総説

作用素のアルスゲ変換について

山崎　文明*

On Aluthge transform of operators

Takeaki YAMAZAKI *

1. はじめに

本論は,ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有界線形作用素上のアルスゲ変換と呼ばれる変換についての話題をまとめたものである.以下,ヒルベルト空間上の有界線形作用素のことを単に作用素とよぶことにする.なお,以下の文章において,多くの事柄は有限次元の行列に対しても成り立つので,専門以外の読者は行列に関する話題として読んでいただければ幸いです.

最初に正値作用素の定義を紹介しよう.

定義1.1. 作用素Aが正値作用素であるとは,任意のベクトル$\chi \in \mathcal{H}$に対して,

$$(Ax, x) \geq 0$$

が成り立つ事である.ここで,（・,・）は内積とする.

上の定義は,行列の場合では**固有値がすべて正である対称行列**と言い換えることができる.これより,二つの作用素A, Bに対して,

$$A \geq B$$

とは, $A-B \geq 0$ のことであり, $A-B$ が対称行列で固有値がすべて正であることと同値である. $\alpha \geq 0$ としたとき,任意の正値作用素Aに対して正値作用素A^{α}が一意に定まる事が知られている.これは行列の場合では,次のように考えればよい:正値行列Aは,固有値がすべて正の対称行列であるので,あるユニタリ行列Uを用いて次のように対角化することができる.

$$A = U^*\Lambda U = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} U,$$

ここで, $\lambda_i \geq 0$ ($i=1, 2, \cdots, n$)は行列Aの固有値とする.これを踏まえてA^{α}は

$$A^{\alpha} = U^*\Lambda^{\alpha} U = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1^{\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{\alpha} \end{pmatrix} U$$

と定義される.特に,任意の作用素Tに対して,その共役転置作用素T^*とTとの積の1/2乗,つまり

$$|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$$

と定義される作用素は重要である(これを複素数の絶対値と同様に,**作用素の絶対値**と呼ぶ).

さて,本題に入る前に,次の定理を紹介しよう.次の定理は複素数の極形式$z = re^{i\theta}$ のいわば作用素版とみなすことができる.

定理1.1 (作用素の極分解). 任意の作用素Tに対して,次の二つの条件を満たす部分等距離作用素Uが**一意**に存在する

*専任講師,数学教室
Lecturer, Dept. of Mathematics

$$\text{(i) } T = U|T| \quad \text{(ii) } \ker T = \ker U.$$

なお, Uが部分等距離作用素とは, $UU^*U = U$ を満たす作用素のことであり, $\ker T = \{ \chi \in \mathcal{H}: T\chi = 0 \}$である.

部分等距離作用素とは,ユニタリ作用素($U^*U = UU^* = I$)よりも弱い性質を持っている作用素で,上の定義($UU^*U = U$)より,$(UU^* - I)U = 0$をみたし,また$(U^*U - I)U^* = 0$もみたすことが知られている.つまり,UやU^*が右から掛けられている時に限り,ユニタリ作用素のような性質を持つ作用素である.

作用素の極分解は,もちろん行列の場合も行なう事ができる.

例1.2. 行列Tを

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする.このとき,

$$T^*T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで,2×2 行列のケーリー・ハミルトンの公式より,

$$(T^*T)^2 - 5T^*T = 0$$

が成り立つ.よって,

$$T^*T = \frac{(T^*T)^2}{5} \iff (T^*T)^{1/2} = \frac{T^*T}{\sqrt{5}}$$
$$\Longrightarrow |T| = (T^*T)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

また,

$$\ker T = \{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \}.$$

であるので, Tの極分解は

$$T = U|T| = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

となっている.

なお,定理1.1 において,条件(ii)を満たさないような作用素であれば,一意でなく存在する.例えば上の例では,

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすれば, $T = V|T|$は成り立つ.

次に作用素の極分解$T = U|T|$を踏まえて,本論の主題となる**アルスゲ変換**の定義を紹介しよう.

定義1.2 (アルスゲ変換,[1]). 作用素Tの極分解を$T = U|T|$とする.このとき, T のアルスゲ変換$\widetilde{T}$ は次のように定義される.

$$\widetilde{T} \equiv |T|^{1/2} U |T|^{1/2}.$$

なお,アルスゲ変換は作用素の極分解にはこだわらず,$T = V|T|$と分解されるすべての場合において,$\widetilde{T} = |T|^{1/2} V |T|^{1/2}$ としてもよいことがすぐにわかる.

例1.3. 行列Tを

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

とする.このとき,

$$T^*T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

であるので,

$$|T| = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって, Tの極分解は

$$T = U|T| = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, Tのアルスゲ変換は,

$$\widetilde{T} = |T|^{1/2} U |T|^{1/2}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

本論では,アルスゲ変換について,これまでに示されてきた結果を紹介する.

2. 基本的な性質

この節では,アルスゲ変換の基本的な性質を紹介しよう.最初にすぐに分かる性質として,つぎの性質があげられる.

$$\sigma(\widetilde{T}) = \sigma(T), \quad \|\widetilde{T}\| \leq \|T\|.$$

ここで,$\sigma(T)$は作用素Tのスペクトル(Tが行列ならば固有値の集合), $\|T\|$は

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

で定義される作用素ノルムとする.

例2.1. 行列Tを例1.3 のものとする,つまり

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

すると,

$$\sigma(T) = \{0, 1\}, \|T\| = 2$$

であることがすぐに分かる.

一方,例1.3 にもあったように,

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので,

$$\sigma(\widetilde{T}) = \{0, 1\} = \sigma(T),$$
$$\|\widetilde{T}\| = 1 < 2 = \|T\|$$

がすぐわかる.

アルスゲ変換は,非正規作用素の研究に対して非常に有用である.特に以下の非正規作用素のクラスの研究をする際にアルスゲ変換が非常によく用いられている.

定義 2.1. (i) T は hyponormal $\iff T^*T \geq TT^*$.

(ii) $p > 0$ に対して T は p-hyponormal

$$\iff (T^*T)^p \geq (TT^*)^p.$$

(iii) T は w-hyponormal $\iff |\widetilde{T}| \geq |T| \geq |\widetilde{T}^*|$.

(iv) T は class A $\iff |T^2| \geq |T|^2$.

これらの作用素のクラスは,いずれも正規作用素よりも弱い性質をもっており,有限次元の行列には見られないクラスである(つまり有限次元の行列が上の性質の一つでも満たしていれば,それは正規行列になってしまう).

なお,これらの作用素のクラスの包含関係は以下のようになっている.$0<p\leq q$ とする.

$$\{\text{正規作用素}\} \subset \{q\text{-hyponormal}\}$$
$$\subset \{p\text{-hyponormal}\}$$
$$\subset \{w\text{-hyponormal}\} \subset \text{class A}.$$

例2.2 ([4]).正値2 × 2 行列A, B に対して,作用素Tを次のように定義する.

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ \ddots & 0 & & & & & \\ & B & 0 & & & & \\ & & B & \boxed{0} & & & \\ & & & A & 0 & & \\ & & & & A & 0 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ここで,$\boxed{0}$は行列T の(0, 0)成分とする.このとき,次が成り立つ.

(i) T が正規作用素 $\iff A = B$.

(ii) T が p-hyponormal $\iff A^{2p} \geq B^{2p}$.

(iii) T が w-hyponormal $\iff (B^{1/2}AB^{1/2})^{1/2} \geq B$.

(iv) T が class A 作用素 $\iff (BA^2B)^{1/2} \geq B^2$.

実際に,2 × 2 行列A, B を次のように決めると,それぞれのクラスに属する作用素を得る事ができる.

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, $A \geq B \geq 0$ (つまり, A-B の固有値がすべて正)なので, T は1/2-hyponormal.

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^4, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^4$$

とすると,$(B^{1/2}AB^{1/2})^{1/2} \geq B$ (つまり,$(B^{1/2}AB^{1/2})^{1/2}$-B の固有値がすべて正)なので,T は w-hyponormal.

(iii)

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^2, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^2$$

とすると,$(BA^2B)^{1/2} \geq B^2$ (つまり,$(BA^2B)^{1/2}$-B^2の固有値がすべて正)なので, T はclass A 作用素.

また,上の例において, (iii)の例は w-hyponormal や1/2-hyponormal にならず, (ii)の例は1/2-hyponormalにはならないが,classA になることも確認できる.(i)は w-hyponormal やclass A にもなることがすぐにわかる.これらの行列の計算はコンピュータソフトMathematicaで行なった.

つまり,正規作用素が一番良い性質を持っていて,class A 作用素が一番弱い性質を持っている.これらの作用素のクラスの研究の一番大きな目的は,弱い性質を持った作用素のクラスがどの程度正規作用素の持つ性質を受け継いでいるのかを調べる事にある.よって,ある作用素をより良い性質を持つ作用素へ変換することができれば,もとの作用素も良い性質を持つ可能性を考える事ができる.この変換をアルスゲ変換が実現している.

定理2.3 **([1])**.実数$p \in (0, 1]$に対して, T をp-*hyponormal* 作用素とする.このとき,次が成り立つ.

(i) $p \in (0, 1/2]$ ならば, T は $(p + 1/2)$-*hyponormal*.

(ii) $p \in [1/2, 1]$ ならば, $\widetilde{T}$ は *hyponormal*.

また w-hyponormal の定義より

$$(\tilde{T}^*\tilde{T})^{1/2} = |\tilde{T}| \ge |T| \ge |\tilde{T}^*| = (\tilde{T}\tilde{T}^*)^{1/2}$$

がすぐに得られる事より, w-hyponormal 作用素のアルスゲ変換は1/2-hyponormal 作用素になることが分かる.なお,$\tilde{T}$ はこれ以上良い性質をもつ作用素のクラスに属するとは限らない(つまり,これ以上良い性質を持つクラスに属さないような例が存在する)ことも知られている[11].

また,$\sigma(\tilde{T}) = \sigma(T)$であるので,アルスゲ変換は,スペクトルを保存したまま,良い性質をもつ作用素に変換することがわかる.

例2.4. 正値2 × 2 行列A, B を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これを用いて,作用素T を例2.2 と同様に定義する.

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ \ddots & 0 & & & & & \\ & B & 0 & & & & \\ & & B & \boxed{0} & & & \\ & & & A & 0 & & \\ & & & & A & 0 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ここで, $\boxed{0}$ は行列Tの(0, 0)成分とする.すると, $A^{1/2} \ge B^{1/2}$より($A \ge B$ にはならない),例2.2 からTは1/4-hyponormalとなる.よって定理2.3 より,$\tilde{T}$ は(1/4 +1/2)-hyponormal (=3/4-hyponormal)になるが,hyponormal (=1-hyponormal)にはならない.実際,アルスゲ変換の定義に従って計算をすると,

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ \ddots & 0 & & & & & \\ & B & 0 & & & & \\ & & A^{1/2}B^{1/2} & \boxed{0} & & & \\ & & & A & 0 & & \\ & & & & A & 0 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となり, hyponormal の定義に従って計算すると,

$$\tilde{T} \text{ は hyponormal} \iff \begin{cases} B^{1/2}AB^{1/2} \ge B^2 \\ A^2 \ge A^{1/2}BA^{1/2} \end{cases}$$

となるが,上の二つの不等式の二番目の不等式が成り立たない事がすぐに分かる.(実際にはA^2-$A^{1/2}BA^{1/2}$の固有値が正にならないことがすぐに分かる).よって, $\tilde{T}$ は hyponormal にならないので,この例が定理2.3 の評価がこれ以上良くならないことの一つの例になっていることが分かった.

さて,一般に$\sigma(\tilde{T}) = \sigma(T)$は常に成り立つが, $\tilde{T} = T$が成り立つことはないのだろうか?その問題の一つの解答が次の結果である.

定理2.5 ([6, 8]). 作用素Tの極分解を$T = U|T|$とすると,以下の条件は互いに同値になる.

(i) $\tilde{T} = T$.
(ii) $T^*TT = TT^*T$.
(iii) $U|T| = |T|U$.

特にTが有限次元行列の場合,上の条件(ii)は$T^*T=TT^*$(つまりTは正規行列)と置き換えることができる.

次に,アルスゲ変換の数域についての結果を紹介しよう.最初に次の定義を紹介しよう.

定義2.2 (数域). 作用素Tの数域$W(T)$は次のように定義される.

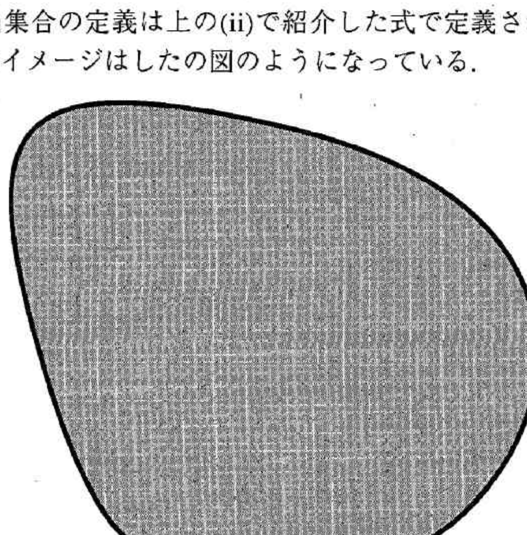
$$W(T) = \{(Tx, x) : x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1\}.$$

数域の基本的な性質として,次のことがあげられる.

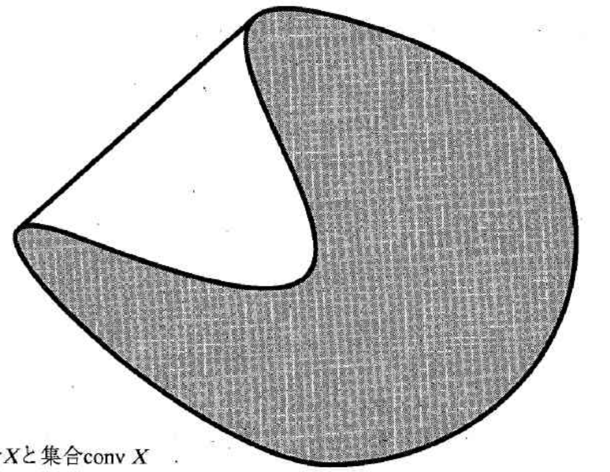
(i) $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.
(ii) $W(T)$ は凸集合 (つまり, $\lambda, \mu \in W(T) \Longrightarrow$ 任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して, $\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu \in W(T)$).

ここで,集合Xに対して$\overline{X}$をXの閉包とする.また,$\overline{W(T)}$は凸集合なので,$\sigma(T)$を含む最小の凸集合(これをconv $\sigma(T)$と書く)も含むことがすぐに分かる.

なお,凸集合の定義は上の(ii)で紹介した式で定義されるが,そのイメージはしたの図のようになっている.



凸集合のイメージ
(へこみのない集合)

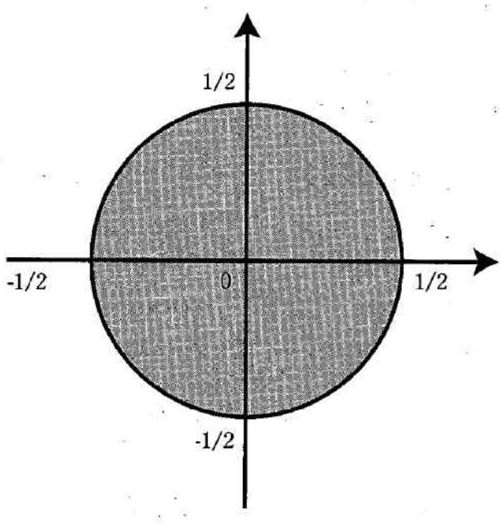

集合Xと集合conv X

ここで,集合X に対して, conv X とは, X を含む最小の凸集合のことを指す.

例2.6. 行列Tを

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, $W(T)=\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2 \}$となる.



Tの数域$W(T)$

さて,
スペクトル半径: $r(S)=\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(S)\}$,
数域半径: $w(S)=\sup\{|\lambda| : \lambda \in W(S)\}$
とすると, $r(S) \leq w(S) \leq \|S\|$が成り立つ.また, $\sigma(\widetilde{T})=\sigma(T)$より$r(\widetilde{T})=r(T)$, $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$であることも既に知られている.よって, $w(\widetilde{T})$と$w(T)$の関係を調べる事が次の課題となってくる.

定理2.7 ([6, 7, 9]). 任意の作用素Tに対して,

$$\overline{W(\widetilde{T})} \subseteq \overline{W(T)}.$$

なお,一般に無限次元のヒルベルト空間上の作用素Tに対しては, $W(T)=\overline{W(T)}$とは限らないが, Tが有限次元の行列であった場合には$W(T)=\overline{W(T)}$が成り立つ.

例2.8. 行列Tを

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, $W(T)$は0, 1 を焦点とし,長径 $\sqrt{2}$ 短径1の楕円となる.

一方

$$T^*T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって2×2 行列のケーリー・ハミルトンの公式より,

$$(T^*T)^2 - 2T^*T = 0.$$

が成り立つ.よって,

$$T^*T = \frac{(T^*T)^2}{2} \iff (T^*T)^{1/2} = \frac{T^*T}{\sqrt{2}}$$
$$\Longrightarrow |T| = (T^*T)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

また,

$$\ker T = \{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C}\}.$$

であるので, Tの極分解は

$$T = U|T| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

さらに,2×2 行列のケーリー・ハミルトンの公式を用いると,

$$|T|^2 - \sqrt{2}|T| = 0$$

が成り立つ.よって,

$$|T| = \frac{|T|^2}{\sqrt{2}} \iff |T|^{1/2} = \frac{|T|}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{2^{3/4}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

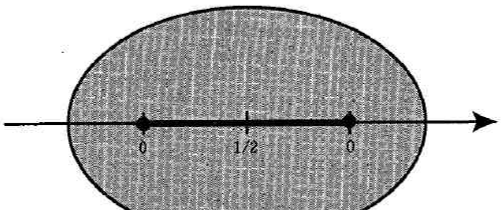
であるので,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T} &= |T|^{1/2}U|T|^{1/2} \\
&= \frac{1}{2^{3/4}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2^{3/4}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって, $W(\widetilde{T})=[0,1]$であり,また,$\sigma(T)=\{0,1\}$であることがわかるので,

$$\sigma(T) \subset W(\widetilde{T}) \subset W(T)$$

が成り立つ.



$\sigma(T)=\{0,1\}$, $W(\widetilde{T})=[0,1]$, $W(T)$は楕円

この例のように,一般には$W(\widetilde{T})=W(T)$とはならないが,このような性質を持つ作用素は非常に面白い性質を持つ事がわかる.

定理2.9 ([2]). $n\times n$ 行列T に対して,

$$W(\widetilde{T}) = W(T) \iff W(T) = conv\ \sigma(T).$$

定理2.9 についての,より詳しい意味については次の節でまた触れる事にする.

最近では,アルスゲ変換の性質をよりよく調べるために,アルスゲ変換自身の極分解も得られている.

定理2.10 ([5]). 任意の作用素Tに対して,$\widetilde{T}$の極分解は

$$\widetilde{T} = VU|\widetilde{T}|$$

と表される.ただし, U, Vはそれぞれ極分解$T=U|T|$, $|T|^{1/2}|T^*|^{1/2}=V||T|^{1/2}|T^*|^{1/2}|$をみたす部分等距離作用素とする.

3. 繰り返しアルスゲ変換

この節では,作用素Tにアルスゲ変換を繰り返し施したものがどのような性質を持つのかを紹介する.

定義3.1 (繰り返しアルスゲ変換,[6,8]). 任意の作用素Tに対して,n回繰り返しアルスゲ変換を次のように表す.

$$\widetilde{T_n} = \widetilde{(\widetilde{T_{n-1}})}, \quad \widetilde{T_0} = T.$$

例3.1. 作用素Tを,

$$T = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

とすると,アルスゲ変換の定義より

$$\widetilde{T_1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \widetilde{T_2} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

前節で紹介したアルスゲ変換の性質から,繰り返しアルスゲ変換については次のような一連の不等式や包含関係が成り立つ事がすぐに分かる.

(i) スペクトル : $\sigma(T)=\sigma(\widetilde{T})=\cdots=\sigma(\widetilde{T_n})$.
(ii) スペクトル半径 : $r(T)=r(\widetilde{T})=\cdots=r(\widetilde{T_n})$.
(iii) 数域 : $\overline{W(T)}\supseteq\overline{W(\widetilde{T})}\supseteq\cdots\supseteq\overline{W(\widetilde{T_n})}$.
(iv) 数域半径 : $w(T)\geq w(\widetilde{T})\geq\cdots\geq w(\widetilde{T_n})$.
(v) 作用素ノルム: $\|T\|\geq\|\widetilde{T}\|\geq\cdots\geq\|\widetilde{T_n}\|$.

また,任意の作用素の対して$r(T)\leq w(T)\leq\|T\|$が成り立つ事を踏まえると,次のことが成り立つことがすぐに分かる.

$$\|T\|\geq\|\widetilde{T}\|\geq\cdots\geq\|\widetilde{T_n}\|\geq r(\widetilde{T_n})=r(T).$$

最初に,この不等式に関連した結果を紹介しよう.

定理3.2 ([8]). 作用素Tに対して,$\|T\|=r(T)$であるための必要十分条件は,すべての自然数nに対して

$$\|T\|=\|\widetilde{T_n}\|$$

が成り立つ事である.

一般の作用素に対しては次の結果が示されている.

定理3.3 ([10]). 任意の作用素Tに対して,

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{T_n}\|=r(T).$$

一方,数域に関しては,次の包含関係が成り立つ事がすぐに分かる.

$$
\begin{aligned}
&\overline{W(T)}\supseteq\overline{W(\widetilde{T})}\supseteq\cdots\supseteq\overline{W(\widetilde{T_n})} \\
&\qquad\supseteq \mathrm{conv}\ \sigma(\widetilde{T_n}) = \mathrm{conv}\ \sigma(T).
\end{aligned}
$$

そして,この包含関係に関連した結果として,定理3.2 と定理3.3 に対応した結果を次に紹介しよう.

定理3.4 ([2]). 任意の作用素T に対して,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}\overline{W(\widetilde{T_n})} = conv\ \sigma(T).$$

なお,定理3.2 に対応した結果は前節の定理2.9 にすでに示されている.つまりアルスゲ変換の数域は,作用素ノルムと比べてより興味深い性質をもっていることが分かる.ちなみに,例3.1 のTでは, $\|T\| = \|\widetilde{T}\| =1$ であるが, $r(T)=0<1= \|T\|$となって,定理3.2 は,定理2.9 のようにきれいな形にならないことがすぐにわかる.

最後に,繰り返しアルスゲ変換自身の収束発散についての結果を紹介しよう.

定理3.5 ([3]). 任意の2 × 2 行列T に対して,$\widetilde{T}_n$ は正規行列に収束する.

定理3.5 では, Tを2×2 行列に限定をしているが,これはまだ一般的な$n\times n$ 行列での証明が得られていない事による.なお,無限次元の作用素では定理3.5 のようなことは一般に成り立たない事が知られている.

例3.6 ([12]). 作用素Tを以下のように定義する.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_0 & 0 & & & \\ & a_1 & 0 & & \\ & & a_2 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ここで

$$a_k = \begin{cases} 1 & k \in [4^{2m-1}+1, 4^{2m}], \\ e & k \in [0,4] \text{ or } k \in [4^{2m}+1, 4^{2m+1}]. \end{cases}$$

とすると, $\widetilde{T}_n$ は収束しない.

この計算は複雑なので,詳しくは述べないが,アルスゲ変換の定義に従って計算すると, $\widetilde{T}_n$ は次のようになる.

$$\widetilde{T_n} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_0^{(n)} & 0 & & & \\ & a_1^{(n)} & 0 & & \\ & & a_2^{(n)} & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ここで, $a_k^{(n)}$を以下のように定義する.

$$a_k^{(n)} = \left(\prod_{j=k}^{k+n} a_j^{\binom{n}{j}}\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

特に, $a_0^{(n)}$の対数をとると,以下のようになり,上の例では収束しない事がわかる.

$$\log a_0^{(n)} = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\log a_j.$$

参考文献

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* 0 <*p*<1, Integral Equations Operator Theory, 13 (1990), 307-315.

[2] T. Ando, *Aluthge transforms and the convex hull of the eigenvalues of a matrix*, Linear and Multilinear Algebra, 52 (2004), 281-292.

[3] T. Ando and T. Yamazaki, *The iterated Aluthge transforms of a 2-by-2 matrix converge*, Linear Al-gebra Appl., 375 (2003), 299-309.

[4] T. Furuta, M. Ito and T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes*, Scientiae Mathematicae, 1 (1998), 389-403.

[5] M. Ito, T. Yamazaki and M. Yanagida *On the polar decomposition of the Aluthge transformation and related results*, J. Operator Theory, 51 (2004), 303-319.

[6] I.B. Jung, E. Ko and C. Pearcy, *Operators and their Aluthge transformations*, Integral Equations Operator Theory 37 (2000), 437-448.

[7] P.Y. Wu, *Numerical range of Aluthge transform of operator*, Linear Algebra Appl., 357 (2002), 295-298.

[8] T. Yamazaki, *Characterizations of* log *A* ≥ log *B and normaloid operators via Heinz inequality*, I n-tegral Equations Operator Theory, 43 (2002), 237-247.

[9] T. Yamazaki, *On numerical range of the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl., 341 (2002), 111-117.

[10] T. Yamazaki, *An expression of spectral radius via Aluthge transformation*, Proc. Amer. Math. Soc., 130 (2002), 1131-1137.

[11] M. Yanagida, *Some applications of Tanahashi's re-sult on the best possibility of Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., 2 (1999), 297-305.

[12] M. Yanagida, *On convergence to n-th Aluthge transformation*, private communication.