

構造信頼性解析の4次モーメント法

趙 衍剛*

盧 朝輝**

A Fourth Moment Method for Structural Reliability Analysis

Yan-Gang ZHAO*

Zhao-Hui LU**

1. はじめに

信頼性設計法では、想定した限界状態に対して適切な信頼性を確保することが目標となり、破壊確率を効率よく計算することが重要な命題である。破壊確率を計算するために、一次信頼性解析法(FORM)は一般的な手法として広く認識されているが¹⁾、信頼性指標は標準正規空間における原点から限界状態曲面への最短距離として定義され、限界状態関数の導関数を求めなければならず、設計点を求める時に局部収束などの問題点がある²⁾。

FORMの問題点改善を目的とし、2次信頼性解析法(SORM)³⁾、応答曲面法(RSA)⁴⁾、重点サンプリング(IS)⁵⁾、高次積率標準化(HOMST)⁶⁾及び一次近似3次モーメント法(FOTM)⁷⁾など多くの手法が提案されたが、設計点に関わる問題は線形計画法を用いる繰返し計算に固有な問題点であり、改善することは難しい。また、FORMでは限界状態関数の1次テーラー展開に基づいているため、その精度はテーラー展開近似の精度に依存する。

こうした FORM 設計点に関する問題点を回避するために、限界状態関数の確率モーメントを利用して破壊確率を計算するモーメント法が提案されている^{8,9,10,11)}。モーメント法では設計点の概念を用いないため、繰返し計算、導関数及び設計点に係わる問題が存在しないが、代わりにモーメントの情報だけを用いて信頼性指標を精度よく評価する必要がある。3次モーメント信頼性指標については既に簡便な計算式が提案されている¹²⁾が、その適用範囲以外では、無視できない誤差が生じる可能性があり、その場合には4次モーメントを用いる必要がある。4次モーメント信頼性指標についても現在までにい

くつかの考察が行われているが^{11,13,14,15)}、現状では信頼性指標のパラメータを計算するために非線形方程式を解いたり、積分を行う必要がある。そこで、本稿文では限界状態関数の4次モーメント標準化に基づいて信頼性指標の簡単計算式を提示し、その精度、適用性などを明らかにすることを目的とする。

2. モーメント法の概要

限界状態関数 $Z=G(\mathbf{X})$ に対して破壊確率 P_f は次式のように定義することができる。

$$P_f = P[Z = G(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_Z(z) dz = F_Z(0) \quad (1)$$

ここでは $f_Z(z)$ と $F_Z(z)$ はそれぞれ $Z=G(\mathbf{X})$ の確率密度関数(PDF)及び累積分布関数(CDF)である。

まず、限界状態関数の関数値 Z を次式により標準化する。

$$Z_s = \frac{Z - \mu_G}{\sigma_G} \quad (2)$$

ただし、 μ_G と σ_G は $Z=G(\mathbf{X})$ の平均値と標準偏差である。

$$\begin{aligned} P_f &= \text{Prob}[G \leq 0] = \text{Prob}[Z_s \sigma_G + \mu_G \leq 0] \\ &= \text{Prob}[Z_s \leq -\frac{\mu_G}{\sigma_G}] = \text{Prob}[Z_s \leq -\beta_{2M}] \end{aligned} \quad (3)$$

より、破壊確率は次式のように表される。

$$P_f = \int_{-\infty}^{-\beta_{2M}} f_{Z_s}(z_s) dz_s \quad (4)$$

ただし、

$$\beta_{2M} = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (5)$$

は2次モーメント(2M)信頼性指標である。

限界状態関数 $G(\mathbf{X})$ は複数の確率変数の関数であり、その関数値 Z の確率密度関数を求めることは一般に困難であるので、 Z の平均値、標準偏差、歪度、尖度などのモーメントを利用して式(1)及び(3)の破壊確率を求めることが

*教授 建築学科

Professor, Dept. of Architecture

** JSPS ポスドク研究員 建築学科

JSPS Postdoctoral Research Associate, Dept. of Architecture

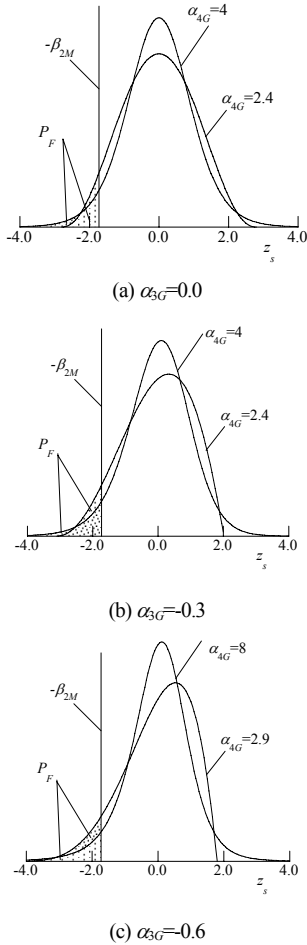


Fig. 1 Effects of the kurtosis on probability of failure

モーメント法の基本である。

限界状態関数の平均値と標準偏差のみを利用する方法は2次モーメント法である。Zが正規確率変数以外の場合には信頼性解析結果に誤差が大きいことは周知の事実であり、限界状態関数の歪度 α_{3G} は次式に示す範囲に収まらなければならない¹²⁾。

$$|\alpha_{3G}| \leq \frac{6r}{(\beta_{2M} - 1/\beta_{2M})} \quad (6)$$

ただし、 α_{3G} は $Z=G(\mathbf{X})$ の無次元3次モーメント、即ち、歪度である。rは許容する誤差である。

α_{3G} は式(6)の範囲を越えると、限界状態関数の歪度を考慮する必要がある。3次モーメント法については様々な手法が提案されており、筆者は次式の簡単な3次モーメント(3M)信頼性指標を提案している。

$$\beta_{3M} = \frac{1}{\alpha_{3G}} \left(3 - \sqrt{9 + \alpha_{3G}^2 - 6\alpha_{3G}\beta_{2M}} \right) \quad (7)$$

式(7)は限界状態関数の3次までのモーメントを利用しており、限界状態関数の非正規性が強くない場合には十分な精度を有する。また、 α_{3G} は次式の範囲に収める必要がある¹²⁾。

$$-120r/\beta_{2M} \leq \alpha_{3G} \leq 40r/\beta_{2M} \quad (8)$$

限界状態関数の4次モーメント α_{4G} が破壊確率に与える影響をFig.1に示す。限界状態関数の歪度 α_{3G} が同じであっても、 α_{4G} の違いによる破壊確率への影響が大きいことが分かる。即ち、破壊確率のより高精度な計算には限界状態関数の尖度を考慮する必要がある。

3. 分布システムによる4次モーメント法

4次までのモーメントを用いて確率変数の確率分布を表すことは確率統計学における大きな命題で、多くの変換式が提案されている¹⁶⁾。Gram-Charlier級数とEdgeworth級数は限界状態関数の累積分布関数(CDF)の展開の陽的で簡単な式として考察されているが、ほとんどの場合に適切な結果が得られないことがすでに判明している^{2,17)}。限界状態関数のPDFとして、Johnsonシステム、Burrシステム、Lambda分布等の分布システム (systems of frequency curves) を利用して適切な信頼性解析結果を得ている研究があるが^{8,17,18)}、これらのシステムのパラメータを得るには複雑な非線形方程式を解く必要があり、パラメータを簡単に計算できるPearsonシステムを用いるのが一般的である。

Pearsonシステムでは、式(2)で表す標準化限界状態関数 Z_s のPDF, f は次式の微分方程式を満足することによって求められる。

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dz_s} = -\frac{az_s + b}{c + bz_s + dz_s^2} \quad (9)$$

ただし、

$$a = 10\alpha_{4G} - 12\alpha_{3G}^2 - 18 \quad (10a)$$

$$b = \alpha_{3G}(\alpha_{4G} + 3) \quad (10b)$$

$$c = 4\alpha_{4G} - 3\alpha_{3G}^2 \quad (10c)$$

$$d = 2\alpha_{4G} - 3\alpha_{3G}^2 - 6 \quad (10d)$$

α_{3G} と α_{4G} の値によって、式(10)のパラメータが得られ、式(9)を解くことによって、 Z_s のPDF, f が得られる。式(4)によって破壊確率を計算することができ、4M信頼性指標は次式により表される。

$$\beta = -\Phi^{-1} \left[\int_{-\infty}^{-\beta_{2M}} f_{Z_s}(z_s) dz_s \right] \quad (11)$$

上述の方法では、パラメータが簡単に得られるが、 α_{3G} と α_{4G} の値の相対的な大きさにより、式(9)の解は十数種類が存在し、各種類のPDFの陽的表現を得るには数値積分が不可避であり、破壊確率を計算するにも数値積分が必要となる。

3.2 標準正規化関数による4M信頼性指標の一般式

標準化限界状態関数 Z_s と標準正規確率変数 U の関係を次式のように仮定する。

$$Z_s = S(U, \mathbf{M}) \quad (12a)$$

$$U = S^{-1}(Z_s, \mathbf{M}) \quad (12b)$$

ただし、 \mathbf{M} は $Z=G(\mathbf{X})$ の統計モーメントであり、 S^1 は S の逆関数で、限界状態関数の標準正規化関数ともいう。

Z_s の CDF を F とすると、次式が成り立つことが分かる。

$$F(Z_s) = \Phi(U) = \Phi[S^{-1}(Z_s, \mathbf{M})] \quad (13)$$

ただし、 Φ は標準正規確率変数の累積確率分布関数である。

式(3)により、破壊確率は次式のように表され、信頼性指標は式(15)のように計算される。

$$P_f = F(-\beta_{2M}) = \Phi[S^{-1}(-\beta_{2M}, \mathbf{M})] \quad (14)$$

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) = -S^{-1}(-\beta_{2M}, \mathbf{M}) \quad (15)$$

ここでは、 F は式(14)を導出することのみに使用しており、実際の信頼性指標の計算には用いる必要はない。即ち、モーメント信頼性指標は限界状態関数の標準正規化関数のマイナス $2M$ 信頼性指標の関数値のマイナスである。限界状態関数の標準正規化関数が求められることができれば、モーメント信頼性指標を計算することができる。

限界状態関数の標準正規化関数としては多くの式が提案されている^{19,20,21}。正規確率変数に近づくとき、次式の Cornish-Fisher 級数がよく用いられる。

$$Z_s = S(U) = U + \frac{1}{6}\alpha_{3G}(U^2 - 1) + \frac{1}{24}(\alpha_{4G} - 3)(U^3 - 3U) \quad (16)$$

式(16)は限界状態関数の正規性に要求がかなり厳しく、Fleishman²¹より、次式の簡単な多項式が提案されている。

$$Z_s = a_1 + a_2U + a_3U^2 + a_4U^3 \quad (17)$$

ただし、未定係数 a_1, a_2, a_3, a_4 は確定的な係数で、式(17)の左右両辺の4次までのモーメントが等しくするようにして得られる。

式(17)の逆関数を式(15)に代入すれば、4M信頼性指標が求められるが、未定係数 a_1, a_2, a_3, a_4 を決めるには次の複雑な連立非線形方程式を解く必要があり、大変煩雑となる。

$$2A_1A_2 = \alpha_{3G}^2 \quad (18a)$$

$$3A_1A_3 + 3A_4 = \alpha_{4G} \quad (18b)$$

ただし、

$$A_1 = 1 - a_2^2 - 6a_2a_4 - 15a_4^2 \quad (19a)$$

$$A_2 = 2 + a_2^2 + 24a_2a_4 + 105a_4^2 \quad (19b)$$

$$A_3 = 5 + 5a_2^2 + 126a_2a_4 + 675a_4^2 \quad (19c)$$

$A_4 = a_2^4 + 20a_2^3a_4 + 210a_2^2a_4^2 + 1260a_2a_4^3 + 3465a_4^4$ (19d) である。

3.3 陽的4次モーメント信頼性指標の提示

式(18)と(19)のような複雑な非線形方程式を

解くことを回避するために、次式の標準正規化関数²²)を用いる。

$$Z_s = -l_1 + k_1U + l_1U^2 + k_2U^3 \quad (20)$$

ただし、

$$l_1 = \frac{\alpha_{3G}}{6(1+6l_2)}, \quad l_2 = \frac{1}{36} \left(\sqrt{6\alpha_{4G} - 8\alpha_{3G}^2} - 14 - 2 \right) \quad (21a)$$

$$k_1 = \frac{1-3l_2}{(1+l_1^2-l_2^2)}, \quad k_2 = \frac{l_2}{(1+l_1^2+12l_2^2)} \quad (21b)$$

式(20)は陽的表現を保ちながらも式(16)より適切な標準正規化結果を得ることができる。なお、式(20)は分布形が分からない確率変数を標準正規変換するために提案された²²)のものであり、ここでは、限界状態関数に適用し、限界状態関数の4次までのモーメント情報を利用して破壊確率を求める。

式(20)と式(16)と比較すると、式(16)の係数 l_1, k_1 及び k_2 は次式で表される。

$$l_1 = \frac{\alpha_{3G}}{6}, \quad k_1 = \frac{1}{8}(11 - \alpha_{4G}), \quad k_2 = \frac{1}{24}(\alpha_{4G} - 3) \quad (22)$$

Fig. 2 に α_{3G} と α_{4G} が次式に示す4つの関係を満足するときの式(20)と式(16)の係数を示す。これらの関係を満足すると、 α_{3G} が 0 に近づくとき、 $\alpha_{4G} \rightarrow 3$ となり、限界状態関数の正規性が強くなることが分かる。

$$\alpha_{4G} = 3 - \alpha_{3G}^2 \quad (23a)$$

$$\alpha_{4G} = 3 \quad (23b)$$

$$\alpha_{4G} = 3 + \alpha_{3G}^2 \quad (23c)$$

$$\alpha_{4G} = 3 + 2\alpha_{3G}^2 \quad (23d)$$

Fig. 2 により、 $\alpha_{3G} \rightarrow 0$ と $\alpha_{4G} \rightarrow 3$ 、即ち、限界状態関数が正規関数に近づくとき、式(20)は式(16)で近似することができることが分かる。

ここで、式(20)により、4M信頼性指標を導出する。式(20)の逆関数を式(15)に代入することにより、次式の4M信頼性指標が得られる。

$$\beta_{4M} = Dp - \frac{1}{D} + l \quad (24a)$$

ただし、

$$D = \sqrt[3]{2 \left(\sqrt{q^2 + 4p^3} - q \right)^{-1/3}}, \quad q = l(2l^2 - k - 3) + \beta_{2M} / k_2$$

$$p = k/3 - l^2, \quad k = k_1/k_2, \quad l = l_1/k_2/3 \quad (24b)$$

式(24)は本論文で提示する4M信頼性指標である。限界状態関数が正規関数に近づくとき、式(22)を代入すること

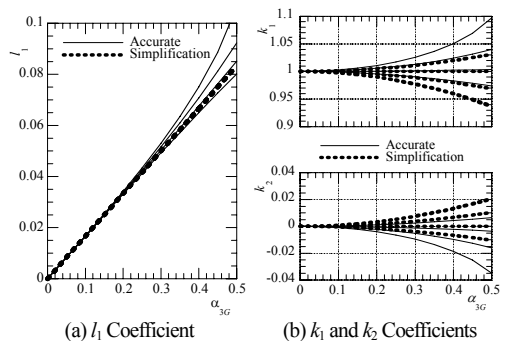


Fig. 2 Coefficients changed with skewness and kurtosis

により、更に簡単化することができる。

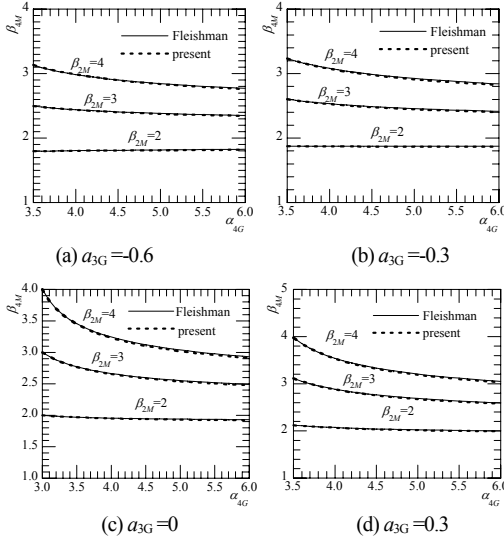


Fig. 3 Comparisons between simple and accurate reliability indices

3.4 4次モーメント信頼性指標の考察

提示した4M信頼性指標を考察するために、 $\alpha_{3G} = -0.6, -0.3, 0.0, 0.3$ の場合に4M信頼性指標が α_{4G} の変化により受ける影響をFig. 3に示す。図中、細い実線はFleishman式による4M信頼性指標の正確値であり、太い点線は本論文で提示した4M信頼性指標である。考察範囲内では、提示した4M信頼性指標は厳密な4M信頼性指標を精度よく追従していることが分かる。

3.5 限界状態関数の確率密度関数

式(20)より一つの確率変数として、限界状態関数Zの確率密度関数は次のように求められる。

$$F_Z(z) = \Phi(u) \tag{25}$$

$$f_Z(z) = \frac{\phi(u)}{\sigma(k_1 + 2l_1u + 3k_2u^2)} \tag{26}$$

ただし、

$$u = S^{-1}\left(\frac{z - \mu_G}{\sigma_G}\right) = \frac{1}{D'} - D'p - l \tag{27}$$

$$D' = \sqrt[3]{2\left(\sqrt{q^2 + 4p^3} - q'\right)^{-1/3}}, \quad q' = l(2l^2 - k - 3) + \frac{z - \mu_G}{k_2\sigma_G}$$

いうまでもなく、 $z=0$ のとき、 $q=q'$ 、 $D=D'$ となり、 u の絶対値は4M信頼性指標となる。

4. 計算例

例題1 Fig. 4に示す崩壊機構の限界状態関数は次式で表わ

される。

$$G(\mathbf{X}) = X_1 + 4X_2 + X_3 - 5X_4 - 5X_5 \tag{28}$$

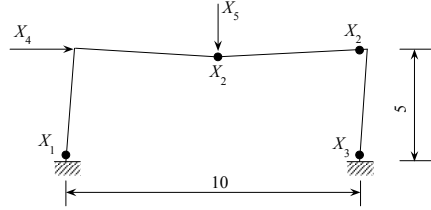


Fig. 4 A mechanism of a one-story one-bay frame

ただし、 X_i は互いに独立な対数正規確率変数であり、平均値と変動係数はそれぞれ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 120, \mu_4 = 50, \mu_5 = 40, V_1 = V_2 = V_3 = 0.1, V_4 = V_5 = 0.3$ で、歪度と尖度はそれぞれ $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = 0.301, \alpha_{34} = \alpha_{35} = 0.927$ である。FORM 信頼性指標は $\beta_F = 2.297$ と得られ、対応する破壊確率は $P_f = 1.08 \times 10^{-2}$ となる。

付録の式(34)より限界状態関数の4次までのモーメントは $\mu_G = 270, \sigma_G = 108.706, \alpha_{3G} = -0.434, \alpha_{4G} = 3.506$ となる。

式(7)により3M信頼性指標は $\beta_{3M} = 2.205$ となり、対応する破壊確率は $P_f = 1.374 \times 10^{-2}$ となる。

式(21)および式(24b)により、各係数は次のように得られる。

$$l_1 = -0.06826, l_2 = 0.00979, k_1 = 0.966, k_2 = 0.00973, k = 99.265, l = -2.337, p = 27.625, q = 468.665, D = 0.289$$

式(24a)により4M信頼性指標は $\beta_{4M} = 2.195$ となり、対応する破壊確率は $P_f = 1.410 \times 10^{-2}$ となる。

サンプル数が500,000のMonte-Carlo Simulation (MCS)の計算結果は破壊確率が $P_f = 1.422 \times 10^{-2}$ 、信頼性指標が $\beta = 2.191$ であり、4M信頼性指標の結果とほぼ一致していることが分かる。

例題2 Fig. 5に示す両端ピンの部材の座屈信頼性を評価する。限界状態関数は次式で表す。

$$G(\mathbf{X}) = \frac{\pi^2 EI}{H^2} - D - L \tag{29}$$

ただし、 E, I, H, D と L はそれぞれヤング率、断面2次モーメント、柱の長さ、固定荷重及び積載荷重であり、確率特性はTable 1に示す。FORM信頼性指標は $\beta_F = 2.918$ として得られ、対応する破壊確率は $P_f = 1.760 \times 10^{-3}$ となる。

$Y = 1/H^2, Z = EIY$ とし、 $G(\mathbf{X}) = Z - D - L$ となる。式(38)により、 Y の4次までのモーメントは次のように得られる。

$$\mu_Y = 0.0630, \sigma_Y = 0.00629, \alpha_{3Y} = -0.302, \alpha_{4Y} = 3.162$$

式(36)により、 Z の4次までのモーメントは次のように

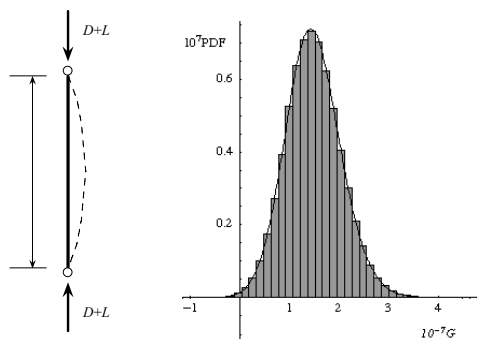


Fig. 5 A buckling problem Fig. 6 Histogram and PDF in Ex. 2

Table 1 Properties of Random Variables in Ex. 2

確率変数	平均値	標準偏差	分布
E	$2 \times 10^{11} \text{N/m}^2$	$2 \times 10^{10} \text{N/m}^2$	正規分布
I	$2.24 \times 10^4 \text{m}^4$	$2.24 \times 10^5 \text{m}^4$	正規分布
H	4m	0.2m	対数正規分布
D	$9 \times 10^6 \text{N}$	$1.8 \times 10^6 \text{N}$	対数正規分布
L	$4 \times 10^3 \text{N}$	$2 \times 10^3 \text{N}$	グンベル分布

得られる。

$$\mu_Z = 2.821 \times 10^6, \quad \sigma_Z = 491376, \quad \alpha_{3Z} = 0.407, \quad \alpha_{4Z} = 3.290$$

式(34)により、限界状態関数 $G(\mathbf{X})$ の 4 次までのモーメントは次のように得られる。

$$\mu_G = 1.484 \times 10^7, \quad \sigma_G = 5.546 \times 10^6, \quad \alpha_{3G} = 0.1978, \quad \alpha_{4G} = 3.217$$

式(5)により 2M 信頼性指標は $\beta_{2M} = 2.676$ として得られ、対応する破壊確率は $P_f = 3.722 \times 10^3$ となる。

式(7)により 3M 信頼性指標は $\beta_{3M} = 2.925$ として得られ、対応する破壊確率は $P_f = 1.720 \times 10^3$ となる。

式(21)および式(24b)により、各係数は次のように得られる。

$$l_1 = 0.0317, \quad l_2 = 0.00651, \quad k_1 = 0.980, \quad k_2 = 0.00649$$

$$k = k_1 / k_2 = 150.770, \quad l = 1.628, \quad p = 47.606,$$

$$q = 170.190, \quad D = 0.1579$$

式(24a)により 4M 信頼性指標は $\beta_{4M} = 2.808$ として得られ、対応する破壊確率は $P_f = 2.490 \times 10^3$ となる。

サンプル数が 500,000 の MCS の計算結果として $P_f = 2.526 \times 10^3$, $\beta = 2.804$ が得られ、4M 信頼性指標の結果と一致していることが分かる。なお、MCS で得られたヒストグラムと式(26)で得られた確率密度関数の比較を Fig. 6 に示し、両者が精度よく対応していることが分かる。

例題 3 Fig. 7 に示すラーメンの A 点の水平変位の信頼性を評価する。限界状態関数は次式で表す。

$$G(\mathbf{X}) = \Delta_A - \frac{(D + L_S + S)HL^3}{12EI} \quad (30)$$

ただし、 Δ_A は A 点の許容変位、 D 、 L と S はそれぞれ固定

荷重、積載荷重及び積雪荷重、 E 、 I 、 H と L はそれぞれヤング率、断面 2 次モーメント、階高及びスパン長さであり、確率特性は Table 2 に示す。

FORM より、信頼性指標は $\beta_f = 3.740$ となり、対応する破壊確率は $P_f = 9.21 \times 10^5$ となる。

$X = D + L_S + S$, $Y = L^3$, $Q = 1/E$, $W = 1/I$, $Z = XHYQW$, とし、 $G(\mathbf{X}) = \Delta_A - Z/12$ となる。 X , Y , Q , W , Z , G の 4 次までのモーメントは Table 3 に示す。

式(5)により 2 次モーメント信頼性指標は $\beta_{2M} = 4.396$ となり、対応する破壊確率は $P_f = 5.513 \times 10^6$ となる。

式(7)により 3 次モーメント信頼性指標は $\beta_{3M} = 3.859$ が得られ、対応する破壊確率は $P_f = 5.697 \times 10^5$ となる。

式(21)および式(24b)により、各係数は次のように得られる。

$$l_1 = -0.0458, \quad l_2 = 0.00745, \quad k_1 = 0.9756, \quad k_2 = 0.00743$$

$$k = k_1 / k_2 = 131.25, \quad l = -2.0535, \quad p = 39.53, \quad q = 849.76, \quad D = 0.2458$$

式(24a)により 4M 信頼性指標は $\beta_{4M} = 3.715$ となり、対応する破壊確率は $P_f = 1.015 \times 10^4$ となる。

サンプル数が 1,000,000 の MCS の計算結果として $P_f = 1.15 \times 10^4$, $\beta = 3.684$ が得られ、4M 法の結果と一致していることが分かる。なお、MCS で得られたヒストグラムと式(26)で得られた確率密度関数の比較を Fig. 8 に示し、両者が精度よく対応していることが分かる。

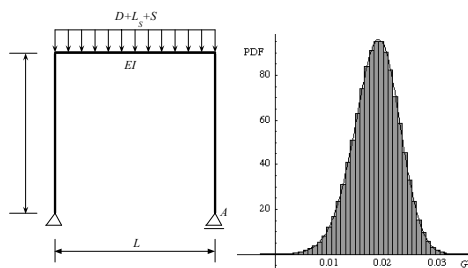


Fig. 7. A frame Fig. 8 Histogram and PDF in Ex. 3

Table 2 Properties of Random Variables in Ex. 3

確率変数	平均値	標準偏差	分布
A	3cm	0.3cm	正規分布
E	$2 \times 10^{11} \text{N/m}^2$	$2 \times 10^{10} \text{N/m}^2$	対数正規分布
I	$6.06 \times 10^4 \text{m}^4$	$3.03 \times 10^5 \text{m}^4$	対数正規分布
H	3m	0.15m	対数正規分布
L	6m	0.3m	対数正規分布
D	$2 \times 10^3 \text{N/m}$	$4 \times 10^3 \text{N/m}$	正規分布
L_S	$2 \times 10^3 \text{N/m}$	$8 \times 10^3 \text{N/m}$	対数正規分布
S	$3 \times 10^3 \text{N/m}$	$1.5 \times 10^3 \text{N/m}$	グンベル分布

例題 4 次の二つの限界状態関数に対応する信頼性を評価する。

$$G(\mathbf{X}) = 9 + (X_1 - 10)^2 - X_2 \quad (31a)$$

$$G(X) = 9 - (X_1 - 10)^2 - X_2 \quad (31b)$$

ただし、 X_1, X_2 は相互独立の正規確率変数であり、平均値と変動係数をそれぞれ $\mu_1=10, \mu_2=5, V_1=0.1, V_2=0.4$ とする。

式(31a)に対して、FORM 信頼性指標は Fig. 9 に示すように $\beta_F=2$ となり、対応する破壊確率は $P_F=0.0228$ となる。本論文の提案手法で解析すると次のような結果が得られる。

$$\begin{aligned} \mu_G &= 5, \quad \sigma_G = 2.45, \quad \alpha_{3G} = 0.5443, \quad \alpha_{4G} = 4.3333 \\ \beta_{4M} &= 2.2266, \quad P_F=0.01299 \end{aligned}$$

サンプル数が 100,000 の MCS の計算結果は $P_F=0.0125$, $\beta=2.242$ であり、4M 法の結果とはほぼ一致していることが分かる。また、この例題では限界状態関数の非線形性が強いいため、FORM の結果に誤差が大きいことも分かる。

式(31b)に対して、初期計算点の選択によって Fig. 10 に示すように三つの設計点が得られ、対応する三つの FORM 信頼性指標は $\beta_{F1}=1.732, \beta_{F2}=1.732, \beta_{F3}=2$ となり、破壊確率を求める事は困難となる。本論文の提案手法で解析すると限界状態関数の4次までのモーメントは簡単に求められ、信頼性指標も式(24)により次のようになる。

$$\begin{aligned} \mu_G &= 3, \quad \sigma_G = 2.45, \quad \alpha_{3G} = -0.544, \quad \alpha_{4G} = 4.333 \\ \beta_{4M} &= 1.245, \quad P_F=0.1067 \end{aligned}$$

サンプル数が100,000のMCSの計算結果として $P_F=0.1046$, $\beta=1.258$ が得られ、4M法の結果とはほぼ一致していることが分かる。

Table 3 Moment computation for Ex. 3

関数	式	μ	σ	α_3	α_4
$X = D + L_S + S$	(34)	2500	4346.3	0.055	3.038
$Y = L^3$	(38)	217.64	32.81	0.456	3.371
$Q = 1/E$	(38)	5.05×10^{-12}	5.05×10^{-13}	0.301	3.162
$W = 1/I$	(38)	1654.3	0.05	0.150	3.040
$Z = XHYQW$	(36)	0.1364	0.0359	0.658	3.805
$G(X) = \Delta_1 - \frac{Z}{12}$	(34)	0.0186	0.0042	-0.232	3.201

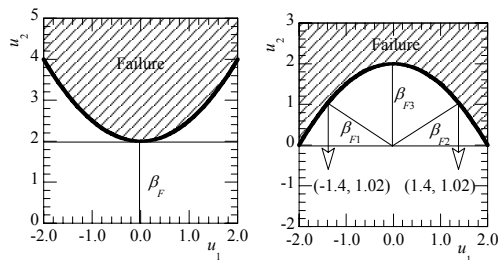


Fig. 9 Limit state of Eq. 31a **Fig. 10** Limit state of Eq. 31b

例題 5 圧縮を受ける円型断面圧縮材の信頼性を評価する。設計の基準によって、四つの限界状態関数は次式で

Table 4 Results of Moment methods of Ex. 5

G	μ_G	σ_G	α_{3G}	α_{4G}	β_{2M}	β_{3M}	β_{4M}
G_1	8.6×10^6	2.4×10^6	-0.198	3.689	3.584	3.265	2.975
G_2	21394.5	5240.3	-0.603	4.329	4.083	3.172	2.963
G_3	88.8	24.5	-0.454	3.467	3.628	3.016	2.957
G_4	271.7	66.5	-0.605	4.332	4.085	3.172	2.963

定義される。

$$G_1(X) = \frac{1}{4} \pi D^2 F_y - N \quad (\text{圧縮荷重基準}) \quad (32a)$$

$$G_2(X) = \frac{1}{4} \pi D^2 - N/F_y \quad (\text{断面積基準}) \quad (32b)$$

$$G_3(X) = D - \sqrt{\frac{4N}{\pi F_y}} \quad (\text{直径基準}) \quad (32c)$$

$$G_4(X) = F_y - \frac{4N}{\pi D^2} \quad (\text{応力基準}) \quad (32d)$$

ただし、 D, F_y, N は相互独立な対数正規であり、平均値はそれぞれ $\mu_D=200\text{mm}, \mu_{F_y}=400\text{N/mm}^2$ と $\mu_N=4 \times 10^6\text{N}$ であり、標準偏差はそれぞれ $\sigma_D=10\text{mm}, \sigma_{F_y}=40\text{N/mm}^2$ と $\sigma_N=1.6 \times 10^6\text{N}$ である。

各限界状態関数に対して、4次までのモーメント及び2、3、4次モーメント信頼性指標はTable 4に示す。Table 4より、限界状態関数の違いによって、2M信頼性指標に大差があるが、4M信頼性指標はほぼ一定であることが分かる。

5. まとめ

- 1)限界状態関数の4次モーメント標準化に基づく4M信頼性指標を提示した。提示式は陽的式で、従来指標における積分や、非線形方程式を解くことを回避した。
- 2)提示式が3M信頼性指標の精度を改善し、厳密式に十分な精度で追従している。
- 3)限界状態関数の違いによって、2M信頼性指標に大差があるが、提示した4M信頼性指標はほぼ一定である。

参考文献

- 1) Bjerager, P.: "Methods for Structural Reliability Computation.", *Reliability Problems: General Principles and Applications in Mechanics of Solid and Structures*, ed. by F. Casciati, Springer Verlag Wien-New York, 89-136,1991.
- 2) 趙 衍剛, 小野徹郎: "構造信頼性解析における3、4次モーメント法の考察", 日本建築学会構造系論文集, No.530, 21-28, 2000.4.
- 3) Tvedt, L.: "Distribution of quadratic forms in the normal space - application to structural reliability." *Journal of Engrg. Mech., ASCE*, 116(6), 1183-1197, 1990.
- 4) Faravelli, L.: "Response surface approach for reliability analysis." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 115(12), 2763-2781, 1989.
- 5) Mori, Y. and Ellingwood, B. R.: "Time-dependent system reliability

- analysis by adaptive importance sampling”, *Structural Safety*, 12(1),59-73, 1993.
- 6) 小野徹郎, 井戸田秀樹: “高次積率標準化手法の提案とそれに基づく信頼性指標の設定”, 日本建築学会構造系論文報告集, No.359, 43-49, 1986.1.
- 7) Tichy, M.: “First-order third-moment reliability method.” *Structural Safety*, 16, 189-200, 1994.
- 8) Grigoriu, M. and Lind, N.C.: “Optimal estimation of convolution integrals”, *J. of Eng. Mech., ASCE*, 106(6), 1349-1364, 1980.
- 9) 米澤政昭等: 1次元4次モーメント近似による構造物の信頼性解析, 材料, Vol. 31, No. 351, 82-88, 1982.
- 10) Ugata, T. and Moriyama, K.: “Simple method of evaluating the failure probability of a structure considering the skewness of distribution.” *Nuclear Engineering and Design*, 160, 307-319, 1996.
- 11) Zhao, Y.G and Ono, T.: “Moment methods for structural reliability.”, *Structural Safety*, Vol. 23, No. 1, 47-75, 2001.
- 12) Zhao, Y.G, Lu, Z.H., and Ono, T.: “A simple third-moment method for structural reliability.”, *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*, 5(1), 129-136, 2006.
- 13) Winterstein, S. R.: “Nonlinear vibration models for extremes and fatigue.” *J. Engng. Mech., ASCE*, 114(10), 1772-1790, 1988.
- 14) Hong, H. P. and Lind, N. C.: “Approximation reliability analysis using normal polynomial and simulation results.” *Struct. Safety*, 18(4), 329-339, 1996.
- 15) Chen, X. and Tung, Y. K.: “Investigation of polynomial normal transform.” *Struct. Safety*, 25(4), 423-455, 2003.
- 16) Stuart, A. and Ord, J. K.: *Kendall's advanced theory of statistics*. London, Charles Griffin & Company LTD., Vol.1, 210-275, 1987.
- 17) Hong, H. P.: “Point-estimate moment-based reliability analysis.” *Civil Engineering System*, 13, 281-294, 1996.
- 18) Zhao, Y.G, Lu, Z.H., and Ono, T.: “4P-Lambda distribution and its application to structural reliability.”, *Journal of Structural & Construction Engineering, AII, No.604*, 61-67, 2006.
- 19) Withers, C. S.: “Asymptotic expansions for distributions and quantiles with power series cumulants.”, *J. R. Statist. Soc. B*, 46, 389-396, 1984.
- 20) Zhao, Y.G & Ono, T.: “Third-moment standardization for structural reliability analysis.”, *Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126*, No. 6, 724-732, 2000.
- 21) Fleishman, A. L.: “A method for simulating non-normal distributions.” *Psychometrika*, 43(4), 521-532, 1978.
- 22) Zhao, Y.G & Lu, Z.H. “Fourth-moment standardization for structural reliability assessment.”, *Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 133*, No. 7, 916-924, 2007.
- 23) Zhao, Y.G and Ono, T.: “New point estimates for probability moments.” *J. Engng. Mech., ASCE*, 126(4), pp433-436, 2000.

付録：限界状態関数のモーメント計算

一般に限界状態関数のモーメントは点推定法²³⁾などにより得られる。ここで、本稿で用いている互いに独立な確率変数の和、積などの常用される関数のモーメント計算式を要約する。

付1、相互独立確率変数の和のモーメント

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (33)$$

の4次までのモーメントは次のように得られる。

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \quad (34a)$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \quad (34b)$$

$$\alpha_{3Y} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{3i} a_i^3 \sigma_i^3 \right) / \sigma_Y^3 \quad (34c)$$

$$\alpha_{4Y} = \frac{1}{\sigma_Y^4} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{4i} a_i^4 \sigma_i^4 + 6 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n a_i^2 a_j^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \right) \quad (34d)$$

ただし、 $X_i, i=1, \dots, n$ は相互独立確率変数であり、 $a_i, i=1, \dots, n$ は確定的係数である。 $\mu_i (\mu_i), \sigma_i (\sigma_i), \alpha_{3i} (\alpha_{3i})$ と $\alpha_{4i} (\alpha_{4i})$ はそれぞれ $X_i (Y)$ の平均値、標準偏差、歪度及び尖度である。

付2、相互独立確率変数の積のモーメント

$$Y = \prod_{i=1}^n X_i \quad (35)$$

の4次までのモーメントは次のように得られる。

$$\mu_Y = \prod_{i=1}^n \mu_i \quad (36a)$$

$$\sigma_Y^2 = \mu_Y^2 \left[\prod_{i=1}^n (1 + V_i^2) - 1 \right] \quad (36b)$$

$$\alpha_{3Y} = \left[\prod_{i=1}^n (\alpha_{3i} V_i^3 + 3V_i^2 + 1) - 3 \prod_{i=1}^n (1 + V_i^2) + 2 \right] / V_Y^3 \quad (36c)$$

$$\alpha_{4Y} = \frac{1}{V_Y^4} \left[\prod_{i=1}^n (\alpha_{4i} V_i^4 + 4\alpha_{3i} V_i^3 + 6V_i^2 + 1) - 4 \prod_{i=1}^n (\alpha_{3i} V_i^3 + 3V_i^2 + 1) + 6 \prod_{i=1}^n (1 + V_i^2) - 3 \right] \quad (36d)$$

ただし、 V_i と V_Y はそれぞれ X_i と Y の変動係数である。

付3、対数正規確率変数の任意乗のモーメント

$$Y = X^a \quad (37)$$

の4次までのモーメントは次のように得られる。

$$\mu_Y = \mu_X^a (1 + V_X^2)^{\frac{a(a-1)}{2}} \quad (38a)$$

$$V_Y^2 = (1 + V_X^2)^{a^2} - 1 \quad (38b)$$

$$\alpha_{3Y} = 3V_Y + V_Y^3 \quad (38c)$$

$$\alpha_{4Y} = 3 + 16V_Y^2 + 15V_Y^4 + 6V_Y^6 + V_Y^8 \quad (38c)$$

ただし、 a は任意の実数である。