



## 濃厚粉流体用 FEM ソルバーの開発

轟木 義一\*

酒井 俊元\*\*

### Development of FEM simulator for heavy particle fluid

Norikazu TODOROKI\*

Toshimoto SAKAI\*\*

#### 1. はじめに

この地球を含む太陽系は宇宙空間中のダストが集まって形成されたものである。また、今ある地球上の大地の形状も数十億年という歴史を経て出来上がったものであり、今現在も堆積・侵食が進行形の状態にある。いずれも多粒子が集まって出来上がったものであり、粉流体のダイナミクスとして理解できる。また、地球規模のみならず材料工学や、火砕流など身近な災害においても粉流体が重要な役割を担っている面が多い。粉流体の解析はいままで、複雑さゆえに特別な場合を除いてあまりなされていなかったが、近年、コンピュータ技術の発達により、粉流体に対し計算機シミュレーションを行うことが可能になり、粉流体の研究が盛んに行われつつある。計算機シミュレーションを用いた研究では、粒子法、格子ガス法など様々なアプローチで研究がなされている。<sup>(1,2)</sup> しかし、これらのアプローチはアприオリな仮定に基づく近似モデルを構築し解析を行っているため、現象の再現に留まっているのが現状である。

一方で、このような粉流体の現象は、流体中の粒子の運動とみなすことが出来る。流体中の粒子の運動を調べるためには、粒子の運動はニュートン方程式を用いて解析を行なう。その際、粒子に働く力を求めるためには、流体に関して流体力学の基本方程式であるナビエ・ストークス方程式を解き、速度場および圧力場を求め、その結果、流体の応力を求めることにより粒子が流体から受ける力を計算しなくてはならない。しかしながら、ナビエ・ストークス方程式は非線形項があるために一般に解析的に解くことを困難である。そこで解析的に解く手法

として従来から、レイノルズ数が非常に小さい状況（非常に粘性が強い状態）を考え、その状況のみに成り立つ非線形項を無視するストークス近似を用いて理論的に研究されてきた。<sup>(3,4)</sup> また、この近似は1粒子だけの運動など非常に特殊な場合にのみしか適用できないため、数粒子以上の挙動を知るためには、ストークス近似に加えて更に粒子同士の相関が非常に弱いとするオセーン近似を用いて、粒子間相互作用などを計算してきた。<sup>(4)</sup> しかしながら、オセーン近似は、粒子間距離が十分大きいという事が前提となっており、粒子同士が近傍にある多粒子（粉流体）系のさまざまな現象を説明する事はできていない。そこで、本研究では、二次元非圧縮粘性流体中の粒子間距離が近い多粒子系に対し高速・高精度シミュレーションを行う有限要素法（FEM）ソルバーの開発を行った。これにより、従来の理論的な研究からは議論できなかった部分を、シミュレーションを通じて議論を進めることを可能にした。

本論文では、まず、FEM ソルバーに用いた手法の概要について解説する。さらに、解析例として2次元円管の粒子の沈降の運動のシミュレーション結果を示す。混相流の学門分野において、粒子一流体系の挙動、特に多粒子の集団的挙動を丁寧、且つ厳密に分析されることが必要とされており、本研究はその一助となるであろう。

#### 2. 粒子一流体系の基礎方程式

非圧縮粘性流体を支配する基本方程式は、連続の式

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

および、ナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}, \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{u}$ は速度ベクトル、 $p$ は圧力、 $t$

\*助手 物理学教室

Research Associate, Institute of Physics

\*\*クレディ・スイス証券株式会社

Credit Suisse Securities (JAPAN) Ltd.

は時間,  $Re$  はレイノルズ数である. 一方で, 粒子に対しての基礎方程式は, 重心運動および回転運動のニュートン方程式,

$$m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{F}, \quad (3)$$

$$I \frac{\partial \Omega}{\partial t} = M, \quad (4)$$

で与えられる. ここで,  $m$  は粒子の質量,  $\mathbf{V}$  は粒子の重心速度,  $\mathbf{F}$  は粒子にかかる力,  $I$  は粒子の慣性モーメント,  $\Omega$  は粒子の角速度,  $M$  は粒子にかかる力のモーメントである.

以上の方程式に初期条件および境界条件を与えることにより, 流体の速度場, 圧力場および, 粒子の位置, 速度を求めることができる.

### 3. 解析手法

#### 3. 1. 離散化手法

まず, 離散化手法について説明する. はじめに, 粒子が一つある場合についての離散化手法について説明する. 空間を図 1(a) のように同じ大きさの正方形に切っておく. そのとき, 考える最小単位の正方形をセルと呼ぶ. セルの中で粒子の境界面が属するセルを境界セルと呼ぶ. それ以外のセルを非境界セルと呼ぶ. 図 1(a) の太線で囲まれたセルが境界セルである. まず, 境界セルを探索する. 境界セルは粒子の中心座標と半径が解っていれば求めることができる. 境界セルは二つの切断点とその切断点を通る直線で近似する. 切断点の位置は粒子と考えているセルの辺との交点を用いる. このようにして, 図 1(b) のように空間を三角形および四角形に分割することができる. それに対し縮退四角形要素, もしくは四角形要素をそれぞれ用いて有限要素法解析を行えばよい.

粒子が二つ以上ある場合は, 一つのセルに二つ以上の粒子が存在する可能性がある. メッシュを粒子の半径に比べて十分小さくすれば, 一つのセルに含まれる粒子はただか二つにすることができる. この場合, 二組の切断点と二本の直線によって現すことができる. 図 2 に実際に本研究で開発したメッシュャーを用いたメッシュ生成例を示す.

この離散化手法は三次元にも容易に拡張できるというところは, 強調すべき点である. 三次元の場合は, 六面体要素および縮退六面体要素を用いて解析を行えばよい.<sup>(6)</sup>

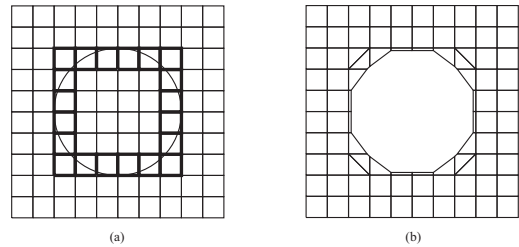


図 1: 離散化手法. (a) 境界セルの探索 (太線で囲まれた部分が境界セル), (b) 三角形および四角形に分割.

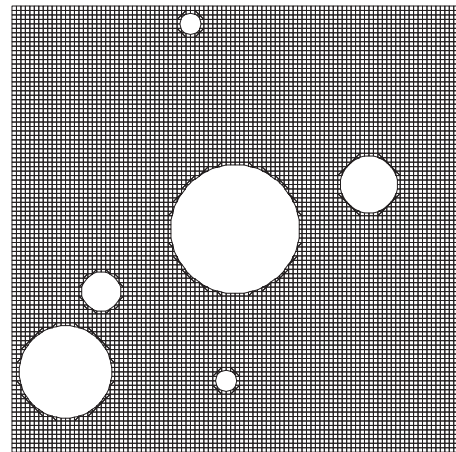


図 2: メッシュ生成例

#### 3. 2. 速度修正法

流体に関しては, ナビエ・ストークス方程式を解き, 圧力場と速度場を求めればよいのであるが, 圧力場と速度場を同時に求める方法では圧力振動を起こし, 数値的に不安定になることが知られている. そのため, 本研究では, 速度修正法と呼ばれる手法を用いて基本方程式の離散化を行い, 有限要素方程式を導出する. 速度修正法は, SMAC 法に準拠して開発された手法であり, 圧力場と速度場を分離して解く分離解法の一つである.<sup>(7)</sup>

#### 3. 3. 弱連成法

一般に, 固体と液体から成る固液二相流の問題を解く際, 時間的に相境界が移動するという移動境界条件の下でナビエ・ストークス方程式を解かなければならない. このような移動境界条件の下での解析には, どのように移動境界を取り扱うかが重要な問題になる. 移動境界を取り扱う方法としては強連成法, 弱連成法および拘束条件を用いた手法等が用いられる.<sup>(8,9)</sup> 本研究では, 弱連成法を採用する. つまり, 固体粒子と液体の幾何学的連続条件および, 平衡状態を満たすように, 固・液体の境界条件を修正しながら交互に解き, 境界における連続条件・平衡条

件を満たすように解く。このとき、粒子が移動するのに伴い、領域内でメッシュを張り替える必要がある。

#### 4. 解析例

本研究で開発したソルバーを用いた例として、二次元円管の粒子の沈降の運動の解析を示す。このとき、レイノルズ数とフルード数（重力加速度を特徴的な長さで時間規格化したものの逆数）のパラメータを与えておく必要がある。海底での土砂の堆積・粉流体などの他粒子沈降を考えた際、レイノルズ数の領域は

$$10^{-1} < Re < 10^3,$$

である。本研究では低レイノルズ数領域  $Re=1.0$  とした。また、フルード数はレイノルズ数とは独立のパラメータであり、任意に決定することができる。実際の重力を考慮し、フルード数を

$$\frac{1}{Fr} = 5,$$

とした。はじめに、1 粒子の沈降についてシミュレーションを行った。ストークス近似を行わない場合と行った場合の粒子の速度の大きさの比較を図 3 に示す。ストークス近似を行った場合、粒子の流体に関する慣性がつかなくなり、結果的にストークス近似を行わない場合に比べて  $t=6.0\text{sec}$  において速度が 22 パーセント遅くなっていることがわかる。低レイノルズ数での流体中の粒子系の解析では、今まで、ストークス近似が多く用いられてきたが、この解析結果から、たとえ、低レイノルズ数においても高精度の解析を行うためには、非線形項を無視することはできないことが解る。

次に、2 粒子の沈降についてシミュレーションを行った。粒子の散乱を見るために、x 成分の初速度をそれぞれ  $v_x = -2, 2\text{m/s}$  とした。図 4 (a) にそのスナップショットを示す。図 4 (b) は比較のため、ストークス近似を行ったもののスナップショットである。散乱においてもストークス近似を行わない場合と行った場合で違いが現れており、高精度の解析にはたとえ低レイノルズ数領域でも非線形項を無視することはできないことが解る。

最後に、多粒子（粒子数 18 個）のときの沈降についてシミュレーションを行った。図 5 のスナップショットを示す。多粒子のシミュレーションにおいても計算が破綻することなく、安定に解析を行えていることが確認できる。このことより、本研究で開発したソルバーの有用性が示すことができた。

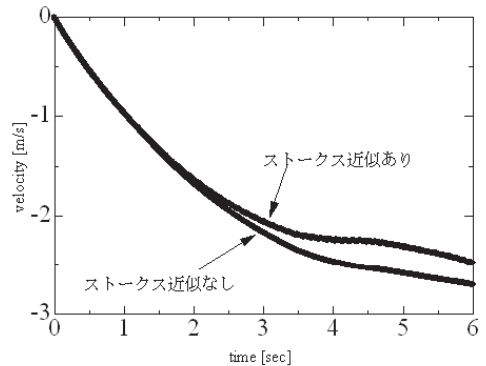


図 3 : 1 粒子の沈降における重力方向の速度

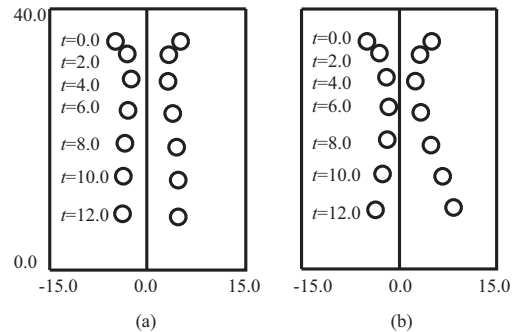


図 4 : 2 粒子の沈降のスナップショット。(a) ストークス近似なし、(b) ストークス近似あり。

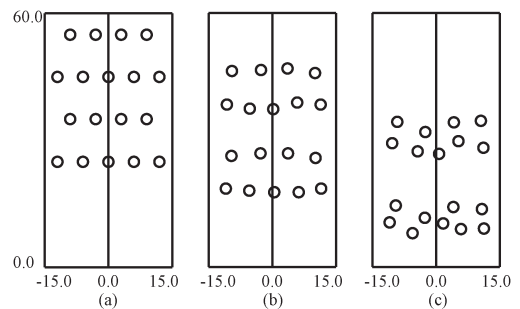


図 5 : 多粒子（粒子数 18 個）の沈降の様子。(a)  $t=0.0\text{sec}$ , (b)  $t=6.0\text{sec}$ , (c)  $t=12.0\text{sec}$ 。

#### 5. まとめ

本研究では粒子流体系の問題を解く手法としての、動的境界を有する粉流体の高精度・高速 FEM ソルバーの開発を行った。また、実際にそれを用いてシミュレーションを行った。シミュレーションの結果では、たとえ低レイノルズ数においても非線形効果が出るのが分かり、

高精度の解析には無視できないことを本シミュレーションで確認した。

粉流体の学門は非常に広範囲な応用が可能な分野でもある。地球惑星科学の領域においては、マクロレベルでは惑星の生成過程・惑星表面上の堆積過程・侵食過程・火砕流の挙動、ミクロレベルでは、マントル中での多粒子沈降及びその結晶成長など、そして医療分野においては、異なる種類の薬の混合による新薬の開発、血液流中の薬の運搬 (Drug Delivery System) など広範囲に渡って、本研究の応用により実現が可能であり、その貢献度は大きい。このように医学治療から地球の環境にまで広範囲に影響を与える粉流体の性質を知することは非常に重要なことであり、それにより火砕流などの災害対策などに応用することも出来よう。また、「粉流体」はミクロ的な相互作用がマクロ的な結果をも及ぼす「複雑系」の本質と相通ずるところがあり、本研究はその先駆けとなるであろう。

#### 参考文献

- (1) S.Koshizuka, H.Tamako, and Y.Oka, "A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation", *Comput. Fluid Dynamics J.*, 4 (1995), p.29.
- (2) Inamuro, T., Tomita, R. and Ogino, "Lattice Boltzmann simulations of drop deformation and breakup in shear flows", *F., Int. J. Mod.Phys.*, B17 (2003), p. 21.
- (3) J. Happel and H. Brenner, "Low Reynolds number Hydrodynamics", Nordhoff, (1973).
- (4) 五島洋之, "粘性流体中を落下する粒子集団の数値シミュレーション-集団の回転・分散を支配する要因-", Master thesis, Tokyo University, (1997).
- (5) D. D. Joseph, A. F. Fortes and T. S. Lundgren, "Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spherical particles", *J. Fluid Mech.*, 77 (1987), p.467.
- (6) K. Kase, Y. Teshima, S. Usami, H. Ohmori, C. Teodosiu, and A. Makinouchi, "Volume CAD, Volume Graphics 2003", *Eurographics/IEEE TVCG Workshop Proceedings*, (2003), p.145.
- (7) H. P. Langtangen, "Computational Partial Differential Equations, Numerical Methods and Diffpack Programing", Springer, (1999).
- (8) Bathe, K. J., Zhang, H. and Wang, M. H., "Finite element analysis of incompressible and compressible fluid flows with free surfaces and structural interactions", *Computers & Structures*, 56-2/3, (1997), p. 193.
- (9) Kalro, V. and Tezduyar, T. E., "A parallel finite element methodology for 3D computation of fluid-structure interactions in

airdrop systems", *Fourth Japan-US Symposium on the Finite Element Methods in Large-Scale Computational Fluid Dynamics Proceedings*, (1998), p. 31