松井の式体系とその周辺

松井　正之*

An Outline on Matsui's Equation and its Circumference

Masayuki MATSUI*

1．はじめに

世の中では，種々の現象は動いているか，停滞しているかのどちらかの渋滞問題である．動いているものは稼働で，停滞しているのは待ち（在庫）であり，これは交互に起こり，相互に依存する．待ち行列理論は初期の電話交換問題(1)の解決から生まれたもので，この種の現象の数理モデルに関する多様な数式系と公式類からなっている(2)．

これまでに数々の解析モデルが開発されてきてるが，解きにくい，複雑な現象も多くあり，挙動解析にてシミュレーションアプローチが有用である．特に実用面では，ケースごとの対象研究になることが多く，個々の実用解が必要とされる場合には，定式化後にはシミュレーションに依存することが多い．

待ち行列対象に関する評価尺度は多様であるが，それらには種々の関係式が知られている．その中で，最重要公式はリトルの公式（Little's formulas）(3)と呼ばれている．この公式は，待ち行列長さ（空間）と待ち時間長（時間）との関係を示しており，後に溢れを含む松井の式(4)として発展している．関連して，待ちや遅れ，ムダの理論となるムダ公式(4)がある．これは，ムダに関する遅れと流れの線形関係を示しており，待ち公式系を成している．

リトルの公式の対象は，待ち行列分野だけでなく，以前から広く物理系分野でも知られている．例えば，電気におけるオウムの法則と対応していることなど多くの場面で見られる．また、会計経済面でも見られて，マトリックス会計(5)における活動量と原価の基本式としても重要である．

この総説では，この領域の知の統合として，松井の公式体系とその周辺というタイトルで概観してみる．

*教授　情報システム創成学科
Professor,　Dept. of Information Systems Creation

2．待ち理論の基礎

2.1 一般待ち行列系

一般に，待ち行列系はサービス・ステーションとその流入（入力）と流出（出力）からなっている．この系からの溢れ（ロス）を含む一般待ち行列系は，図 1 に示されている．通常の待ち行列の書物では，溢れを除いて単純系で取り扱われることが多い．

定常状態では，到着率 λ と生産率 r，溢れ率 v には，次式のような

$$\lambda = r + v \qquad (2.1)$$

の入出力関係式が成立している．ここで，サービス率 μ は，安定条件として $\mu > \lambda$ と仮定されることが一般的である．これは，溢れ（ロス）を許さない場合であるが，以下では一般化してこの制約は考えない．

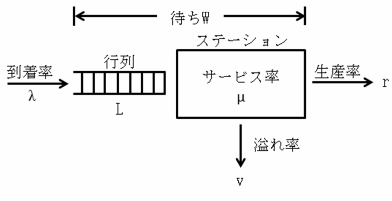

図１　一般待ち行列系

2.2 リトルの公式

一般待ち行列系（図 1）において，待ち行列長さと待ち行列時間に関する基本式が，リトルの公式（Little's formula）(3)と呼ばれている．いま，到着率 λ を $\lambda_0 = \lambda - v$ とおくと，その公式は次式で表される．

$$\lambda_0 W = L \qquad (2.2)$$

この関係式は，待ち行列系（$\mu < \lambda$）の稼働サイクル

$(0, \gamma)$（図 2）から説明できる．図 2 のように，累積到着数と累積出力数の曲線に囲まれた面積は定まり，タテに見ると行列長であり，ヨコに見ると待ち長であり，両者には一定の依存関係が見られる．

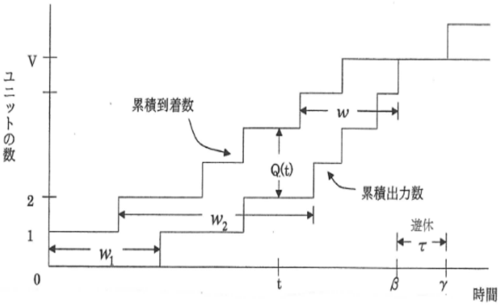

図２　稼働サイクルの例（λW=L）

3．待ち公式の発展

3.1 ムダの公式

従来，待ち行列分野では，系からの溢れ（ムダ?）は正面から取り扱われてこなかった．最初の成果は，1970 年代のコンベヤ生産ステーション（CSPS）の研究で見られる[(4)]．

この待ち行列系において，作業方策による平均遅れ時間 D（一加工あたり）の最小化が研究されてきていた．小生は，この待ち系の溢れに興味を持ち，平均オーバーフローη（一加工あたり）を導出した[(6)]．

後に，この遅れと溢れには（ガイガー計数管参照）．

$$\lambda D = 1 - \rho + \eta \qquad (3.1)$$

という線形関係式が見い出された[(4)]．この関係式は，次の入出力公式と同値である．

$$\lambda Z = M = 1 + \eta \qquad (3.2)$$

ただし，作業サイクル時間 Z は，$Z = X(\mu^{-1}) + D$である．

これにより，種々の生産効率の体系が明らかになっている．表 1 は，生産効率における需要側（ジョブ）と供給側（ステーション）の 2 面性から見た生産の効率体系を示している．

表１　種々の生産効率の体系

	ジョブ効率(需要側)		ステーション効率(供給側)	
変換	P (= 1-B)	処理率(直行率) prob. of processing	P	可動率 availability
	B (= 1-P)	呼損率 prob. of processing	B	可休率 restability
出力	r (= λP or μB)	生産率 production rate	ρP (ρ = λ/μ)	稼働率 busy rate (utilization)
	v (= λB)	溢れ率 overflow rate	1-ρP	遊休率 idle rate

3.2 松井の公式

リトルの公式において，到着率 λ_0 を作業サイクル時間 Z で置き換えると，次式のように松井の式（Matsui's equation）が得られる．

$$W = ZL \qquad (3.3)$$

ここで，また上式を入出力公式 (3.2) と組み合わせると，以下のようになる．

$$\lambda W = ML \qquad (3.4)$$

松井の式 (3.3) は，図 3 のように，企業の価値評価（在庫）に流用できる[(7)]．ここで，Z は収益であり，L はリードタイムであり，W(= ZL)は企業の仕掛資産に対応する．これは，次節の流動数管理法と組み合わせて活用することにより，経営の高度化が可能となる．

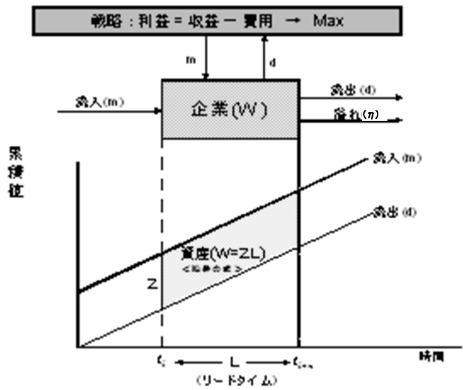

図３　企業の価値評価と松井の式

また，松井の式は，今後の需給系ネットワークなどのシステムバランシング問題の原理としても有用と考えられる[(8)]（図 4 参照）．ここで，W は仕事量に対応しており，図 4 は n 分業化のバランシングを示している．

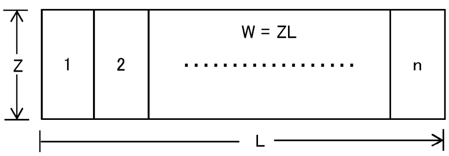

図４　仕事量 W とバランシング

4.「松井の式」体系

4.1　物理系の視点

松井の式(W = ZL)から，知の世界を見てみると，そこには物理学や経済学の知との関係が知られる．すでに，

リトルの公式とオウムの法則との類似性は旧知であるが，あまり既知とはされてはいないようである．

表 2 は，物理系の式体系の概要をまとめている．表 2 から，リトルの公式とオウムの法則との類似性(対応)は確認できる．ただ，松井の式からみると，これらには溢れ(ロス)が含まれていないこともわかる．この知の統合の完成には，この穴埋めが望まれる．

表２　物理系の式体系

($G=1/R_i$(コンダクタンス), $B_i=1-P_i$, $\bar{R}_j=1-R_j$)

		従来		松井の式系
		物理関係	OR関係	
待ち系		オウムの法則	リトルの公式	松井の式
		$V=IR$ (I: 電流)	$\lambda W=L$ (λ: 到着率)	$W=ZL$ (Z: サイクル時間†)
プロセス系		システム抵抗	システム信頼性	システム生産率
	効率	$R_{\mathrm{I}}=\sum R_i$ $R_{\mathrm{II}}=1/\sum G_i$	$R_{\mathrm{I}}=\prod R_i$ $R_{\mathrm{II}}=1-\prod \bar{R}_i$	$r_{\mathrm{I}}=\lambda\prod P_i$ $r_{\mathrm{II}}=\lambda-\prod B_i$
	コスト化	？	$EC=\sum EC_i$ (*)	$EC=\sum EC_i$ (**)

† $\lambda Z=\lambda(X+D)=M=1+\eta$（入出力公式）

* $EC_i=\alpha_1 Z+\alpha_2 R_i+\alpha_3 \bar{R}_i$

** $EC_i=\alpha_1 Z+\alpha_2 P_i+\alpha_3 B_i$

4.2　経済系の視点

次に，経済学の視点から知の式体系を見ると，表 3 が得られる．表3から，エネルギー，仕事量と資産との対応が見られることがわかる．ここで，作業サイクル時間 $Z(=X+D)$ は，収益 $ER(=EN+EC)$ に対応していることか注意される．表 2 はまだ不完全であるが，特に物理関係の利益化(？)はまだ未知と思われる．

また，これには会計分野のマトリックス会計[5]は含めていないが，単価(λ)と活動量(L)から総額(W)を関係づけるところは，リトルの公式との対応が見られる．

表３　経済系の式体系

	従来		松井の式系
	物理関係	OR関係	
利益系	利益化(？)	スループット会計	トラフィック会計
	？	$EN=min EN_i$	$EN=\rho p-\sum EC_i$
資産系	エネルギー（仕事量）	仕事量（プロセス資産）	フロー資産（仕事量？）
	$Pt(=IVt)$	$W(A)$？	$A(=W)=ZL$

* $EC=\alpha_1 L+\alpha_2 \rho P+\alpha_3(1-\rho P)+\alpha_4\eta$, $EN=ER-EC$

↔ $D(EN)=Z(ER)-X(EC)$：ロス or ムダ？

5. 式大系の周辺

5.1　流動数分析と在庫

流動数管理は，プロセス現象への入出力アプローチの一種で，入力・出力をそれぞれ時間的推移の累積値でとらえ，その差（流動数）とヨコの差（経過時間）に着目する手法である[9]（図 4）．ここで，流動数 L は（仕掛）タテの在庫であり，経過時間は待ち時間 W（リードタイム）とみなされる．このとき，両者にはこのとき待ち行列におけるリトルの公式($\lambda W=L$)と類似の関係が成り立っている．

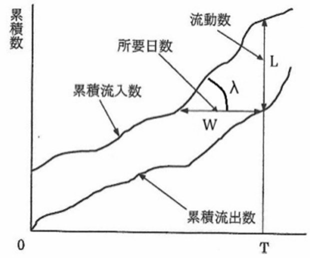

図４　流動数曲線の例（$\lambda W=L$）

これらは，もともと工場現場の停滞（所要日数）の管理手法として古くから工夫されてきたものである．伝統的には，平均所要日数 W の算定には，（5.1）式[10]が利用されている．今後は POS/POP データへの適用により，より広く生産や企業においても利用され，クラウド時代のリアルタイム経営等においての活躍が期待される[7][11]．

$$\text{平均所要日数} \fallingdotseq \frac{\text{毎日の流動数累計}}{\text{毎日の完成数累計}} \tag{5.1}$$

また，流動数分析は在庫評価式とも深いつながりがある[12]．松井の式からは，生産率 r を $r=1/Z$ として，流動数分析結果（L，W）は以下のような関係式より活用できる．

1）行列長の計算

ボトルネック率 r のとき，行列長さ L は

$$L=rW \tag{5.2}$$

である．

2）リードタイムの計算

ボトルネック率 r のとき，リードタイム W は

$$W=L/r \tag{5.3}$$

である．

3）計画在庫

計画期間 n（日）のとき，最終在庫 L は

$$L=nr \tag{5.4}$$

である．

4）在庫回転率

すべての在庫がＬのとき，回転率（inventory turns）は

$$r/L \quad (5.5)$$

である．

5.2　灰色理論モデル

システムの入出力に関する，時系列データの数式モデルを作成する理論の１つとして，主に自動制御の領域においては，1985年に中国の鄧聚龍により開発された灰色理論がある[9][13]．灰色理論では，既知な情報と未知な情報を含んだシステムを灰色システムと呼び，任意の灰色システムがＮ変数のモデルで表現できるとき，このモデルをGM（1, N）と呼ぶ．

流動数曲線の灰色モデルには，流入量と流出量をそれぞれ個別のシステムとして考えて変数が１つのGM（1, 1）モデルを組み合わせて表現する場合と，流入量と流出量の２変数から成るシステムとしてGM（1, 2）モデルで表現する場合との２通りがある．

灰色理論では，おおよその範囲のみで確かな値がわからない状態を灰色と呼ぶ．そして，完全にわかっている状態を白色，全くわからない状態を黒色と呼ぶ．灰色モデル式では，灰色と白色の情報を扱うことができる．

このような中，待ち系に対する流入量や流出量は明確にわかっている情報のため，白色である．しかし，流入や流出を予測化すると，灰色モデルが有効となり，多くの研究が行われている．

参考文献

〔1〕A. K. Erlang “Solution of Some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges”, Post Office Elec. Eng. J. , (1917), pp,189-197

〔2〕国沢清典，本間鶴千代監修 待ち行列研究会編，“応用待ち行列事典”，広川書店，(1971)

〔3〕John D. C. Little., ” A Proof for the Queuing Formula: L = λW ”, Opns. Res., 9 (1961), pp,383-387

〔4〕M, Matsui “CSPS Model : Look-Ahead Controls and Physics“, International Journal of Production Research, 43-10(2005), pp,2001-2025

〔5〕外山咊之, ”活動量と原価の統合理論 - Paired Costing から Triplet Costing へ” 原価計算研究, 35-1(2011-3), pp,23-38

〔6〕松井正之・新宮哲郎, ”SdSRPをもつコンベヤ生産ステーションの出力分布 – ある作業政策をもつコンベヤ生産ステーションでの作業サイクル時間分布(2)”，日本経営工学会春季研究発表会予稿集，（1976）, pp,239-240

〔7〕松井正之・鈴木久敏・椿広計・大場允晶・伊呂原隆，”経営高度化のための知の統合を目指して”，横幹，4-1(2010-4), pp,4

〔8〕M, Matsui ”Division of Work, Stochastic (re-)Balancing and Demand Speed : From Assembly Line toward Demand Chain”, Journal of Japan Industrial Management Association, 60-6E(2010-2), pp,324-330

〔9〕臼杵潤・北岡正敏・松井正之, ”流動数管理問題と灰色理論モデルについて”，電気通信大学紀要，14-1(2001-7), pp,13-20

〔10〕池永謹一, ”作業研究”，森北出版, (1977), pp,53-54

〔11〕松井正之, ”流動数管理システム，方法，及びプログラム”，特許第4706018号, 2011-3-25

〔12〕W.J.Hopp, M. L. Spearman, “Factory Physics - Foundations of Manufacturing Management”, Irwin/Mc - Graw - Hill, (2001), p, 225

〔13〕鄧聚龍 著，趙 君明・北岡 正敏 翻訳, “灰色理論による予測と意思決定”，日本理工出版会, (1999)