambda^2} \\ &\quad + n[b_{22} + (n^2 - 1)d_{22}] \\ k_{44} &= d_{11}\lambda^2 + \frac{2nd_{16}\lambda + n^2 d_{66} + s_{11}}{\lambda^2} \\ k_{45} &= \frac{d_{16}\lambda^2}{\lambda^2} + n(d_{12} + d_{66})\lambda + \frac{n^2 d_{26} + s_{12}}{\lambda^2} \\ k_{55} &= d_{66}\lambda^2 + \frac{2nd_{26}\lambda + n^2 d_{22} + s_{22}}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\{a_{ij}, b_{ij}, d_{ij}\} = (1/A_{22}) \{A_{ij}, B_{ij}/r, D_{ij}/r^2\} \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$s_{ij} = (1/A_{22}) c_{ij} S_{ij} \quad i, j = 1, 2$$

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-l/2}^{l/2} \bar{Q}_{ij} \{1, z, z^2\} dz \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$c_{ij} S_{ij} = c_{ij} \int_{-l/2}^{l/2} \bar{Q}_{i+j+3} dz \quad i, j = 1, 2.$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix}.$$

であり、 \bar{Q}_{ij} は積層板の弾性定数である。

Jaumann の歪に基づく基礎式を選択した理由は、軸圧縮座屈を考えた場合、最終的に得られる座屈荷重計算式が荷重係数に対し 2 次式となり、解きやすくなる利点があるためである。

さらに、一般異方性円筒殻のうち、積層円筒殻について実験データを収集し、その結果と本論文で導出した解析法を比較し、knockdown factor として整理し、同時に推計統計学の手法を用いて信頼度が明示された knockdown factor の値を導出した⁽²⁹⁾⁽³⁰⁾。その値は図 3 中

の“A 値”および“B 値”として示されている。A 値および B 値とは、母集団に属する 99%あるいは 90%のものが、この値を超えるという推定が 95%の確からしきで判定された値である。母集団とサンプルを区別し、サンプルのデータから母集団について推定を行うので、このような表現となる。合わせて、前述のとおり、図 3 中の曲線は NASA の Design Criteria⁽⁸⁾に示された knockdown factor であるが、半径対板厚比 rlt の大きい領域では、NASA の Design Criteria⁽⁸⁾は過度に安全側になっていることもわかる。

加えて、上述の閉じた解を用いた軸圧縮座屈荷重の見積もり方法も示した⁽²⁹⁾⁽³⁰⁾。さらに、本論文の解析法に基づく軸圧縮座屈解析の予測がもっとも正確であると判断できることを示すために、従来の解析法を基準とした knockdown factor のばらつき具合および本論文で導出した解析法を基準とする knockdown factor のばらつき具合とを変動係数で評価した⁽²⁹⁾⁽³⁰⁾。結果を表 1 に示す。 \bar{x} および s は knockdown factor の平均および分散である。変動係数は、分散 s を平均 \bar{x} で正規化したものであり、相対的なばらつきを表し、精度の指標として用いられる。この変動係数が小さいほど、予測が正確であると言える。

表 1 各種解析法の比較

	NASA ⁽⁸⁾			
	Orthotropy	Special Anisotropy	Weaver ⁽¹⁰⁾	Proposed ⁽²⁹⁾⁽³²⁾
Average, \bar{x}	73.3 %	79.8 %	87.1 %	82.9 %
Standard deviation, s	18.0 %	14.3 %	14.5 %	10.9 %
CV, s/\bar{x}	24.6 %	17.9 %	16.6 %	13.2 %

表 1 を見ると、右に行くほど変動係数 s/\bar{x} は小さくなっている。これは当然のことで、一番左から右に行くにつれ、順に近似の度合いが少なくなるように配列してあるためである。

表 2 に、従来の研究法と、著者の方法との比較のまとめを示す。表 2 よりからもわかるとおり、著者の方法は、理論上の近似が最も少なく、かつ統計的に処理された knockdown factor も備えており、現段階で最も信頼できるものと考ええる。

8. 結言

きわめて長い間、構造設計技術者は、knockdown factor に関する不十分な情報と、十分とはいえない解析手法の中で複合材料を用いた積層円筒殻の軸圧縮座屈設計を強いられてきた。その結果、必ずしも、複合材料の高強度、高弾性特性を十分に活かし切っていたとは言い

がたい。ここにおいてはじめて、一定の信頼のおける評価手法を得たと言え、それに伴い複合材料の高強度、高弾性特性を十分に発揮させた設計が出来るようになったと考える。

表 2 従来の研究・解析法と著者の方法

	等方性	直交異方性を考慮	一般異方性を考慮	長さの効果	面外剪断剛性を考慮	境界条件を考慮	閉じた解	knockdown factor の有無
Donnell ⁽¹¹⁾	○	×	×	×	×	○	○	×
Bruhn ⁽²⁴⁾	○	×	×	×	×	○	○	○
Weingarten 他 ⁽²⁵⁾	○	×	×	×	×	○	○	○
Love ⁽³⁴⁾	○	×	×	○	×	○	○	×
Timoshenko ⁽³⁵⁾	○	×	×	×	×	○	○	×
Sanders ⁽³⁶⁾	○	×	×	○	×	○	○	×
Flügge ⁽¹⁴⁾	○	×	×	○	×	○	○	×
NASA の Design Criteria ⁽⁸⁾	○	○	×	×	×	○	○	○
小林, 世古および 広瀬の式 ⁽⁹⁾	○	○	△	×	×	△	○	×
Wong と Weaver ⁽¹⁰⁾	○	○	○	×	×	×	○	×
Kardomateas と Philobos ⁽²¹⁾	○	○	×	×	×	○	×	×
Geier と Singh ⁽¹⁹⁾	○	○	×	×	×	○	×	×
Resse と Bert ⁽²⁰⁾	○	○	×	×	×	○	×	×
Stein と Mayers ⁽¹⁸⁾	○	○	×	×	×	×	○	×
Cheng と Ho ^{(12),(13)} (文献 12 の式 45)	○	○	○	○	×	○	×	×
Cheng と Ho ^{(12),(13)} (文献 12 の式 19)	○	○	○	○	×	×	○	×
高野の厳密解 ⁽²⁹⁾⁽³²⁾	○	○	○	○	○	○	×	○
高野の閉じた解 ⁽²⁹⁾⁽³¹⁾	○	○	○	○	○	△	○	○

○：考慮（または適合）、△：近似的に考慮、×：考慮せず
(または非適合)

参考文献

- (1) J. Singer, J. Arbocz, T. Weller, *Buckling Experiments, Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures, Volume 2, Shells, Built-up Structures, Composites and Additional Topics*, John Wiley & Sons, August 2002
- (2) Hedgepeth, J. M., and Hall, D. B., “Stability of Stiffened Cylinders,” *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 12, 1965, pp. 2275–2287.
- (3) Tasi, J., “Effect of Heterogeneity on the Stability of Composite Cylindrical Shells under Axial Compression,” *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 6, 1966, pp. 1058–1062.
- (4) Jones, R. M., “Buckling of Circular Cylindrical Shells with Multiple Orthotropic Layers and Eccentric Stiffeners,” *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 12, 1968, pp. 2301–2305.
- (5) Soong, T. C., “Buckling of Cylindrical Shells with Eccentric Spiral-Type Stiffeners,” *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 1, 1969, pp. 5–72.

- (6) Onoda, J., "Optimal Laminate Configurations of Cylindrical Shells for Axial Buckling," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 7, 1985, pp. 1093–1098.
- (7) Weaver, P. M., "Anisotropy-Induced Spiral Buckling in Compression-Loaded Cylindrical Shells," *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 5, 2002, pp. 1001–1007.
- (8) "Buckling of Thin-Walled Circular Cylinders," NASA SP-8007, Revised, (August 1968).
- (9) 小林, 世古, 広瀬: CFRP円筒殻の圧縮座屈 II. 最適積層構成, 日本航空宇宙学会誌第32巻, 第362号, 1984
- (10) Wong, K. F. W., and Weaver, P. M., "Approximate Solution for the Compression Buckling of Fully Anisotropic Cylindrical Shells," *AIAA Journal*, Vol. 43, No. 12, 2005, pp. 2639–2645.
- (11) Donnell, L.H., "Stability of Thin-Walled Tube under Torsion," NACA Report 479, 1933, pp. 95–116.
- (12) Cheng, S., and Ho, B. P. C., "Stability of Heterogeneous Aeolotropic Cylindrical Shells under Combined Loading," *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 4, 1963, pp. 892–898.
- (13) Ho, B. P. C., and Cheng, S., "Some Problems in Stability Heterogeneous Aeolotropic Cylindrical Shells under Combined Loading," *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 7, 1963, pp. 1603–1607.
- (14) Flügge, W., *Stresses in Shells*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1973, Chap. 8.
- (15) Bert, C. W., and Kim, C. D., "Analysis of Buckling of Hollow Laminated Composite Drive Shafts," *Composites Science and Technology*, No. 53, 1995, pp. 343–351.
- (16) Lei, M. M., and Cheng, S., "Buckling of Composite and Homogeneous Isotropic Cylindrical Shells under Axial and Radial Loading," *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, 1969, pp. 791–798.
- (17) Wu, C. H., "Buckling of Anisotropic Circular cylindrical Shells," Ph. D. Thesis, Case Western Reserve University, June, 1971.
- (18) Stein, M., and Mayers, J., "Compressive Buckling of Simply Supported Curved Plates and Cylindrical Shells of Sandwich Construction," NACA TN 2601, Jan. 1952.
- (19) Geier, B., and Singh, G., "Some Simple Solutions for Buckling Loads of Thin and Moderately Thick Cylindrical Shells and Panels Made of Laminated Composite Material," *Aerospace Science and Technology*, 1997, No. 1, pp. 47–63.
- (20) Resse, C. D., and Bert, C. W., "Buckling of Orthotropic Sandwich Cylinders Under Axial Compression and Bending," *Journal of Aircraft*, Vol. 11, No. 4, 1974, pp. 207–212.
- (21) Kardomateas, G. A., and Philobos, M. S., "Buckling of Thick Orthotropic Cylindrical Shells Under Combined External Pressure and Axial Compression," *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 10, 1995, pp. 1946–1953.
- (22) Bisagni, C., "Numerical analysis and experimental correlation of composite shell buckling and post-buckling," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 31, No. 8, 2000, pp. 655–667
- (23) Hilburger, M. W., Nemeth, M. P., and Starnes, J. H., Jr., "Shell Buckling Design Criteria Based on Manufacturing Imperfection Signatures," *AIAA Journal*, Vol. 44, No. 3, 2006, pp. 654–663.
- (24) Bruhn, E. F., *Analysis and Design of Flight Vehicle Structures*, Jacobs Pub, Indianapolis, IN, 1973, Chap. 8.
- (25) Weingarten, V. I., Morgan, E. J., and Seide, P., "Elastic Stability of Thin - Walled Cylindrical and Conical Shells under Axial Compression," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 3, 1965, pp. 500–505.
- (26) 長柱研究委員会, 弾性安定要覧 改訂増補, コロナ社, 昭和 42 年
- (27) Column Research Committee of Japan (Edited by), *Handbook of Structural Stability*, Corona Publishing Company, Tokyo, 1971, Part. 3, p. 73.
- (28) Elishakoff, I., "Probabilistic resolution of the twentieth century conundrum in elastic stability," *Thin-Walled Structures*, Vol. 59, 2012, pp.35-57.
- (29) 高野敦, 一般異方性円筒殻の座屈に関する研究, 2009 年 11 月, 東京大学, 第 17263 号
- (30) Takano, A., Statistical Knockdown Factors of Buckling Anisotropic Cylinders under Axial Compression, *ASME Journal of Applied Mechanics* Vol. 79, 2012, 051004
- (31) Takano, A., Simple Closed-Form Solution for the Buckling of Moderately Thick Anisotropic Cylinders, *Aerospace Technology of Japan* Vol. 10, 2012, pp.17-26, 日本航空宇宙学会
- (32) Takano, A., Improvement of Flügge's Equations for Buckling of Moderately Thick Anisotropic Cylindrical Shells, *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 4, 2008, pp. 903–911.
- (33) Takano, A., Buckling of thin and moderately thick anisotropic cylinders under combined torsion and axial compression, *Thin-Walled Structures*, Vol. 49, Issue 2, February 2011, Pages 304–316
- (34) Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Dover Publications, New York, 1944, Chaps. XXIV and XXIV_A.
- (35) Timoshenko, S., and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, 1961, Chap. 11.
- (36) Sanders, J. L., "An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells," NASA TR-R-24, June 1959.
- (37) Green, A. E., and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, 2nd ed., Dover Publications, New York, 1992, Chap. 2.
- (38) Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity & Plasticity*, 3rd ed., Pergamon Press, New York, 1982, Chaps. 3 and 4.

-
- (39) Flügge, W., *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, 1972 (後藤学 訳, テンソル解析と連続体力学, ブレイン図書出版, 1979)
- (40) Palazotto, A. N., and Dennis, S. T., *Nonlinear Analysis of Shell Structures*, AIAA, Reston, VA, 1992.
- (41) Fung, Y. C., and Tong, P., *Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific Singapore, 2007.
- (42) 久田, 野口, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995
- (43) Pai, P. F., *Highly Flexible Structures: Modeling, Computation, and Experimentations*, AIAA, Reston, VA, 2007.