



待ち行列理論の生産・流通システムへの適用における一考察

北岡正敏*

Application of Queueing Theory for Production and Distribution Systems

Masatoshi Kitaoka

1 はじめに

SCM (サプライチェーンマネジメント) は海外や国内の企業から部品、半製品の調達をする。そして、国内や海外の工場でこれらの部品や半製品を用いて製品の加工、組み立てをし、完成品は物流センターから消費者に出荷するまでの流れをシステムの対象にしている。このようなシステムには部分的に待ち行列現象が多く見られる。そして、シミュレーションや待ち行列理論で解析している [1]。現在、待ち行列理論はコンピュータ処理や通信ネットワークに広く利用されている [2]。しかし、待ち行列理論は古くから IE の分野で利用されてきた [1][3]。これまで、生産・物流現場で発生している問題はシミュレーションで解析することがある。しかし、日本では欧米に比べてシミュレーションによる解析はコストや時間面で使用例が少ない。最近、IE 技術者の不足で生産流通現場で科学的な管理手法の適用例が減少している。現場で事象解析を行うには待ち行列理論が有効である。しかし、現場で発生する滞留現象を厳密な数学的な手法で解析することは困難である。このため、滞留現象解消するため近似解を用いて解決している例が多い。このような中で待ち行列理論を生産流通の場で適用するときの問題点について整理してみた [5][6]。

2 単一の待ち行列モデル

2.1 $M/M/1$, $M/M/c$ 待ち行列モデル

1) $M/M/1/\infty$ 型: 生産現場における工程における滞留問題や機械の修理や保守問題それに配送センターでの包装・保管・ピッキング作業での滞留や在庫管理の問題の解決適用されている。また、生産システムのマクロ的な解析にも利用できる。たとえば SCM では工場全体をサービス施設とみなし、その平均能力を μ として到着率 λ で部品の投入をして生産は完了するものとしてモデル化をしている [4][5][6]。
2) $M/M/c/\infty$: 生産流通問題ではサービス施設の数による滞留時間と数が問題になるシステムに適用できる。1) 機械

の修理問題で故障に対する修理員の最適な数の決定。1 台の機械の修理に要する時間が指数分布とし、故障製品の到着がポアソン分布として指定時間 f 以上待つ確率から最適な修理員の数を決定する問題。2) 流通センターにおける自動倉庫全体をサービス施設とみなし受注 λ の到着に対する、スタックークレーンによる取り出しをサービス μ とみなすして処理できる。このときスタックークレーンの台数がサービス施設の数になる。3) 配送センターにおける荷受場所や出荷場所での最適なバース数の決定問題。加工工場での最適な機械台数決定問題 [5][6][7][8]。

2.2 $M/M/c/N$, $M/M/c/$ 有限母集団の待ち行列モデル

1) $M/M/1/N$ 有限待ち行列モデル

有限待ち行列モデルはサービスを受ける 1 人の客を含めて N 人の客しか収容できない。サービスを受ける人が 1 名のため、待合室には $N-1$ 人までが入れる。待合室がいっぱいになるとあふれ出る。このようなシステムは有限待ち行列 $M/M/1/N$ になる [7][8]。

2) $M/M/c/N$ 有限待ち行列モデル

有限待ち行列の窓口の数が c でシステム内で待つことができる客の最大数が N とする。客数 k が容量 N を超えた時 λ はゼロになる。このような問題はたとえば自社が持つトラックや加工機械の故障により故障台数が N 以下のときは自社で修理をする。機械の修理の班数は c 組とする。そして、故障の台数が N 以上になると $N-1$ を超える分は外部の修理工場に依頼する。このとき修理の完了する平均時間の問題などがある。計算で P_k は $M/M/c$ の無限母集団問題と同じになる。 P_k は $M/M/c$ で導いた式を用い、 k の範囲によりつぎのようになる [3][5][9]。

$$P_k = \begin{cases} \lambda^k / k! \mu^k \cdot P_0 & (1 \leq k < c) \\ \lambda^k / (c! c^{k-c} \mu^k) \cdot P_0 & (c \leq k \leq N) \end{cases}$$

P_0 の値は $M/M/c$ の値を用いる。ここで、 $a = \lambda/\mu$ で $\rho = a/c$ とする。

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^c}{c!} \sum_{k=c}^N \left(\frac{a}{c}\right)^{k-c} \right]^{-1}$$

*教授, 情報システム創成学科

Professor, Dept. of Information Systems Creation

評価関数は次式になる。

$$I_q = \frac{P_0 a^c \rho}{c!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{N-c+1} - (1-\rho)(N-c+1)\rho^{N-c}]$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{I_q}{\lambda(1-\rho)}$$

3) M/M/c, 有限母集団

有限母集団として工場の機械台数、自社のトラック台数、工場での測定器台数など自社で保有するこれらの機械を有限母集団とみなす。これらの機械やトラックの故障発生問題に適用できる。また、在庫管理問題にも利用できる。平均 λ の割合で生産し、1つの製品の完成から次の完成まで指数分布とする。需要はポアソン分布にしたがう。在庫が K になると生産を中止し $K-1$ 以下になると生産を開始する。このとき、平均在庫量、品切れ確率、生産中止確率は待ち行列の問題になる。このように在庫問題は生産率 λ で到着し、需要がサービス率 μ の指数分布になる。同様に機械の予備部品の問題も在庫管理と同様に処理できる。

2.3 M/E_k/1 待ち行列モデル

経済学者のアダムスミスは1776年にピンの生産による作業分割の効果を述べている。作業工程を1工程から18工程に分割すると生産性が百倍以上になったことを報告している。同じように現在はセル生産における作業分割の問題が大きくなっている。待ち行列理論によれば分割数が k 個になると作業時間は位相 k のアーラン分布になる [6][7]。ここでは $M/E_k/1$ における作業分割数とシステム内の評価値の関係を調べる。評価値は 1) 客の平均数 L , 2) 平均待ち行列 I_q , 3) 平均待ち時間 W , 4) 行列待ち時間 W_q を用いる。 $M/E_k/1$ における評価の式は次式になる [10][11]。

1) システム内での客の平均数 L

$$L = \frac{\rho[k(2-\rho) + \rho]}{2(1-\rho)k}$$

2) 平均待ち行列 L_q

$$L_q = \lambda W_q = \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}$$

3) 平均待ち時間 W

$$W = \frac{1}{\mu} \frac{[k(2-\rho) + \rho]}{2(1-\rho)k}$$

4) 行列待ち時間 W_q

$$W_q = \frac{(k+1)\rho}{2k\mu(1-\rho)}$$

作業時間と分割数の関係

$M/E_k/1$ の待ち行列において $\rho = 0.4$ のときフェーズ k とシステムの評価値の関係は表1のようになる。

表のように $k = 1, 2, 3, 4, 10, 20, \infty$ はつぎのようになる。

| | $k = \infty$ | $k = 20$ | $k = 10$ | $k = 4$ | $k = 1$ |
|-------|--------------|----------|----------|---------|---------|
| L | 0.533 | 0.540 | 0.547 | 0.566 | 0.660 |
| L_q | 0.133 | 0.140 | 0.140 | 0.166 | 0.260 |
| W | 27 | 27 | 27 | 28 | 33 |
| W_q | 7 | 7 | 7 | 8 | 13 |

表から k が小さくなるとサービス時間の分布が増加する。また、行列の数も増加する。そして、システム内で過ごす時間と待ち行列の長さは長くなる。このため、分割数の効果が出ている。しかし、セル生産では正味作業でなく、部品の供給などの準備作業が必要になる。また、製品や半製品の搬送が作業が発生する。このような付帯作業の時間は単純に分割数が増えると増加する。この2つのトレード関係を考慮しなければならない [9][10][11]。

2.4 M^[G]/M/1 集団待ち行列

多くの場合、客は1人でなくグループで到着する。これは集団待ち行列という [8]。そして、サービスはグループで受ける。たとえば、部品の輸送はトラックを用いる。このとき、1台のトラックには複数個の部品を積載してある。サービスとしては積荷をトラックから降ろすのにフォークリフトを用いておこなう。工場の搬送車には複数の部品が積載されている待ち行列理論では1個当たりの作業時間が指数分布にしたがうものとする。これも集団待ち行列になる。同様に荷卸し場から保管庫までと工場の出荷場所からパースまで荷物を運ぶのにフォークリフトを用いる。このような作業内容も同様である。いま、 k 人の客が到着するときの評価関数は次式にしたがって計算をおこなう。ここで $\rho = \lambda k / \mu$ とおくと次のような評価式になる [6][8][9]。

$$L_q = \frac{2\rho^2 + (k-1)\rho}{2(1-\rho)}$$

$$W_q = W - 1/\mu$$

2.5 M/G/1 待ち行列モデル

到着時間間隔はポアソン分布であるがサービス時間の分散が σ^2 の作業が存在する。このような作業は配送センターにおける製品の受注にはポアソン分布になるが商品の出荷作業の時間は一般分布となる。オーダーピッキング作業もこのモデルに適用できる。また、工場での機械の故障発生もポアソンであるが、複雑な機械では修理作業が一般分布となりこのモデル式が適用される。しかし、自動機械を用いた組み立て作業や加工時間はバラつきが存在しないため、 $\sigma = 0$ としてモデル式を適用する [6][9]。

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$W_q = \lambda \left(\sigma^2 + \frac{1}{\mu^2} \right) / 2(1-\rho)$$

2.6 D/M/1 待ち行列モデル

到着時間間隔が一定で、サービス時間がポアソン分布でサービス窓口が1個のときに適用できる。使い捨てカメラの再生処理では工程全体をサービス施設とし工程全体を待ち行列システムとしてモデル化して使用している。自動化ラインでの検査工程に人間が入り検査作業を行うとき、検査時間は指数サービス時間にしがう。機械の加工や組み立て工程では作業時間が一定になる。そして、搬送装置から検査工程までは到着時間間隔は一定としている。そのときの式はつぎのようになる [8][9]。

$$L_q = \frac{\theta^2}{1-\theta}$$

$$W_q = \frac{\theta}{\mu(1-\theta)}$$

ここで θ は $0 < \theta < 1$ となる。またこの値は次式から求める。

$$\theta_k = e^{-(1-\theta_{k-1})/\rho}$$

3 開放型待ち行列

開放型待ち行列理論 (*Open Queueing Network*) とは単一待ち行列モデルを拡張した理論である。オープンネットワーク型待ち行列理論には多くのタンデム型(直列型)、ブランチ型(分岐型)等のタイプが存在する。SCMの内容は図1のような開放型待ち行列になる。オープンネットワーク型待ち行列理論を適用することによりリードタイム、在庫量の解析を行うことができる。

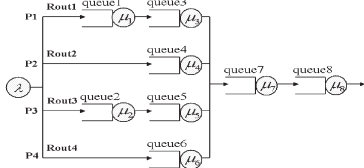


Figure 1: Network model

1) 開放型ネットワーク解析としてのジャクソンの方法

節点が M 個ある開放型ネットワークの待ち行列についてジャクソンの方法がある。ジャクソンの待ち行列ネットワークは M 個の独立した待ち行列のサーバから構成される。ここでは図2に示す内容にそってつぎのような記号を用いる。

- 1) 外部から節点 i に客がポアソン分布で到着率 λ_{oi} で到着する。 λ は外部からの到着率の合計である。 $\lambda = \sum_{i=1}^M \lambda_{oi}$
- 2) λ_i は i 番目の節点における客の到着率である。
- 3) すべての客は異なったサーバから他のサーバに出て行く。このとき、 $p_{i,j}$ は節点 i においてサービスが終了した客が j 番目の節点に移動する確率である。
- 4) μ_i は節点 i におけるサービス率で $1/\mu_i$ は平均サービス時間である。
- 5) p_{oj} は外部から節点 j に到着する確率で、 p_{io} は節点 i でサービスの終了後にネットワークを退去していく確

率である。

節点 $i = 1, 2, \dots, M$ に対する到着率 λ_i は 1) 図3に示すように外部からの到着 λ_{oi} でシステムに入るものと、2) j 番目の節点でのサービス終了後に i 番目に移動する確率 $\lambda_j P_{ji}$ により他の節点から客の移動を加えたものである。したがって、次式が成立する。

$$\lambda_i = \lambda_{oi} + \sum_{j=1}^K \lambda_j P_{jk} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

この式はつぎのような内容である

「 i 番目の節点への客の到着率 (λ_i) = i 番目の節点への外部からの客の到着率 (λ_{oi})

+ j 番目の節点でのサービス終了後に i 番目に移動する確率 ($\sum_{j=1}^K \lambda_j P_{jk}$)

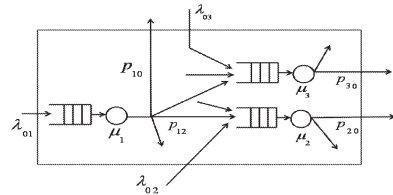


Figure 2: An open queueing network

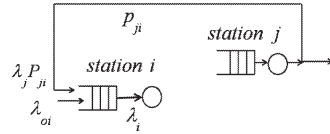


Figure 3: Flow from j node to i node

したがってネットワーク全体にたいして、外部からの入力と外部への出力が等しい

$$\sum_{i=1}^M \lambda_{oi} = \sum_{i=1}^M \lambda_i p_{io} \quad (\text{入力}=\text{出力}) \quad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^M \lambda_i (1 - \sum_{j=1}^M p_{ij}) \quad (3)$$

以上の関係を拡張するとジャクソンの定理が導ける。2) ジャクソンの定理の適用

以上の関係を用いてつぎの条件を満たし

$$\lambda_j < \mu_j \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

また $\rho_j = \lambda_j / \mu_j$ としたとき、ジャクソンの定理によれば各節点における確率は次式で求まる。

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = P_1(n_1)P_2(n_2) \cdots P_M(n_M)$$

$$= \prod_{j=1}^M (1 - \rho_j) \rho_j^{n_j}$$

ここで $P_i(n_i)$ は節点 i での確率を示す。

ジャクソンの計算手順

これまでに説明したジャクソンの公式の計算は次のような手順で求める。

手順1：すべての節点 $i = 1, 2, \dots, M$ にたいして到着率 λ_i を計算する。

手順2： $M/M/c$ の待ち行列により、すべての節点 $i = 1, 2, \dots, M$ にたいして $\rho < 1$ を確認する。そして、定常状態での確率を計算し、 $M/M/c$ の公式により性能評価を計算する。

手順3：ジャクソンの公式によりすべてのネットワークの定常状態での確率を計算する。

3.1 開放型ネットワーク

1) 直列型モデル

客は最初のシステムにランダムに到着率 λ で到着する。そして、1 個のサーバからサービス率 μ_1 の負の指数分布で処理される。サービスが終了すると客は 2 番目のシステムに入る、そして 1 個のサーバでサービス率 μ_2 とする。ここで $p(n_1, n_2)$ は最初のシステムの客数が n_1 で 2 番目の客数が n_2 の定常状態の確率を示す。ここで、 $\lambda < \mu_1, \lambda < \mu_2$ とする。最初の 1 個のサーバは $M/M/1$ システムで単独の



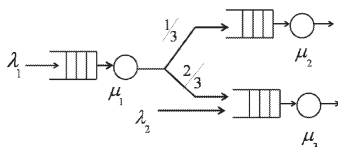
Figure 4: Two systems in tandem

システムに相当する。このシステムからサービスを受けて退去したとき、この退去は 2 番目のシステムへの到着になる。このとき、1 番目のシステムからの退去はポアソン過程の流れになる。この結果、2 番目のシステムも到着率 λ でサービス率 μ_2 の $M/M/1$ と同じ働きをする。これら 2 つのシステムはそれぞれが独立である。このときの確率は次式になることが証明できる。[4][5][18]

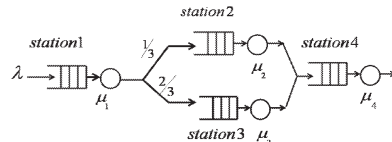
$$p(n_1, n_2) = (1 - \rho_1)\rho_1^{n_1}(1 - \rho_2)\rho_2^{n_2} \quad n_1, n_2 \geq 0$$

2) 分岐フォワード型

事例 1) 分岐フォワード型ネットワークは図のように外部から 2 つの到着がある。サービスは流れに沿って受けるものとする。このときすべてのシステムは定常状態とする。ここでシステム 1 は到着率 λ_1 でサービス率 μ_1 で $\rho = \lambda_1/\mu_1$ の $M/M/1$ 、システム 2 はサービス率 μ_2 で到着率 $\lambda_2 = 1/3\lambda_1$ で $\rho = (1/3\lambda_1)/\mu_2$ の $M/M/1$ で、システム 3 はサービス率 μ_3 で到着率 $\lambda_3 = (\lambda_2 + 2/3\lambda_1)$ で $\rho = (\lambda_2 + 2/3\lambda_1)/\mu_3$ の $M/M/1$ である。



事例 2) 図のような生産工程は 4 つの処理機械から構成されている。このようなネットワークは $M/M/1$ が 4 個あるシステムである。製品 A はステーション 2 に流れ、製品 B はステーション 3 に流れる。いま、外部から注文が最初のステーション 1 に到着率 λ のポアソン分布で到着し、サービス率は μ である。そして、ステーション 2 には $2/3$ の割合で製品 A は流れ、そこではサービス率 μ_2 で処理される。そして、 $1/3$ は製品 B でステーション 3 に流れる、サービス率 μ_3 で処理される。そして、最終工程のステーション 4 ではサービス率 μ_4 で処理される。 $p(n_1, n_2, n_3, n_4)$ はステーション 1 の製品の個数が n_1 である確率、ステーション 2 は n_2 で以下、同様な意味をあらわす。したがって $M/M/1$ の直列システムの内容から確率は次式になる



工程における平均処理時間はステーション 1、ステーション 2 からステーション 4 に至る W_a は次式になる。

$$p(n_1, n_2, n_3, n_4) = (1 - \rho_1)\rho_1^{n_1}(1 - \rho_2)\rho_2^{n_2}(1 - \rho_3)\rho_3^{n_3}(1 - \rho_4)\rho_4^{n_4}$$

工程における平均処理時間はステーション 1、ステーション 2 からステーション 4 に至る W_a は次式になる。

$$W_a = E[W_1] + \frac{1}{\mu_1} + E[W_2] + \frac{1}{\mu_2} + E[W_4] + \frac{1}{\mu_4} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - 2\lambda/3} + \frac{1}{(\mu_4 - \lambda)}$$

3) フィードバック型待ち行列を用いたジャクソンの定理の導入

図 5 のような 2 個のサーバをもつフィードバック型の待ち行列にたいして状態遷移の関係からジャクソンの定理を導入できる。サーバ 1 のサービス率は μ_1 で客数は m 、サーバ 2 のサービス率は μ_2 で客数は n とする。このときシステムが定常状態であるとき状態遷移方程式を導入する。サー

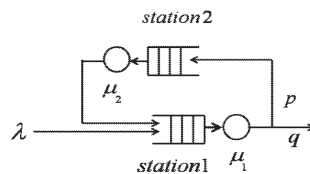


Figure 5: Feed back system of network
 ば 1 の人数 m とサーバ 2 の人数 n とする。ここでは説明の関係で 2 つのサーバの m, n の確率 $P(m, n)$ を $P_{m, n}$ と表す。 m, n にたいする状態遷移は図 6 のようになる。定常

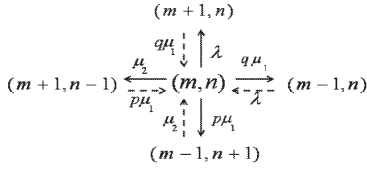


Figure 6: Transition of m, n

状態における状態遷移方程式は次のようになる [4][12][14].

$$\lambda P_{0,0} = q\mu_1 P_{1,0} \quad (4)$$

$$(\lambda + \mu_2)P_{0,n} = p\mu_1 P_{1,n-1} + q\mu_1 P_{1,n} \quad n \geq 1 \quad (5)$$

$$(\lambda + \mu_1)P_{m,n} = \lambda P_{m-1,0} + q\mu_1 P_{m+1,0} \quad (6)$$

$$+ \mu_2 P_{m-1,1} \quad m \geq 1 \quad (7)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{m,n} = \lambda P_{m-1,n} \quad (8)$$

$$+ p\mu_1 P_{m+1,n-1} + q\mu_1 P_{m+1,n}$$

$$+ \mu_2 P_{m-1,n+1} \quad m, n \geq 1 \quad (9)$$

以上の方程式を解くことでジャクソンの公式が求まる。

$$P_{m,n} = \left(1 - \frac{\lambda}{q\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda}{q\mu_1}\right)^m \left(1 - \frac{p\lambda}{q\mu_2}\right) \left(\frac{p\lambda}{q\mu_2}\right)^n \quad (10)$$

4) フィードフォワード型の生産工程の分析

1) 基本フィードバック工程：その 1

図のような 2 台の機械で処理している生産工程がある。ジョブは他の工程から到着率 λ で到着する。機械 1 での処理はサービス率 μ_1 の指数分布にしたがう。製品によっては確率 p で機械 2 にかかけられ、別の製品として加工しさらに、機械 1 にかかけられる。そのときのサービス時間は μ_2 の指数分布である。そして、普通品は確率 $1-p$ で出荷される。システムで

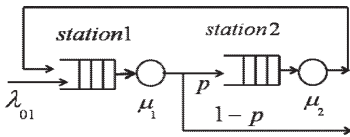


Figure 7: Queueing network for computer system

サービス時間は指数分布をしている。外部からジョブが 1 秒間に λ_{04} の割合で到着する。また、図に示すように、それぞれの分岐確率は $p_{12}=p_{13}=0.5$, $p_{21}=p_{41}=1$, $p_{31}=0.6$, $p_{30}=0.4$ として与えられているものとする。このときの性能評価とまた、 $n_1=3$, $n_2=3$, $n_3=2$, $n_4=1$ のときの定常状態の確率は先にあげたジャクソンの手順で解くことができる。

手順 1: 次式のような方程式が成立する。

$$\lambda_1 = \lambda_2 p_{21} + \lambda_3 p_{31} + \lambda_4 p_{41}, \quad \lambda_2 = \lambda_1 p_{12},$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 p_{13}, \quad \lambda_4 = \lambda_{04}$$

手順 2 : 性能評価の計算をする。

$$L_{q1} = \frac{\rho_1^2}{1 - \rho_1}, \quad L_1 = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1}, \quad L_2, L_3, L_4$$

$$W = \frac{1}{\lambda_{04}} \sum_{i=1}^4 \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}$$

手順 3: すべてのネットワークの定常状態での確率を計算する。

6) フレキシブル生産システム

先にあげたコンピュータシステムの方法は次に示すような FMS の性能評価と同じ手順になる。FMS は図 8 のようなステーションから構成されている。

- 1) ロードステーション (LO) はワークをパレットに積載するロボットとする。
- 2) 同じ型の旋盤 (LA1, LA2) が 2 台、
- 3) ミリングマシン (M1, M2, M3) 3 台、
- 3) 無人搬送車 2 台 (Transfersystem) がこれらの機械間を自動的に搬送する。
- 4) パレットの取り出し装置 (U) でワークを取り出す装置である [15][16][17][18]。

いろいろな種類のワークを加工する。そして、加工するワークの種類と量により旋盤、ミリングマシンの稼働率は異なる。このため、過去のデータから FMS の搬送システムの中を流れるワークの分岐確率はあらかじめ既知とする。このシステムはつぎのような問題を解決することになる。

- 1) 機械の稼働率、
- 2) 仕掛り在庫量、
- 3) ワークの待ち行列、
- 4) 搬送車の稼働率、
- 5) 機械の加工待ち時間。

費やす時間 $E[T]$ はリトルの公式から $\lambda E[T] = E[N_1 + N_2]$ となる。

$$E[T] = \frac{1}{1-p} \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{p}{1-p} \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} \quad (11)$$

2) フィードフォワード型の工程: その 2

図 7 のようなコンピュータシステムの工程は生産工程と同じモデルとなる。待ち行列モデルをジャクソンの計算手順により求める。外部から λ_{04} のデータが入出力装置 I/O に入り、そのままコンピュータの CPU で計算される。そのあとで 2 つのディスクに入る。したがって $M=4$ の FCFS システムになる。それぞれの節点における平均

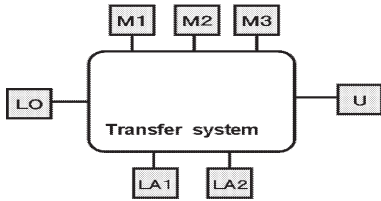


Figure 8: Layout of a simple production system

システムは図9のような待ち行列システムに変換できる。従

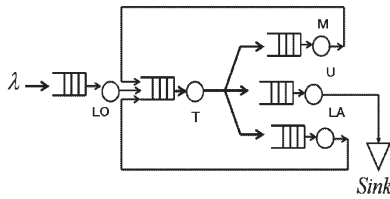


Figure 9: Open network model of production system

来、このような問題は既存のシミュレーションソフトを用いて解析することが多い。しかし、待ち行列モデルにより理論的に解く事ができる。

4 閉鎖型ネットワーク待ち行列

4.1 閉鎖型ネットワークの例と解析

閉鎖型 (Closed Network) 待ち行列は外部からジョブや客が到着がなく、かつネットワークシステムから外部への出発もない [10][11][12][18]。すなわち、システムとして閉じたシステムである。この問題はコンピュータのバッチ処理に適用されてきた。このような条件の問題は物流センターにおけるフォークリフトの稼働、オーダピッキング作業などに見られる。工場では機械の修理問題やデータの測定問題がある。しかし、この問題をさらに拡張すると、開路ネットワーク問題も閉鎖ネットワークにおきかえることもできる。

1) 閉鎖型フレキシブル生産システム

図 10 は階層型のフレキシブル生産システムである [15][16][18]。システムは次のような要素から構成されている。

- 1) 2 台の積載と取り出しステーション LU : Load/Unloadstation,
- 2) 2 台の旋盤 (LA),
- 3) 異なった工具を持つ 3 台のマシニングセンター (M₁, M₂, M₃),
- 4) 8 台の搬送装置 (T)。生産システムは 3 つの異なる生産階層に分けられて生産している。1 番目の流れはワークが LU ステーションでパレットに積載される。そして、搬送装置により旋盤が機械 1 に移動する。最終的には LU ステーションに来てワークは離される。この FMS システム

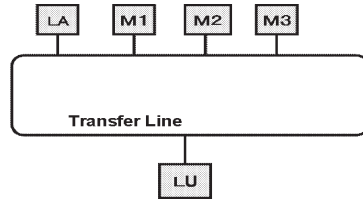


Figure 10: Layout of a closed multiclass model

の 1 番目の動きは図 11 のような待ち行列システムに変換できる。以下、2, 3 番目の流れについてネットワークを作成する。そして、閉鎖の解析手段により計算をおこなう。

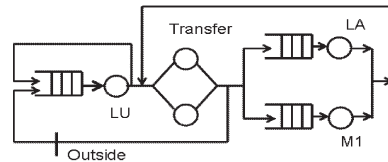


Figure 11: Closed queueing model of FMS

2) 閉鎖型ネットワークの解析

閉鎖型ネットワークの解析はつぎのような条件をもうける。

- 1) M は節点の数で、 K は閉鎖ネットワークのジョブ数で k_1, k_2, \dots, k_N はネットワークのジョブの状態を示す。
- 2) m_i は節点 i における平行したサーバ数。
- 3) すべてのジョブや客は節点 i に到着して、そこで指数分布のサービス μ_i を受ける。
- 4) p_{ij} は i 番目の節点でのサービス終了後に j 番目の節点に移動するジョブの分岐する確率。
- 5) n_i は節点 i でのジョブの数。

閉鎖型システムにおける到着率 λ_i は外部からの到着はない

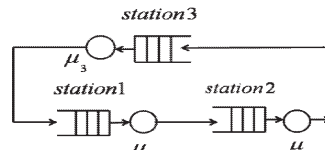


Figure 12: Closed network

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^M \lambda_j p_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

ここでは到着率 λ_i のかわりに e_i という記号を用いる。閉鎖型では待ち行列の到着率 λ_i や実際の利用率 λ_i/μ_i は利用できない。 e_i はジョブが i 番目の節点にたいしての平均訪問回数を定義する。これは相対到着率という。 $e_i = 1$ とは節点 i への相対的な訪問回数を示す。

$$e_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$$

そして、閉鎖型待ち行列は次式になる。この計算は一般に $e_1 = 1$ とおいて求める。

$$e_i = \sum_{j=1}^M e_j P_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (12)$$

4.2 性能評価

1) 限界確率 $P_i(n)$:

閉鎖ネットワークにおいて、 i 番目の節点の限界確率 $P_i(n)$ は、この節点が $n_i = n$ のジョブを含む確率のことで、つぎのように計算する。

$$P_i(n) = \sum_{\substack{\sum_{j=1}^M n_j = N, \\ n_i = n}} P(n_1, n_2, \dots, n_M)$$

ここで、 $P_i(n)$ はすべての状態 (n_1, n_2, \dots, n_M) , $0 \leq n_i \leq N$ の確率の合計である。そして、 $\sum_{j=1}^M n_j = N$ で、 n は i 番目のジョブの数である。このとき次式がなりたつ

$$\sum_{\sum_{j=1}^M n_j = N} P(n_1, n_2, \dots, n_M) = 1$$

2) 利用率 ρ_i :

単一のサーバ i での利用率は次式になる。

$$\rho_i = \sum_{k=1}^{\infty} P_i(k) \quad \text{または} \quad \rho_i = 1 - P_i(0), \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{m_i \mu_i}$$

3) 到着率 λ_i :

ネットワーク型では到着率はスループット (*Throughput*) とも呼ばれている。

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{\infty} P_i(k) \mu_i(k)$$

4) 平均客数 (平均ジョブ数):

節点 i におけるジョブの平均数。

$$L_i = \sum_{k=m_i}^{\infty} k P_i(k)$$

5) 平均待ち行列:

$$L_{q,i} = \sum_{k=1}^{\infty} (k - m_i) P_i(k)$$

6) 平均待ち時間:

$$W_i = \frac{L_i}{\lambda_i}$$

7) 行列待ち時間:

$$W_{q,i} = W_i - \frac{1}{\mu_i}$$

4.3 ゴードン・ニューエルの計算法

ゴードン (*Gordon*) とニューエル (*Newell*) は閉鎖型待ち行列における効率のよい計算法を提案している。ゴードン・ニューエルの計算法は局所バランス法や全体バランス法よりも優れている[18]。

基本式

Gordon と Newell は閉鎖型ネットワークにおける待ち行列

で、それぞれのネットワークにおえる確率はつぎのような積形式であたえられることを示した。

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \frac{1}{G_M(N)} \prod_{i=1}^M \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^{n_i}$$

ここで $G_M(N)$ は正規化定数で n_i は節点 i におけるジョブ数 (客数) である。

説明

この式は開放型ネットワークでの証明と同じようにしてできる。ここで外部からの到着はないため、 $\lambda_{0i} = 0$ と $1 - \sum_{j=1}^M P_{ji} = 0$ となる。したがって次式になる。

$$\sum_{i=1}^M \mu_i = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i P_{ji} \rho_i^{-1} \rho_j$$

開放型ネットワーク待ち行列の関係からつぎのような局所バランスの方程式がなりたつ。

$$\begin{aligned} & P(n_1, n_2, \dots, n_M) \\ &= \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right) \left(\frac{e_j}{\mu_j} \right)^{-1} P(n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_M) \end{aligned}$$

この式に開放型ネットワーク待ち行列の関係をもちいると次式になる

$$\begin{aligned} & P(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_M) \\ &= P(0, 0, \dots, 0) \prod_{i=1}^M \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^{n_i} = \frac{1}{G_M(N)} \prod_{i=1}^M \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \end{aligned}$$

$G_M(N)$ は正規化の定数で、 $P(0, 0, \dots, 0)$ のかわりにもちい、つぎのようになる

$$G_M(N) = \sum_{\sum_{i=1}^M n_i = N} \prod_{i=1}^M \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \quad (13)$$

$G_M(N)$ は待ち行列の数とネットワークにける総ジョブ数の関数になっている。

4.3.1 ゴードン・ニューエルの計算手順

ゴードン・ニューエルの計算は以下のようにおこなう。

手順 1 : すべての節点 $i = 1, 2, \dots, M$ にたいして次式の e_i をもとめる。計算は $e_1 = 1$ とする。

$$e_i = \sum_{j=1}^M e_j P_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

手順 2 : すべての $i = 1, 2, \dots, M$ にたいして次式を計算する。

$$R_i(n_i) = (e_i / \mu_i)_i^{n_i}$$

手順 3 : (13) 式から $G_M(N)$ を次式で計算する。

$$G_M(N) = \sum_{\sum_{i=1}^M n_i = N} \prod_{i=1}^M R_i(n_i)$$

手順4：ネットワークの確率を計算する。

$$P(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_M) = \frac{1}{G_M(N)} \prod_{i=1}^M \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^{n_i}$$

4.4 たたみ込み計算法

閉鎖型の計算で代表的な方法がたたみ込み計算法 (*Convolution algorithm*) と平均値分析法 (*Mean value analysis*) である。ここではたたみ込み計算法のアルゴリズムについて検討する。 M 個のネットワークにおける積形式の閉鎖型待ち行列理論では次式で確率を計算する [4][5][18]。

$$\pi(k_1, k_2, \dots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^M F_i(k_i)$$

ここで $G(K)$ は次のようになる。

$$G(K) = \sum_{\sum_{i=1}^M k_i = K} \prod_{i=1}^M F_i(k_i)$$

さらに $F_i(k_i)$ は次式になる。

$$F_i(k_i) = \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^{k_i} \frac{1}{\beta_i(k_i)}$$

この $G(K)$ にたいして $G_n(k)$ を $n = 1, 2, \dots, N, k = 0, \dots, K$ の条件で次式を定義する

$$G_n(k) = \sum_{\sum_{i=1}^M k_i = k} \prod_{i=1}^M F_i(k_i)$$

正規化された値を $\mathbf{G}(\mathbf{K}) = \mathbf{G}_N(\mathbf{K})$ とする。そして次式のようなたたみ込み計算をする。

$$G_n(k) = \sum_{j=1}^k F_n(j) \cdot G_{n-1}(k-j)$$

ここで初期条件として $n = 1$ にたいして $G_1(k) = F_1(k)$ とする。以上から評価値は次のような計算式になる。

1) 限界確率

$$\pi_i(k) = \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \cdot \frac{1}{G(K)} \cdot \left(G(K-k) - \frac{e_i}{\mu_i} G(K-k-1)\right)$$

2) ノード i の出力量

$$\lambda(K) = \frac{G(K-1)}{G(K)}, \quad \lambda_i = e_i \cdot \frac{G(K-1)}{G(K)}$$

3) ノードの利用率

$$\rho_i = \frac{e_i G(K-1)}{m_i \mu_i G(K)}$$

4) ジョブの平均数

$$\bar{K}_i = \sum_{k=1}^K \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \cdot \frac{G(K-k)}{G(K)}$$

参考文献

- [1] 森村英典、大前義次, "応用待ち行列"、日科技連、(2000), p.83
- [2] 紀一誠, "待ち行列ネットワーク"、朝倉書店、(2002), p.73
- [3] D.Gross and C.M.Harris, "Queueing Theory", Wiley-International, (1998)
- [4] N.C.Hock, "Queueing Modeling Fundamentals", John-Wiley and Sons, (1996)
- [5] L.Kleinrock, "Queueing Systems, Vol.1", John-Wiley and Sons, p.10-395, (1996)
- [6] G.F.Lawler, "Introduction to Stochastic Process", Chapman and Hill, p.53, (1995)
- [7] J.L.Jain, S.G.Mohanty and W.Bohm, "A Course of Queueing Models", Chapman and Hill/CRC, p.84, (1996)
- [8] B.D.Bundy, "Frontiers in Queueing", Arnold, p.139, (1996)
- [9] J.H.Dshalalow, "Queueing Theory", CRC Press, p.3-116, p.117-197, (1997)
- [10] R.Nelson, "Probability, Stochastic Process, and Queueing Theory", Springer-Verlag, p.429-501, (1995)
- [11] K.S.Trivedi, "Probability and Statistics with Reliability, Queueing and Computer Science Applications", John Wiley and Sons, p.337, (2002)
- [12] L.Breuer and D.Baum, "An Introduction to Queueing Theory", Springer
- [13] W.W.J.Stewart, "Numerical Solution of Markov Chains", Princeton University Press, (1994)
- [14] L.Breuer and D.Baum, "An Introduction to Queueing Theory", Springer, p.62, (2005)
- [15] A.Altiok, "Performance Analysis of Manufacturing Systems", Springer, (1996)
- [16] G.N.Krieg, "Kanban-controlled Manufacturing Systems", Springer, p.36, (2003)
- [17] N.U.Prabhu, "Foundation of Queueing Theory", Kluwer Academic Publisher, p.36, (1997)
- [18] G.Bolch, S.Greiner, H.Meer and K.Trivedi, "Queueing Networks and Markov Chains", p.263-420, (1998)