総説

き裂を有する材料の破壊と応力拡大係数について

伊藤　勝悦*

Stress intensity factors valid for linear elastic fracture mechanics

Shouetsu ITOU*

1．はじめに

筆者は1968年3月に秋田大学鉱山学部機械工学科を卒業して，4 月から東北大学工学部機械工学第 2 学科の弾性及び固体の力学講座(渥美教授研究室)の助手として勤めさせて戴いた．渥美先生は材料力学・設計製図・弾性論の授業科目を担当されていたが，専門は応力解析であり，研究内容は応用数学の範疇に入っていた．恒例によって修士の 1 年生は，Wärmespannungen[1]を教材にして輪講を行っていたが，筆者の参加も快く認めて戴いた．渥美研究室には 5 年間在籍したが，この頃の助手・博士課程修了者の多くのは，その後，大学教員として就職したが，全員が研究分野を変えないで，応力解析を行ってきた．

材料力学を専門とする多くの国内の研究者は弾性論から離れてしまったように見受けられる．このため，国内の弾性力学の研究者数は今では 15 名程度になってしまっている．国際学術雑誌には，弾性力学を用いて解いた研究論文が多数掲載されているが，やや，国内の研究者による論文が少なくなってきている．本報告では，筆者がき裂の問題を研究テーマにしていった過程を紹介し，その後，国内の弾性力学の研究者の一人として，これまでに行ってきたき裂の応力解析の内容について総論的に述べる．

2．応力解析

2.1 力とはなにか

例えば，経済学部の学生に，「私の体重は 46.8 kg ですが，この時の kg は質量ですか重量ですか」と筆者に聞かれた場合，理解してもらえるように説明する事は難しい．「それは力であって，より適切には(?)，46.8×9.80=458.6 N [ニュートン]の力で地球が貴方を引いている事を示しているのです」と言う事になるが，益々，分からなくなる事は間違いない．

通常，何のためらいもなく，力の言葉を多用している．しかし，力について説明する事は難しい．力とは物体を動かしたり，物体を変形させたり出来るものと，一応，説明する事が多い．お金の単位は 1 円であるが，1 円を 250 個集めれば，生協でカレーライスが食べられる．1 円の能力はこれ程度の価値である．さて，力の単位について説明する．1000cc の牛乳パックを手で持った時，手は地球から引かれる．この時，手が押される力(重さ)が約 9.8 [N(ニュートン)]である．水 102.0 cc を紙コップに入れて手で持った時，手が押される力が約 1.0 N である．比較する事は無意味であるが，どちらかと言えば 1 円と同様に 1 N はささやかな大きさの力である．

2.2 応力について

材料の中に，図 1 に示すように，大きさ ΔA (デルタエイ)の微小面積を考える．この面を，ΔF の力が通過している場合を考えて，図 2 に示すように ΔF を面に垂直方向な力

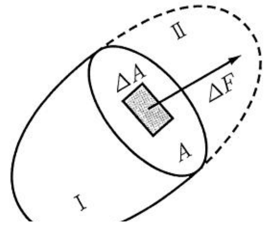
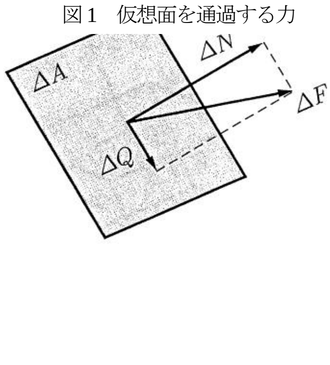


図 1　仮想面を通過する力



*教授　機械工学科
Professor, Dept. of Mechanical Engineering

図2　仮想面の力の分解

ΔN と面に平行な力 ΔQ に分解する．この時，次式で定義される σ (シグマ)と τ (タウ)をそれぞれ，垂直応力，せん断応力と言う．

$$\sigma = \frac{\Delta N}{\Delta A}, \quad \tau = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \tag{1}$$

垂直応力 σ，せん断応力 τ の他に，合応力 p が定義されているが，ここでは説明を省略する．

材料が壊れるための条件は，5 種類程度ある．材料の特性や荷重のかかり方によって材料の破壊の条件は異なる．例として，最も分かりやすい場合を考えてみる．コピー用紙1枚を両手で持って引けば，どこかで破れる．これは，破れた場所の垂直応力 σ が，コピー用紙の引張強さ σ_f に達したので，破れた(壊れた)事になる．この場合の破壊の条件を式で示せば

$$\sigma > \sigma_f \tag{2}$$

となる．引張強さ σ_f は材料が決まれば決まる値であり材料定数である．この値は実験を行う事によって，コピー用紙，鉄，エポキシ樹脂，アルミ合金，セラミックスなど，種々の材料に対して求める事が出来る(既に求められている)．

材料の破壊を防ぐためには，材料の引張強さ σ_f の値を求めておく必要がある．その他に，実際に材料に発生する応力 σ を求めなければならない．この応力 σ を求めるためには，偏微分方程式を数学的に解かなければならないが，この作業を応力解析と言う．

3．モーメント応力理論

材料の中に微小な部分(微小要素と言う)を考えて，力の釣合い式を求め，この式から偏微分方程式を導く．ところで，材料に小さな粒や空孔が多数含まれる場合，材料を均質材として取り扱うためには，材料内にとる要素の大きさを微小にする事は出来ない．少なくとも，要素の大きさをこれらの粒子や空孔の直径の 10 倍程度以上にする必要がある．

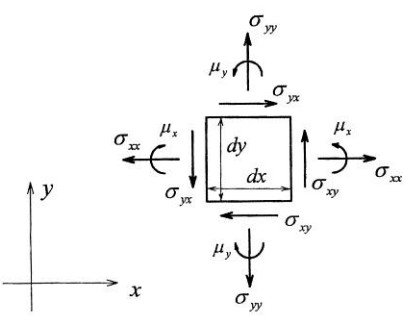


図3　微小要素の応力

要素の大きさを無限小に出来ないため，要素には図3に示すように，垂直応力 σ_{xx}, σ_{yy}，せん断応力 σ_{xy}, σ_{xy} の他に，モーメント応力 μ_x, μ_y も導入しなければならない[2]{式(1)ではせん断応力の記号に τ を用いたが，ここでは σ を用いている．下付の添え字については，特に説明しない．}．要素にモーメント応力をも考慮する理論をモーメント応力理論と言う．この理論には，材料定数として長さの次元を持つ l が新たに追加される．筆者が研究室の助手として勤めた時，渥美先生は，これまでに解かれた応力解析問題にモーメント応力理論を適用して再吟味する研究を行なっていた．

粒状物体にモーメント応力理論を適用するのであれば，新しい材料定数 l の値が既に求められている必要がある．しかし，l の値はどのような材料に対しても与えられていなかった．このため，l の値を変えて数値計算を行い，応力・変位の l による依存性を提示していた．筆者もモーメント応力理論を用いて数編の論文を学術雑誌に掲載した．渥美研究室の助手として勤務して直ぐに分かった事がある．それは，渥美研究室では，研究論文を欧米の一流の学術雑誌に載せる事に主眼が置かれていた事である．モーメント応力理論についての研究も，この目的のための延長線上で行われていた可能性がある．

4．剛体押し付け問題とシュミット法について

修士課程の学生と新任助手の筆者は，しばしば教授室に呼ばれて研究テーマ等について種々指導された(博士課程の院生と先輩助手には研究指導はほとんど行われなかった)．ある日，教授室に呼ばれて渡されたコピーは，図4に示すように，剛体押し付けによる丸軸の接触応力を求めている論文[3]であった．記憶が薄れているので正確ではないが，多分，Spiller の解いた問題にモーメント

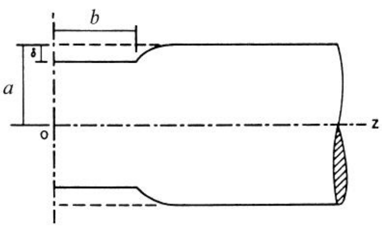


図４　丸軸の剛体帯による押し付け

応力理論を適用するように指示されたと思っている．

第一段階として，Spiller が与えている接触応力を求める必要がある．混合境界条件にフーリェ変換を適用して積分方程式を導き，この積分方程式を解くために接触応力を式(3)に示すようにチビシェフ級数 $T_n(z)$ に級数展開する．

$$\sigma_{rr}^{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{T_n(z)}{\sqrt{1-z^2}} \quad \text{for} \quad -b < z < b \qquad (3)$$
$$= 0 \qquad \text{for} \quad b < |z|$$

ここで，σ_{rr}^{a} ：接触応力，a_n ：未定係数，$2b$ ：パンチ幅．また，$(r,\ \theta,\ z)$ は円柱座標である．式(3)のように級数展開すれば，結局，連立積分方程式は次の形に帰結する．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(\mathrm{z}) = \mathrm{u(z)} \quad \text{for} \quad -b < z < b \qquad (4)$$

式(4)は未定係数 a_n についてシュミット法を適用して求める事が出来る[4]．シュミット法のプログラム作成に手間取り，Spiller が与えている接触応力を求めるまで，約半年かかった．この間，渥美先生は，先生の計算の手伝いをさせる訳でもなく，何も言われなかった．シュミット法を使いこなせるようになったので，板の押し付け問題にモーメント応力理論を適用して 2，3 の問題を解き，数編の論文を執筆する事が出来た．

５．き裂を有する材料の応力解析

フーリェ変換を用いて応力解析を行っていたが，この時，Professor I. N. Sneddon の Fourier Transforms [5]を常に手元に置いていた．この著書の 1 節で，き裂を有する材料の応力がフーリェ変換の適用例として解かれていた．材料の破壊に関連してき裂は重要であると説明されていたが，筆者はき裂について特に関心を持たなかった．その後，Sih and Loeber が，調和振動応力波がき裂に入射する時の応力解析を行った[6]．この論文を読んだ時，筆者はき裂の応力解析よりも，積分方程式を用いて解かれたき裂の論文が Q. Appl. Math. に掲載された事の方に興味を引かれた．しかし，この頃は，渥美先生の球かを有する異方性弾性体の応力集中問題の解析と数値計算のお手伝いを主として行っていたので，他の研究テーマに取り組む必要は無かった(この研究が ASME J. Appl. Mech. に掲載されていくので十分満足していた)．

どのようにして入手したのか思い出せないが，岡村先生の著書[7]を読む機会があった．この著書には，応力拡大係数と破壊靭性値が詳しく説明されていて，き裂の研究も悪くないと思った．Spiller は接触応力をチビシェフ級数に展開してシュミット法を適用して解いている．き裂の問題でも連立積分方程式を解く事になるのでシュミット法が適用できるのではないかと思った．Eldelyi の公式集[8]から公式を探した結果，き裂面の変位 u_0 を式(5)のようにヤコビ級数に展開すればき裂問題が解ける可能

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{P_{2n-2}^{(1/2,\,1/2)}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{for} \quad -a < x < a \qquad (5)$$
$$= 0 \qquad \text{for} \quad a < |x|$$

性があると予想出来た．ここで，u_0 ：き裂面変位，a_n ：未定係数，$2a$ ：き裂長さ．Sih and Loeber が解いたき裂の調和振動問題[6]に適用して解いた処，両者の計算結果が一致する事を確認できた．シュミット法を用いれば比較的簡単にき裂問題が解ける事がわかった．その次の段階として，この手法を用いて何かの問題を解かなければならない．かなり強引な問題であったが，図 5 に示すように無限に長い有限幅き裂に 3 次元的に調和振動圧力を働かせて応力拡大係数を求めた．運良く，この論文はアメリカ機械学会論文集の Series E (ASME Journal of Applied Mechanics)に掲載された[9]．この頃から，筆者の研究テーマは，き裂問題の解析に傾斜していった．

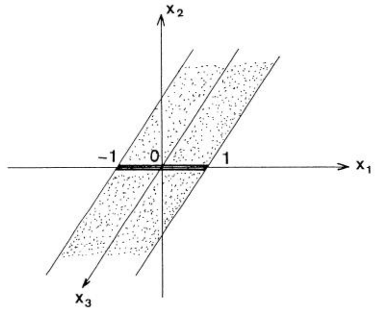


図５　有限幅無限長き裂

６．応力拡大係数と破壊靭性値

少し専門的になってしまうが，き裂端の応力状態を説明する．図 6 に示すように，幅 $2a$ のき裂は $(x,\ y)$ 座標

に対して $y=0,\ -a<x<a$ の位置に存在するものとする．

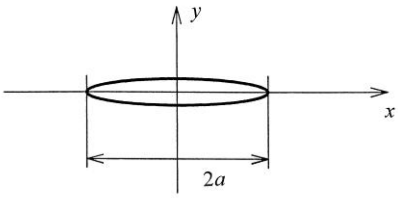


図6　幅 $2a$ のき裂

少し難しくなるが，材料に外力が働く時，き裂先端の垂直応力 σ_{yy} とせん断応力 τ_{xy} は式(6)のように表すことが出来る．

$$\sigma_{yy}(y=0)=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi a}}\frac{1}{\sqrt{x-a}},$$
$$\tau_{xy}=(y=0)=\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi a}}\frac{1}{\sqrt{x-a}} \tag{6}$$

式(6)の K_I と K_{II} は一定値になるが，K_I (ケーワン)を Mode I の応力拡大係数，K_{II} (ケーツー)を Mode II の応力拡大係数と言う．この値は，通常，き裂先端の応力から式(7)で求められる．

$$K_I=\lim_{x\to a+}\sqrt{2\pi(x-a)}\,\sigma_{yy}^0,$$
$$K_{II}=\lim_{x\to a+}\sqrt{2\pi(x-a)}\,\tau_{xy}^0 \tag{7}$$

ここで上付きの 0 は $y=0$ の値を示す．

次に，図 7 に示すように，板厚 t の薄い板に存在するき裂の右端が微小距離 da だけ進展した場合を考える．材料が壊れた場合はエネルギー δU が解法(放出)されるが，

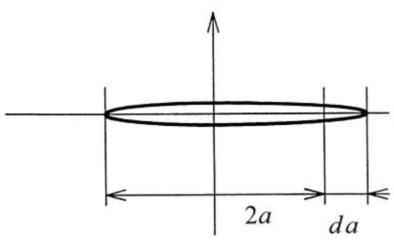


図7　き裂右端の進展

弾性論を用いて計算すれば，平面応力の場合(板が薄い場合と考えて良い)式(8)で与えられる．

$$\delta U=\frac{K_I^2}{2(1+\nu)G}\times(t\ \delta a)+\frac{K_{II}^2}{2(1+\nu)G}\times(t\ \delta a) \tag{8}$$

式(8)を面積 $(t\ \delta a)$ で割った値をエネルギー解法率 g と言う．すなわち，

$$g=g_I+g_{II}=\frac{K_I^2}{2(1+\nu)G}+\frac{K_{II}^2}{2(1+\nu)G} \tag{9}$$

式(8), (9)において ν ：ポアソン比，G ：横弾性係数．

破壊の条件式を式(9)の和の形のエネルギー解法率 g を用いて説明する事に(筆者には)多少の戸惑いがあるので，Mode I の場合のみを考えれば，

$$g_I=\frac{K_I^2}{2(1+\nu)G} \tag{10}$$

を得る．Irwin は，式(10)で与えられるエネルギー解法率が，き裂端を切り開いて(単位の面積×2)の面積を作る時に消費されるエネルギー g_c (破壊靭性値と言う)を超える時，材料は破壊すると考えた[10]．すなわち，破壊の条件式を示せば式(11)を得る．

$$g_I>g_c \tag{11}$$

材料の破壊靭性値 g_c は，密度，ヤング率，ポアソン比等と同様に，材料に固有の値を持つ．式(10)より，g_I と K_I は 1 対 1 に対応しているので，破壊の条件式として，式(11)を用いる替わりに次式を用いても良い．

$$K_I>K_c \tag{12}$$

K_c も破壊靭性値と言われるが，特に g_c と混乱する事もないと思われる．

本節を纏めれば，“き裂先端の応力から定義される応力拡大係数 K_I が材料固有の値である破壊靭性値 K_c に達すれば，材料は前触れも無く突然破壊する”を得る．き裂が検出された場合，そのき裂が安全であるか否かを判定するためには次節で述べるパリス則を適用して検討しなければならない．しかし，安全率 S を用いて式(13)で判定しても良い．

$$K_I<\frac{K_c}{S} \tag{13}$$

安全率 S は，経験等によって決められる値と思われるが，この数値は公表されていないように見受けられる．破壊靭性値 K_c は各種の材料に対して実験を行えば比較的簡単に求められる．他方，応力拡大係数 K_I の値は簡単に求める事が出来ない場合が多い．

7．パリス則

き裂を有する材料に繰返しの荷重が働けば，き裂端に発生する応力拡大係数は変動して，最大値 $K_I^{\max}$ から最小値 $K_I^{\min}$ の間で変化する．この時，(14)式で与えられる ΔK_I を応力拡大係数範囲と言う．

$$\Delta K_I = K_I^{\max} - K_I^{\min} \tag{14}$$

Paris らは金属材料に対しては材料に加えられる繰返しの回数 N の増分 dN に対するき裂端の進展長さの増分 da は式(15)で与えられる事を示した[11].

$$\frac{da}{dN} = C \times (\Delta K_I)^m \tag{15}$$

ここで，C，m は材料定数．式(15)は実験結果から見出した式であり，理論的に求められた式ではない（da/dN を疲労き裂伝ぱ速度と言う)．き裂の進展率(成長率)が式(15)で与えられる事をパリス則と言う．実際には，Paris らは式(15)とは異なる関係式を与えているが，本質的に式(15)と同じになるので，式(15)をパリス則と言っている．

き裂を検出した時のき裂長さを $2a_0$ とする．材料の破壊靭性値 K_c は与えられているので，破壊する時のき裂長さ $2a_f$ は分かる．そこで，式(15)を用いて，今から何回繰返しの荷重を加えたら材料は壊れるか計算出来る．仮に今から N_f 回の荷重を加えたら材料は壊れるとすれば，式(15)より式(16)を得る．

$$dN = \frac{1}{C \times (\Delta K_I)^m} da, \qquad \therefore \quad N_f = \frac{1}{C} \int_{a_0}^{a_f} \frac{1}{(\Delta K_I)^m} da \tag{16}$$

き裂の形状によって ΔK_I の表示式は複雑になる．多くの場合は，ΔK_I は計算式では与えられずグラフ上のデータで与えられる．しかし，この場合でも数値積分すれば，式(16)より N_f を求める事は可能となる．

式(16)を用いて，破壊までの荷重の繰返し数を計算する事が可能となる．しかし，応力拡大係数の解析を専門としている研究者にとっても，N_f を求める事は，そんなに簡単ではないと思われる．式(13), (16)を用いて，き裂の健全性を判定するためには豊富な経験を有する機械技術者が必要とされる．

(パリス則についての論文は，当時の学術雑誌には掲載されなかった．掲載否になった回数は分からないが，どこからも断られたために，結局，ワシントン大学の学内誌である The Trend in Engineering に載せた．)

8．応力拡大係数の計算例

本節では，筆者がこれまでに行ってきたき裂についての解析を紹介する．静荷重がき裂を有する材料に働く場合の解は既存の解法を用いても比較的容易に求める事が出来る．これに対して，動的荷重が材料に働く場合，既存の解法を適用する事は難しい場合がある．場合によっては簡単なき裂形状に対しても解が与えられない．しかし，き裂面変位を級数展開してシュミット法を適用した場合は，静的問題，動的問題，熱弾性問題，電磁弾性問題，不均質弾性問題，異方性弾性問題等，どのような問題も比較的容易に解析できる．き裂面あるいはき裂面の変位の差の形は，本質的に 1 種類のみであり，任意の関数で級数展開する事は許されない．

8.1 長方形き裂

無限に長い有限幅き裂の 3 次元動弾性問題の解析に成功したので[9]，この問題の拡張を考えた．き裂面の変位を 2 重無限級数に展開すれば図 8 に示すような長方形き裂の応力解析が出来るのではないかと考えた．この解析

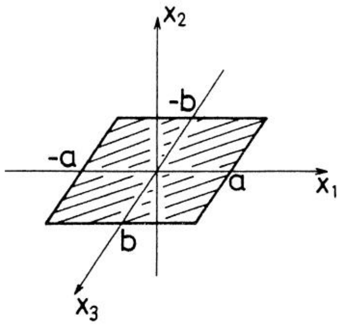


図 8　長方形き裂

では，2 重無限積分を数値的に求める必要があり，さらに，これらの値を用いて，有限領域で 2 重積分を数値的に求め，行列式を計算してシュミット法を適用しなければならない．解析は出来ても，数値計算が出来ない可能性があった．しかし，出来る可能性もあるので，このテーマに取り組んだ．2 重無限積分の数値積分に苦労したがどうにか計算出来た．幸い，円振動数をゼロに漸近させた時，Weaver の静的解[12]に一致する事を確認出来た(Weaver は境界要素法を用いて長方形き裂の静的応力拡大係数を求めた)．ドイツの雑誌 ZAMM に投稿したところ，運良く掲載された．調和振動問題が出来れば，衝撃応答問題は必ず出来る(逆は必ずしも成立しない).

Professor M. K. Kassir も同様の考えの下に長方形き裂

の問題に対して理論解を与えたが，静的解析であった．筆者と Kassir の研究論文を以下に並べてみる．

長方形き裂の調和振動問題(圧縮波)
[13] (S. Itou, ZAMM, 1980)
長方形き裂の衝撃応答問題(圧縮波)
[14] (S. Itou, ASME J. Appl. Mech., 1980)
長方形き裂の静的問題(引張問題)
[15] (M. K. Kassir, ASME J. Appl. Mech., 1981)
長方形き裂の静的問題(せん断問題)
[16] (M. K. Kassir, Int. J. Solids and Structures, 1982)
長方形き裂の衝撃応答問題(せん断波)
[17] (S. Itou, Eng, Frac. Mech., 1991)

動的問題は静的問題に比較して解析が難しくなるが，シュミット法を適用する場合は，動的問題であっても解析が多少面倒になる程度である．雑誌には impact factor が与えられているが，材料力学の分野では個々の研究者はその値とは別のランキングで雑誌を評価している事は，上記の筆者と Kassir の論文の並びを見ても推測されると思われる．

8.2　2個のき裂周囲の応力拡大係数

材料を硬いもので押した場合の応力は弾性体の剛体押し付け問題を解析すればある程度推測出来る．2 個の剛体パンチによる帯板の押し付け問題を解くためには，接触面の接触応力を適当な関数で級数展開する必要がある．Erdelyi の積分公式集[8]から適当となる関数を探して解析を試みた．連立積分方程式を無限級数の形にして，シュミット法を用いて未定係数を求めれば良いだけであり解析は簡単に終わった．しかし，解析に生ずる無限積分の被積分関数の収束が良好とならず，数値積分の精度に問題が残った．被積分関数を収束させる目的で全体を不定積分していたが，その時，元の関数を積分した形はき裂問題に適用できる可能性があると着想し，次の公式を得た．

$$\int_0^\infty g(x)\cos(\xi x)dx = \frac{\pi}{2\xi}\sin\left\{\frac{(a+b)\xi}{2} - \frac{n\pi}{2}\right\} J_n\left\{\frac{(b-a)\xi}{2}\right\} \tag{17}$$

ここで

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2n}\sin\left\{n\sin^{-1}\left(\frac{a+b-2x}{b-a}\right) - \frac{n\pi}{2}\right\} \\ &\quad \text{for } a < x < b \\ &= 0 \\ &\quad \text{for } 0 \le x < a, \quad b < x < \infty \end{aligned} \tag{18}$$

式(17)で $J_n(\xi)$ はベッセル関数．2 個のき裂のき裂面の変位を式(18)で級数展開すれば，2 個のき裂周囲の応力拡大係数が求められる事が期待された．既に，2 個のき裂の調和振動問題が Jain and Kanwal によって解かれていたが[18]，彼らの研究では低振動数を

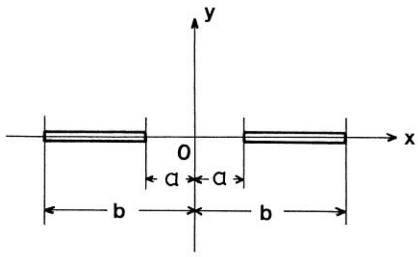


図9　2個のき裂

仮定して積分方程式を解いていたため，応力拡大係数の最大値が求められていなかった．このため，計算結果は工学的・破壊力学的には有用であるとは言えなかった．式(17), (18)を用いて図 9 に示すような 2 個のき裂に対して調和振動問題を解いたところ，応力拡大係数の最大値を求める事が出来た[19], [20].

衝撃応答問題はラプラス変換を適用して解く事になる．今，ラプラス変換の積分核を $\exp(-st)$ とすれば，時間要素 $\exp(i\omega t)$ を有する調和振動問題で，$\omega \to (is)$ の置き換えを行えば，全ての式はラプラス像空間で成立してしまう．すなわち，調和振動問題を解けば，自動的に衝撃応答問題も解けてしまう．ただし，ラプラス像空間での応力拡大係数は閉じた形で与えられないので，ラプラス逆変換は，例えば Miller and Guy の手法[21]を用いて数値的に逆変換して物理空間に戻す必要がある．1980 年代は文献[13], [14], [19], [20]を組合わせて各種の問題を設定し，多くの計算を行った．

8.3 板の平面境界に垂直に存在するき裂の衝撃応答問題

図 10 に示すようにき裂が平面境界に垂直に存在する場合，解析はかなり複雑になる．変位ポテンシャル関数を 2 種類の無限積分形の和で与えて，最初，板の平面での応力自由の境界条件をフーリエ変換を適用して満足させる．その後，き裂についての境界条件を連立積分方程

式に導いて，シュミット法を適用して解く．この種の問

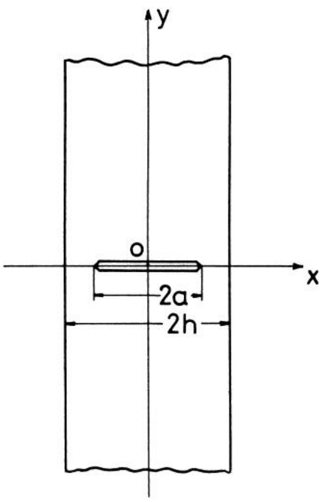


図 10　き裂を有する帯板

題は衝撃応答問題については解く事が出来るが[22], [23], 調和振動問題に対しては，解析は出来ても数値計算には成功していない．

論文[22], [23]の衝撃応答問題を長方形き裂の場合に拡張した場合，解析には無限積分が直列的に 6 個並び，さらにその計算値を用いて 2 重積分を行ってシュミット法を適用する事になる．図 11 に示すように，1 個の長方形き裂を有する半無限体の解析はさすがに無謀と思われた

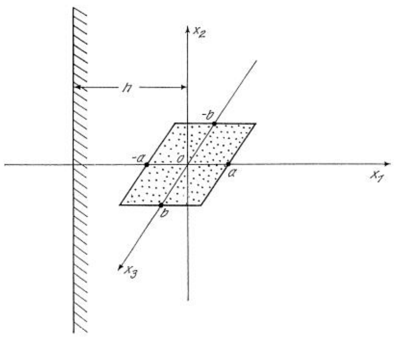


図 11　長方形き裂を有する半無限体

が，躊躇していては研究が進まないので取り掛かった．フーリェ変換の魔術としか言えないのだが，6 重無限積分が 3 重無限積分まで落ちたため，どうにか数値計算する事が出来た．数値計算が重かったため，き裂が応力自由平面に接近している場合の計算は出来なかったが，き裂が少し応力自由平面から離れている場合は精度良く数値計算出来た[24], [25].

8.4 き裂を有する材料の熱弾性問題

き裂を有する材料の熱弾性問題に関しては，無限弾性体に 1 個のき裂が存在する場合の定常熱流問題が解かれている程度と思われた[26]. 図 12 に示すように有限幅の板にき裂が存在する場合の方が工学的・破壊力学的にはより現実的になると思って文献を探してみたが見あたらなかった．

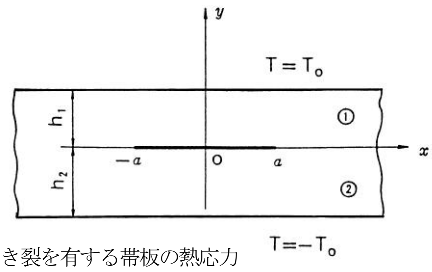


図 12　き裂を有する帯板の熱応力

どうせ解くなら動的な解析が良いと思って, 図 12 に示すように，板の上下の面にステップ関数上に温度を与えて慣性項も考慮した．解析は比較的簡単に出来たが，実際に数値計算する場合，慣性項が邪魔をして数値ラプラス逆変換が出来なかった．材料に荷重が衝撃的に与えられる場合は慣性項が効くが，材料に熱衝撃が与えられる場合は，熱が即座に伝わってしまって慣性の影響が出ないように思われた．この段階でこのテーマから離れるのが普通であるが, 投入した時間と労力は無視出来なかった．このため，ラプラス変換の極限値の一致の法則を用いて静的解を求める事にした．板の幅を大きくした場合(図 12 で $h_1/a,\ h_2/a$ の値を増大した場合), 結果は文献[26] の Sih の解に漸近する必要がある．しかし，この条件がどうしても満たされなかった．

筆者の解析を何度見直しても間違っているとは思えなかった．本来であれば，ここで研究を中止すべきであった．しかし，Sih の解[26]に疑問を持ったので，丁寧に見直した結果，Sih の解析に誤りがある事を発見した(論文 1 編を読破する事は比較的難しく，この作業は楽ではなかった)．Sih の解を訂正して，筆者の解と比較した処，今度は板幅を増大させた時，Sih の訂正解に一致する事を確認出来た．この論文は日本機械学会論文集に掲載された [27].

8.5 その他の問題と今後の研究テーマ

1990 年代以降は異方性材料のき裂問題，複合材料のき裂問題などを行った．神奈川大学では Thomson Reuters

のISI Web of Knowledgeへのアクセス権を導入しているが，ここに，stress intensity factorのキーワードを入力すると，4500件程度の論文が提示される．最近の研究をチェックすれば，き裂を有する不均質体の応力解析が多く解かれている事が分かる．現在，筆者も不均質材のき裂問題を解いているが，この分野のブームはもう暫く続くように見受けられる．

9．終わりに

本稿ではき裂周囲の応力から定義される応力拡大係数と破壊靭性値，パリス則について分かりやすく解説した．その後，筆者が行ってきたき裂に関連する研究を紹介した．神奈川大学の公式ホームページから教員プロフィールに入り，さらに機械工学科に入って，“伊藤勝悦”をクリックすれば，これまでに筆者が行ってきた研究等の全てが紹介されている．

論文がISIの認定雑誌の論文に引用された場合は引用回数が分かる．しかし，例えば，航空機製造企業のエンジニアや地熱エネルギー開発のエンジニアによって筆者の論文が参照された回数は分からない．筆者が与えた応力拡大係数の値が企業のエンジニアによって参照されて，材料の破壊防止や地盤の崩壊防止に少しでも役立っているのであれば弾性力学の研究者として嬉しい限りです．

文献

[1] E. Melan und H. Parkus, Wärmespannungen, Springer-Verlag, Wien, 1953.

[2] R. D. Mindlin, Influence of couple-stresses on stress concentrations, Exp. Mech., Vol. 3, pp. 1-7, 1963.

[3] W. R. Spiller, A shrink fit problem, J. Math. Phys, Vol. 43, pp. 65-71, 1964.

[4] 渡辺一実・芦田文博・上田 整(共同編集)，弾性数理解析とその応用[第4章シュミット法によるき裂問題の解法(伊藤勝悦執筆)]，養賢堂，2007年.

[5] I. N. Sneddon, Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York, 1951.

[6] G. C. Sih and J. F. Loeber, Wave propagation in an elastic solid with a line of discontinuity or finite crack, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 27, 1969, pp. 193-213.

[7] 岡村弘之著，線形破壊力学入門，培風館，1976年.

[8] A. Eldelyi (Editor), Tables of Integral Transforms, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1954.

[9] S. Itou, Three-dimensional wave propagation in a cracked elastic solid, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, 1978, pp. 807-811.

[10] G. R. Irwin, Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys, Sagamore Research Conference Proceedings, Vol. 2, 1956, pp. 289-305.

[11] P. C. Paris, M. P. Gomez and W. E. Anderson, A rational analytic theory of fatigue, The Trend in Engineering, Vol. 13, 1961, pp. 9-14.

[12] J. Weaver, Three-dimensional crack analysis, Int. J. Solids and Structures, Vol. 13, 1977, pp.321-330.

[13] S. Itou, Dynamic stress concentration around a rectangular crack in an infinite elastic medium, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Heft 60, 1980, 317-322.

[14] S. Itou, Transient analysis of stress waves around a rectangular crack under impact load, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, 1980, pp. 958-959.

[15] M. K. Kassir, Stress-intensity factor for a three-dimensional rectangular crack, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, 1981, pp. 309-312.

[16] M. K. Kassir, A three-dimensional rectangular crack subjected to shear loading, International Journal of Solids and Structures, Vol. 18, 1982, pp. 1075-1082.

[17] S. Itou, Transient dynamic stresses around a rectangular crack under an impact shear load, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 39, 1991, pp. 487-492.

[18] D. L. Jain and R. P. Kanwal, Diffraction of elastic waves by two coplanar Griffith cracks in an infinite elastic medium, Int. J. Solids and Structures, Vol. 8, 1972, pp. 961-975.

[19] S. Itou, Dynamic stress concentration around two coplanar Griffith cracks in an infinite elastic medium, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, 1978, pp. 803-806.

[20] S. Itou, Diffraction of an antiplane shear wave by two coplanar Griffith cracks in an infinite elastic medium, International Journal of Solids and Structures, Vol. 16, 1980, pp. 1147-1153.

[21] M. Miller and T. Guy, Numerical inversion of the Laplace transform by use of Jacobi polynomials, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 3, 1966, pp. 624-635.

[22] S. Itou, Transient response of a finite crack in a strip with stress-free edges, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, 1980, pp. 801-805.

[23] S. Itou, Transient response of a finite crack in a half plane under impact load, ASME Journal of Applied Mechanics,

Vol. 48, 1981, pp. 534-538.

[24] S. Itou, Dynamic stress intensity factors around a rectangular crack in a half-space under impact load, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Heft 62, 1982, 301-311.

[25] S. Itou, Dynamic stress intensity factors around a rectangular crack in an infinite plate under impact load, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 18, 1983, pp. 145-153.

[26] G. C. Sih, On the singular character of thermal stresses near a crack, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 29, 1962, pp. 587-589.

[27] 伊藤勝悦，き裂を有する帯板の定常熱応力について，日本機械学会論文集，A 編，57 巻，1991, pp. 1752-1758