

## 磁場と磁性体のエネルギー

神奈川大学理学部情報科学科 石岡俊也

### abstract

本稿は、磁場と磁性体のエネルギーについての筆者の理解をまとめたものである。要点を10の命題にまとめ、それらが教科書でどう扱われているか、筆者の考えと対比することにより、筆者の主張が明白となるよう心掛けた。

### 1. はじめに

物理学を学んだ者の一般教養として、磁場のエネルギーなどよく理解しているものと思いついでいたが、2002年に日本物理学会誌上で行なわれた阿部-白鳥論争に接して、そうではないことに気づかされた。理解出来ていないことが気になり、色々と考えを巡らすこととなったが、最近になってようやく理解出来たと思えるようになった。本稿は、それをまとめたものである。

磁気エネルギーが分っていなかった者が筆者のみならば、本稿を書く意味はないであろう。しかし、そのようには思えない。日本物理学会誌上で論争が行なわれたという事実が、統一された理解が得られていないことを証明しているし、また、教科書の記述に筆者は色々と不満を感じることがあるからである。

磁気エネルギーの何たるかを理解する上で重要と思われることを、10の命題として整理して提示する。そして、それらが教科書でどう扱われているか紹介し、場合によっては批判を述べることを通して、筆者の考えを正確に説明したいと思う。参照する教科書は、筆者の手元にある以下のものである。

[Feynman] The Feynman Lectures on Physics, vol. II (Addison-Wesley 1989)

[Jacson] J. D. Jacson: 電磁気学(上) 原書第3版 西田稔訳 (吉岡書店 2002)

[LLP] L. D. Landau, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii: Electrodynamics of Continuous Media (Pergamon Press 1984)

[高橋] 高橋秀俊: 電磁気学 (裳華房 1959)

[平河] 平河浩正: 電磁気学 (培風館 1968)

[砂川] 砂川重信: 理論電磁気学 (紀伊国屋書店 1973)

[太田] 太田浩一: 電磁気学I, II (丸善 2000)

上記以外に立派な教科書は多々あると思うが、省略させていただく。また、手元にあるという意味では、絵がふんだんに入った大学生用教科書が数多くあるが、それも省略させていただく。

## 2. 概要

筆者の考えの要点を先ず知っていただくため、10の命題を、詳しい説明抜きで提示することから始める。

電荷間に働く力は、電荷の位置座標を変数とするポテンシャルエネルギー  $U_Q$  の勾配  $\times (-1)$  で表される。このポテンシャルエネルギーの実体は、電荷のまわりの空間に創られている電場のエネルギー  $U_E$  (密度  $\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$ ) である：

$$U_Q = U_E. \quad (1)$$

すなわち、電場のエネルギーが減少する方向に電荷は力を受ける。しからば、電流間に働く力の場合どうか。

**命題1** 電流間に働く力のポテンシャルエネルギー (電気力学ポテンシャル)  $U_I$  は、電流がまわりの空間に創りだしている磁場のエネルギー  $U_B$  (密度  $\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$ ) ではなく、その符号を逆にしたものである：

$$U_I = -U_B. \quad (2)$$

すなわち、磁場のエネルギーの増大する方向に電流は力を受けている！ では、電流間に働く力のポテンシャルエネルギー  $U_I$  の実体は何なのか。

**命題2** 電流間に働く力のポテンシャルエネルギー  $U_I$  は、磁場のエネルギー  $U_B$  と、電流電源のエネルギー  $U_S$  の和である：

$$U_I = U_B + U_S = -U_B. \quad (3)$$

上式の第二の等号は、 $U_S = -2 \times U_B$  の関係より得られる。

さて、磁性を担っているもの (これを以後 **磁気モーメント** と呼ぶことにする) は「磁荷」のダイポールではなく、電流である。

**命題3** 磁気モーメントの実体は、スピンの伴うものをも含め、荷電粒子の運動による電流である。

そして、外場  $\vec{B}$  中に置かれた磁気モーメント  $\vec{\mu}$  のポテンシャルエネルギーは

$$U_\mu = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (4)$$

である。このポテンシャルエネルギーの実体は、命題2によれば、場のエネルギー ( $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ )、外場  $\vec{B}$  の電流電源のエネルギー ( $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ )、そして、磁気モーメント  $\vec{\mu}$  の電流の電源の

エネルギー  $(-\vec{\mu} \cdot \vec{B})$  の和ということになる。では一体「磁気モーメント電流の電源のエネルギー」とは何なのか。これが問題である。

**命題4** 「磁気モーメント電流の電源エネルギー」の実体は、荷電粒子の運動エネルギーである。

すなわち、外場  $\vec{B}$  中で運動する荷電粒子の運動エネルギーは、 $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  のように外場  $\vec{B}$  に依存して変化する運動エネルギー成分を含んでいるのである。磁気モーメント間の相互作用、延いては磁石間に働く力は、これで初めて理解出来る。N極とS極が引き合うのは、近づくことで磁場のエネルギーが増大するが、それを上回る運動エネルギーの減少が両磁石内で起こるためである。

磁気モーメントを多数含んだマクロ磁性体を考えるために、「物質のエネルギー」について一般的に成立する基本的なことをいくつかの命題として整理して置こう。我々のいう物質とは、原子核と電子という荷電粒子の集合体であり、それら粒子は電磁場とのみ相互作用していると考えてよいものである。この点に注意するなら、以下の命題が成り立つことがわかる。

**命題5** 荷電粒子集合体のエネルギーは、電磁場のエネルギー（密度は  $\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$ ）と粒子の運動エネルギーの和である。

**命題6** 物質の内部エネルギーは、電子と原子核の運動エネルギーと、マイクロ電磁場（長波長フーリエ成分を取り除いた電磁場）のエネルギーの和である。

**命題7** 物質が占めている空間内にあるエネルギーは、物質の内部エネルギーとマクロ電磁場（マイクロ電磁場を取り除いた電磁場）のエネルギーの和である。

「マクロ」と「マイクロ」の境界は曖昧だが、「マイクロ」の典型的波長  $10^{-10} m$  に対し、「マクロ」は  $10^{-4} m$  以上と考えてよく、現実的にははっきりと区別可能と思われる。

物質の内部エネルギーの変化は、力学的作用  $(-pdV)$  や熱の流入  $(TdS)$  などにより起こるが、我々の問題にしているのは、マクロ電場やマクロ磁場の変化と関連して起こる変化である。

**命題8** 電氣的、もしくは磁氣的作用で生ずる物質の内部エネルギー密度  $u_{int}$  の変化は、マクロ電場  $\vec{E}$  がマクロ電流（密度） $\vec{j}$  に為す仕事で生ずる：

$$du_{int} = \vec{E} \cdot \vec{J} dt. \quad (5)$$

マクロ電流は、自由キャリアによる電流  $\vec{J}_{free}$ 、電気分極の変化による電流  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{P}$  および、磁化電流  $rot \vec{M}$  の3種類に分類出来る。したがって、

**命題9** 誘電体の内部エネルギー密度の変化は

$$du_p = \vec{E} \cdot d\vec{P} \quad (6)$$

で与えられ、磁性体の内部エネルギー密度の変化は

$$du_m = \vec{M} \cdot d\vec{B} \quad (7)$$

で与えられる。

この磁性体の内部エネルギーの変化は、命題4を見れば、磁気モーメントを担っている荷電粒子の運動エネルギーの変化のためであることが、理解出来る。磁性体の内部エネルギーの変化は  $\mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}$  ではないことに、注意されたい。

**命題10** 物質が占めている空間内の全エネルギー変化は、これにマクロ場のエネルギー変化を加えて、

誘電体:

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{E} + \vec{E} \cdot d\vec{P} = \vec{E} \cdot d\vec{D} \quad (8)$$

磁性体:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{B} - \vec{M} \cdot d\vec{B} = \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad (9)$$

となる。

以上が筆者の理解した磁場と磁性体のエネルギーについての概要である。次節以下で、やや丁寧に説明を行なう。

### 3. 磁場のエネルギーと電気力学ポテンシャル

磁場や磁性体のエネルギーを考えるにあたって、命題1の認識が出发点である。

**命題1** 電流間に働く力のポテンシャルエネルギー（電気力学ポテンシャル） $U_I$  は、電流がまわりの空間に創りだしている磁場のエネルギー  $U_B$ （密度  $\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$ ）ではなく、そ

の符号を逆にしたものである：

$$U_I = -U_B. \quad (10)$$

流れの向きを揃え、かつ密集しようとする電流の性質をこのポテンシャルエネルギーは記述している。この命題についての記述は、[Feynman]では§15-2、[LLP]では§33、[Jacson]では§5-16、[高橋]では§95、[平河]では§12-6、[太田]では§9-11にある。

我々の関心は物質の磁性にあるので電流としては小さな閉電流、電流の数は二つという簡単な系を想定して、命題1、2、3を説明していく。一般化はトリビアルである。

電流1の自己誘導係数を $L_1$ 、電流2のそれを $L_2$ 、相互誘導係数を $L_{12}$ とする。それぞれの電流の形と電流の大きさは一定で、ただ位置関係のみが変化する場合を想定する。すなわち、 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $I_1$ 、 $I_2$ が変化せず、 $L_{12}$ のみが変化する。全磁場のエネルギーは、二つの電流が独立にある場合を基準に採れば、

$$U_B = L_{12} I_1 I_2 \quad (11)$$

である。 $L_{12} I_2$ は電流2が作る磁場の電流1を貫く磁束なので、電流1の面積を方位も含めて $\vec{s}_1$ とすれば、 $\vec{s}_1 \cdot \vec{B}_2(\vec{x}_1)$ である。ただし、 $\vec{B}_2$ は電流2の作る磁場である。したがって、 $I_1 \vec{s}_1 = \vec{\mu}_1$ と置けば

$$U_B = \vec{\mu}_1 \cdot \vec{B}_2(\vec{x}_1) = \vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}_1(\vec{x}_2) \quad (12)$$

であることが分る。第2の等号の説明は不要であろう。

磁場 $\vec{B}$ 中で流れる電流の受ける力が単位長さあたり

$$\vec{f} = \vec{I} \times \vec{B} \quad (13)$$

であることを認めるならば、 $\vec{\mu}$ は $\vec{B}$ の向きに向こうとし、かつ、 $\vec{B}$ の強い方に引き寄せられる。これを表すポテンシャルエネルギーは

$$U_I = -\vec{\mu}_1 \cdot \vec{B}_2(\vec{x}_1) = -\vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}_1(\vec{x}_2) \quad (14)$$

となる。(12)式と(14)式より命題1が得られる。

電流1、2は定電流電源を内蔵しているものとしなければならない。電流1の電源について考えると、 $\vec{B}_2$ の磁束が無い状態を基準にとれば、電磁誘導に抗してなした仕事は $\vec{\mu}_1 \cdot \vec{B}_2(\vec{x}_1)$ である。同様に、電流2の電源は $\vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}_1(\vec{x}_2)$ だけ仕事をしている。この二つの仕事は、式(12)より、同じであり、両者合わせた電源のエネルギーは

$$U_S = -2U_B \quad (15)$$

となる。二つの電流間の力学的関係を記述するポテンシャルエネルギー (14)は、系内部にある全エネルギー、すなわち、磁場のエネルギー  $U_B$  と電源のエネルギー  $U_S$  の和であるというのが命題2である。

**命題2** 電流間に働く力のポテンシャルエネルギー  $U_I$  は、磁場のエネルギー  $U_B$  と、電流電源のエネルギー  $U_S$  の和である：

$$U_I = U_B + U_S = -U_B.$$

命題2の教科書の記述については、筆者は不満を覚える。[Feynman]では、磁場のエネルギー  $U_B$  とは云わずに、the total energy of the whole system と呼び、それが電気力学ポテンシャル (電流系に力学的になされた仕事) と electrical energy (我々の言う電源のなした仕事) の和に等しいと説明されている： $U_B = U_I + (-U_S)$ 。「磁場のエネルギー」という言葉を避けていることと、total energy を主語にして電気力学ポテンシャルを主語にしていないこと (電気力学ポテンシャルの実体は何かを「陽に」述べていないこと)、という2点に筆者は不満を覚える。

[LLP]では  $U_B$  の「ルジャンドル変換」が  $U_I$  であると論じられている。しかし、変換で得られたエネルギーの内容が「陽に」説明されてはいない。[Jacson]の議論は[LLP]のそれとほぼ同じである。

[高橋]は「磁束の変化にもとづくエネルギーの変化」と表現し、電源のエネルギーと「陽に」はのべていない。

[平河]は電源のなした仕事を主語にした説明をしている。すなわち、電源のなした仕事の一部が磁場のエネルギーとなり、一部が外部に力学的仕事を行なう： $(-U_S) = U_B + (-U_I)$  式(12-45)。しかしやはり電気力学ポテンシャルを「陽に」は説明していない。

[太田]は § 11-2で[Feynman]とほぼ同じ説明をしているが、「total energy」の代わりに「電流のエネルギー」という言葉を使用している。

つまり、電気力学ポテンシャルの実体をどの教科書も「磁場のエネルギー」「電源のエネルギー」という分かり易い概念を「陽に」使って説明していないのである。その理由は、おそらく、次のようなことであろう。「電源のエネルギー」という概念をここで導入すると、「電子の磁気モーメントの電源」という非物理的なものへの道を拓いてしまう。それはさけるべきだ。このように考えたのではないであろうか。これは、もちろん筆者の推測でしかない。しかし、命題4の解説において説明するように、「電子の磁気モーメントの電源」という概念は物理的に変なものではない。

#### 4. スピン磁気モーメントを作り出している電流密度

磁気モーメントは、[高橋]では「磁荷」のダイポールであるとして記述されているが、他の教科書では電流であるとしている。磁性で最も大切な磁気モーメントは電子のスピン磁気モーメントであるが、その電流（密度）を、具体的に式で表現しているのは、しかし、[太田]のみである。ここでは、電子による電流として次式が与えられている：

$$\vec{J}(\vec{x}) = -e\vec{v}\delta(\vec{x} - \vec{r}) + \frac{e}{m}\vec{s} \times \vec{\nabla}\delta(\vec{x} - \vec{r}) \quad (8-111).$$

ここで  $\vec{s}$  はスピン角運動量である。しかしこの表現は、空間的広がりのない磁気モーメント（電流）に対するもので、物理的なものとは言い難い。よりきちんとした表現は、Dirac理論より導くべきものである。

Dirac理論では粒子は4成分スピノール、すなわち、4個の波動関数で表され、電流密度の表現も、厳密には、4個の波動関数で書かれることになる。しかしこの場合、軌道電流とスピン電流が渾然一体となり、分り難い。粒子の速度が非相対論的であるとして、2成分近似（Pauli近似）を行なうと分り易いものとなる。この近似では荷電Dirac場による電流  $\vec{J}_D$  は、軌道運動による  $\vec{J}_{orbit}$  とスピンによる  $\vec{J}_{spin}$  の和で表すことが出来る（ダビドフ著、量子力学、北門他訳（新科学出版社 1978）の8章63節、または本 Appendix B, C参照）：

$$\vec{J}_D = \vec{J}_{orbit} + \vec{J}_{spin}. \quad (16)$$

$$\vec{J}_{orbit} = \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{-i\hbar Q}{2m} [\Psi_j^* \nabla \Psi_j - \Psi_j \nabla \Psi_j^*] - \frac{Q^2}{m} \Psi_j^* \Psi_j \vec{A} \right], \quad (17)$$

$$\vec{J}_{spin} = rot \left[ \frac{\hbar Q}{2m} \vec{n} \right]. \quad (18)$$

$$\begin{aligned} n_x &= \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_1 \Psi_2^* \\ n_y &= -i(\Psi_1^* \Psi_2 - \Psi_1 \Psi_2^*) \\ n_z &= \Psi_1^* \Psi_1 - \Psi_2^* \Psi_2 \end{aligned} \quad (19)$$

ただし

$$\int [\Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2] d\vec{x} = 1 \quad (20)$$

である。(18)式の表現の  $rot$  の中のベクトルがスピンによる磁化  $\vec{M}_{spin}$  と解釈出来る。スピン磁気モーメントを担っている電流も波動関数の広がりをもって空間内を流れているのである。命題3はこれで、十分に明らかであろう。

命題3 磁気モーメントの実体は、スピンの伴うものをも含め、荷電粒子の運動による電流である。

### 5. 磁気モーメント電流の「電源」

前節で磁気モーメントの実体は電流である事を確認した。そうであれば、その力学的振舞いを記述する電気力学ポテンシャル（ゼーマンエネルギー）の内実の一部として、「電流電源のエネルギー」を考えなければならない（命題2）。本節では、その電源エネルギーが粒子の運動エネルギーであることを説明する：

命題4 「磁気モーメント電流の電源エネルギー」の実体は、荷電粒子の運動エネルギーである。

荷電粒子と電磁場の系において、粒子と場の間のエネルギーの授受は必ず

$$\vec{J} \cdot \vec{E} dt$$

なる形で行なわれる。この量が正ならば場から粒子へ、負ならば粒子から場にエネルギーが移動する。磁気モーメント電流  $\vec{J}_M$  を介するエネルギーの授受は

$$\begin{aligned} dt \int \vec{J}_M \cdot \vec{E} d\vec{x} &= dt \int [\text{rot} \vec{M}] \cdot \vec{E} d\vec{x} = dt \int \vec{M} \cdot [\text{rot} \vec{E}] d\vec{x} \\ &= -dt \vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\mu} \cdot d\vec{B}. \end{aligned} \quad (21)$$

$\vec{J}_M$  の分布している領域で  $\vec{B}$  が一定であることを仮定し、 $\int \vec{M} d\vec{x} = \vec{\mu}$  とした。この式は、磁気モーメントを担っている荷電粒子が、磁場の変化によって受け取るエネルギーを表しており、したがって、粒子のエネルギーはこの分だけ増大することになる。

ところで、磁場中では電荷  $Q$  の粒子の力学的運動量  $m\vec{v}$  と正準運動量  $\vec{p}$  とは異なったものとなる。そのため運動エネルギー  $T$  は次のようになる：

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2m} (\vec{p} - Q\vec{A})^2. \quad (22)$$

ここで、粒子の運動範囲が狭く、その範囲で磁場  $\vec{B}$  は一様と考えられるものとする

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x} \quad (23)$$

となり、さらに

$$\vec{\mu} = \frac{Q}{2m} \vec{x} \times \vec{p} = \frac{Q}{2m} \vec{L} \quad (24)$$

に注意すれば

$$T = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{B} - \frac{Q^2}{4m} [\vec{x}^2 \vec{B}^2 - (\vec{B} \cdot \vec{x})^2] \quad (25)$$



となる。右辺第3項は高次なので無視すると、磁場の変化に連動して変動する運動エネルギーの成分は

$$T_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (26)$$

となり、場が  $d\vec{B}$  変化すれば運動エネルギーが  $-\vec{\mu} \cdot d\vec{B}$  変化する。この変化量は、場の変化の際に電流  $\vec{J}_M$  になされる仕事(21)と一致している。つまり、磁気モーメントを担っている粒子は、その電流に誘導電場が作用してエネルギーが供給されると、電流を変化させずに一定に保ちつつ己の運動エネルギーの変化で吸収しているわけである。これはまさに運動エネルギーが磁気モーメント電流の定電流電源の働きをしていることに他ならない。

スピン磁気モーメントの場合も同様である。磁場中での荷電Dirac粒子の運動エネルギー密度は4成分スピノール表現で

$$T_D = \psi^\dagger \left[ \sum_{k=1}^3 c(-i\hbar\partial_k - QA_k)\alpha_k + mc^2\gamma_4 \right] \psi. \quad (27)$$

と表され(Appendix B)、2成分近似をとれば、静止エネルギーを除いた残りが次のようになる：

$$T_D = \sum_{j=1}^2 \Psi_j^* \frac{1}{2m} (-i\hbar\vec{\nabla} - Q\vec{A})^2 \Psi_j - \frac{\hbar Q}{2m} \vec{n} \cdot \vec{B} \quad (28)$$

第1項は(22)式と同じであり、第2項はスピンと関わった項である ( $\vec{n}$  は(19)式のベクトル)。スピンによる磁気モーメント  $\vec{\mu}$  は

$$\vec{\mu} = \frac{\hbar Q}{2m} \int \vec{n} d\vec{x} \quad (29)$$

である。電磁誘導の電場によりスピン電流になされた仕事も、粒子の運動エネルギーの増加として吸収されることが、これで明らかである。

外磁場  $\vec{B}$  中の磁気モーメント  $\vec{\mu}$  につき、 $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  が4種類の異なる意味を持っていることが明らかになったわけであるが、ここでそれらを纏めておこう。

1. 外磁場と磁気モーメント双方の作る全磁場のエネルギー中、磁気モーメントの位置と向きによって変化する成分： $+\vec{\mu} \cdot \vec{B}$
2. 外磁場中の荷電粒子の運動エネルギー中、外磁場に依存する成分： $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$
3. 磁気モーメントの位置と向きによって変化する外磁場の電源のエネルギー： $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$
4. 上の3種のエネルギーの合計として得られる磁気モーメントのポテンシャルエネルギー (ゼーマンエネルギー)： $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

外磁場が、別の磁気モーメントによるものなら、3.はその磁気モーメントを担う粒子の運動エネルギーの成分である。

## 6. 荷電粒子集合体としての物質

我々が日常世界で出会う物質の性質を論ずる物性論では、原子核は質量、電荷、スピン角運動量、磁気モーメントで特徴付けられる粒子であって、その内部には立ち入らないし、また、核同士が核力で相互作用する事態も考慮する必要はない。つまり、例外はあるであろうが、電子をも含め、すべての粒子が電磁場としか相互作用しないとして物性を考えれば、通常はそれで充分なのである。このような系に成り立つのが命題5である。

**命題5** 荷電粒子集合体のエネルギーは、電磁場のエネルギー（密度は $\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$ ）と粒子の運動エネルギーの和である。

「粒子と場の相互作用エネルギー」なるものは存在せず、粒子系のいかなるエネルギーも粒子の運動エネルギーであるか、場のエネルギーであるか、あるいはそれらの和となっていると、この命題は主張している。

スピン磁気モーメントを持っていない粒子についてのこの命題の証明は[砂川]の12-2節に与えられている。スピンを持つ荷電Dirac粒子の場合も全く平行に証明できる(Appendix B)。前節で示した  $T_D$  が（静止エネルギーをも含んだ）運動エネルギー密度であり、これに電磁場のエネルギー密度を加えれば全エネルギー密度となる。

エネルギーが「エネルギー密度」という形で与えられるということは、「エネルギーの局所性」を表しており、任意の空間領域内部のエネルギーが定義できることを意味している。この「局所性」は電磁場および粒子双方にいえることであり、相対論の要請に他ならない。この局所性を端的に表現しているのが、「運動量-エネルギー4元テンソル」でありこれに若干言及しておく。

これはエネルギー密度-エネルギー流、および、運動量密度-運動量流を成分とするテンソルである。このテンソルは、電磁場と粒子それぞれに定義されている。両者を加えたテンソルでは、エネルギーも運動量も移動するのみで総量は保存される。つまり、電磁場のエネルギーが消失していれば、そこで粒子の運動エネルギーが増加している。同様に、電磁場の運動量が消失していれば、そこで粒子の力学的運動量が増大している。（粒子の運動量増大とは、粒子に力が働くことなので、電磁場のテンソルの運動量密度-運動量流を成分とする部分はMaxwellの応力テンソルと呼ばれている。）

このように考えれば、磁気モーメントに働く力は、磁気モーメントの在る位置の局所的な電磁場で決まっているはずである。しかるに、前節までの議論では、磁気モーメントに働く力のポテンシャルエネルギーには、遠方にある電流電源のエネルギーも参加していると論じてきた。これは一見矛盾しているように思えるがそうではない。

ポテンシャルエネルギーの実体と力の関係を、太さが一様でないゴム紐を引っ張る場合について考えてみよう。紐の一端は固定し、他端を指で摘んで引っ張るものとする。引っ張るのに要する力は、摘んでいる近傍の紐の伸び率（変形率）と太さで決まっているが、指のなした仕事は紐全体に分布する弾性エネルギーとして、蓄えられている。つまり、力が局所的に決まって、局所的にエネルギーの供給があり、それが別の位置に貯蔵されるとしても何の不思議もない。電流（磁気モーメント）間に働く力の場合も同様である。電磁場の「運動量-エネルギーテンソル」は、電流（磁気モーメント）の向きや位置を変化させる過程での、電磁エネルギーの発生、消失、移動を完全に記述する。そして、電流（磁気モーメント）の向きや位置の変化前後でのエネルギー収支を考えると、ポテンシャルエネルギーが、磁場のエネルギーと電源のエネルギーの和となっていることが明らかとなる。

**命題6** 物質の内部エネルギーは、電子と原子核の運動エネルギーと、マイクロ電磁場（長波長フーリエ成分を取り除いた電磁場）のエネルギーの和である。

**命題7** 物質が占めている空間内にあるエネルギーは、物質の内部エネルギーとマクロ電磁場（マイクロ電磁場を取り除いた電磁場）のエネルギーの和である。

誘電体や磁性体のエネルギーの議論において、筆者には定義のよく分らない概念にしばしば出会う。そこで先ずは物質の「内部エネルギー」の概念をはっきりさせておきたいと考えそれを命題6として掲げた。その前提となっているのが命題5である。また、命題7が明確に認識されてはいないと思える記述にもしばしば出会うので、これも命題として掲げた。

§2で述べたように、「マクロ」と「マイクロ」の境界は曖昧だが、実際にははっきりと区別可能と思われる。結晶性の固体の場合、結晶が無限に広がっていれば、逆格子点以外のフーリエ成分はゼロとなる。現実には有限の大きさであり、また完全な結晶でもない。そのため逆格子点はぼけてくる。「マクロ場」は、ぼけた原点に対応した場である。かなりぼけたとしても、隣の逆格子点のぼけと重なることはまずあるまいと思えるので、「実際にははっきりと区別可能」と考える。結晶でない場合でも事態はそれ程違いはないであろう。

多くの教科書においては、ある空間領域の平均として「マクロ場」が導入されている。しかし、場のエネルギーは各フーリエ成分のエネルギーの和なので、エネルギーという観点で「マクロ」「マイクロ」を考える場合、フーリエ成分で区切るのが自然に思える。場の「マクロ」「マイクロ」の区別に対応して、電荷密度、電流密度の「マクロ」「マイクロ」もフーリエ成分で区別出来る。Maxwell方程式は線形なので、「マクロ場」と「マイクロ場」のMaxwell方程式は完全に分離できる。（もちろん電荷密度-電流密度の「マクロ」と「マイクロ」の成分がカップルしているので、「マクロ」と「マイクロ」は関連している。）

## 7. マクロ電磁場と物質の内部エネルギー

電磁場から粒子へのエネルギーの移行は一般に

$$\vec{E} \cdot \vec{J} dt \quad (30)$$

で与えられる。したがってマクロ電磁場やマクロ電流の変化により物質の内部エネルギーの変化がおきる：

命題8 電氣的、もしくは磁氣的作用で生ずる物質の内部エネルギー密度  $u_{int}$  の変化は、マクロ電場  $\vec{E}$  がマクロ電流 (密度)  $\vec{J}$  に為す仕事で生ずる：

$$du_{int} = \vec{E} \cdot \vec{J} dt. \quad (31)$$

「マクロ」「ミクロ」の定義より、

$$\int \vec{E}_{MACRO} \cdot \vec{J}_{MICRO} d\vec{x} = 0,$$

$$\int \vec{E}_{MICRO} \cdot \vec{J}_{MACRO} d\vec{x} = 0 \quad (32)$$

なので、命題8が云える。

マクロ電流は、自由キャリアによる電流  $\vec{J}_{free}$ 、電気分極の変化による電流  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  および、磁化電流  $rot \vec{M}$  の3種類に分類出来る。したがって、

命題9 誘電体の内部エネルギー密度の変化は

$$du_p = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} dt = \vec{E} \cdot d\vec{P} \quad (33)$$

で与えられ、磁性体の内部エネルギー密度の変化は

$$du_m = \vec{E} \cdot rot \vec{M} dt = rot \vec{E} \cdot \vec{M} dt = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot \vec{M} dt = -\vec{M} \cdot d\vec{B} \quad (34)$$

で与えられる。

この磁性体の内部エネルギーの変化は、命題4を見れば、磁気モーメントを担っている荷電粒子の運動エネルギーの変化のためであることが、理解出来る。磁性体の内部エネルギーの変化は、誘電体とのアナロジーが成立せず、 $\mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}$  とはならないことに、注意さ

りたい。

命題10 物質の占めている空間中の全エネルギーの変化は、これにマクロ場のエネルギーの変化を加えたものである。

誘電体：

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{E} + \vec{E} \cdot d\vec{P} = \vec{E} \cdot d\vec{D} \quad (35)$$

磁性体：

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{B} - \vec{M} \cdot d\vec{B} = \vec{H} \cdot d\vec{B}. \quad (36)$$

教科書の磁性体のエネルギーについての記述については、大いに不満である。まず、内部エネルギー（密度）の変化が(34)式で与えられることが書かれているのは[太田] (p. 268の(10-85)式) だけである。(しかし、その根拠を磁気モーメントのポテンシャルエネルギー（ゼーマンエネルギー）に置いていることには賛成出来ない。磁場の変化の時に場が磁化電流になす仕事であり、それは運動エネルギーの変化となる。§5参照)

磁性体が占めている空間の全エネルギーの変化が(36)式の右辺となることは、[Feynman] ((36-22)式)、[LLP] (p. 114の(31-4)式)、[高橋] (p. 181の(III-68)式)、[平河] (p. 145の(12-27)式)、[砂川] (p. 77の(4-2)式)、[太田] (p. 270の(10-98)式) と、導出法はまちまちだがすべての教科書に書かれている。

(36)式（全エネルギー）は論ずるが(34)式（内部エネルギー）は論じない。それは命題5、6、7についての認識が希薄である故と思ってしまうのだが、どうであろうか。

## 8. おわりに——「磁荷」概念について——

「磁荷」概念を基礎に磁場を論ずる立場がある。[高橋]がそうである。閉電流と磁荷ダイポールの作る磁場は、外側では同じなので、いずれで考えても同じ結果となる問題は数多くある。しかし、決定的に相容れない問題がある。そのひとつは、磁気モーメントが感じている場は $\vec{B}$ か $\vec{H}$ という問題である。強磁性体（永久磁石）ではマクロ場 $\vec{B}$ と $\vec{H}$ が逆向きとなることが多い。したがって、 $\vec{B}$ か $\vec{H}$ かは、どちらが好きかという趣味の問題ではない。

磁荷が磁場を作るという立場では、

$$\text{div } \vec{H} = \frac{\rho_M}{\mu_0} (= -\text{div } \vec{M}) \quad (37)$$

の関係で磁場が作られるので、磁気モーメントの感じる磁場は、当然 $\vec{H}$ である。磁性体の内部エネルギーの増加は、磁荷流に磁場が仕事をする結果生ずることになるので

$$\mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} dt = \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} \quad (38)$$

与えられることになるし、また場のエネルギー密度は

$$\frac{\mu_0}{2} \vec{H}^2 \quad (39)$$

ということになる。したがって、 $\vec{H} \cdot d\vec{B}$ の分解の仕方が電流描像の場合と違ってくる。

電流描像：

$$\vec{H} \cdot d\vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{B} - \vec{M} \cdot d\vec{B} \quad (40)$$

磁荷描像：

$$\vec{H} \cdot d\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{H} + \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}. \quad (41)$$

強磁性体内部では、磁荷描像での場のエネルギー密度は電流描像の場合と較べ極端に小さくなることに注意していただきたい。(ドーナツ状の環磁石にすると磁荷描像では磁場は存在しなくなる。)

電磁場と相互作用している電子の振る舞いは、相互作用Lagrangian密度を  $\vec{J} \cdot \vec{A} - \rho\phi$ 、すなわち、「電荷-電流密度」と「スカラー-ベクトルポテンシャル」の内積と考えた理論(磁荷を含まない理論)を用いて、驚くべき精度で説明がなされている。それには、スピン磁気モーメントのDirac理論からのわずかなずれの説明も含まれている。さらには、核磁気とs電子の接触相互作用の測定値は磁荷描像では説明出来ないものである([太田]の§8-4にある指摘)。したがって、磁気モーメントの電流描像と磁荷描像で異なる結論が出る場合には、電流描像を採用しなければならない。とすれば、磁気モーメントが感じている場は $\vec{H}$ ではなく $\vec{B}$ であり、場のエネルギー密度は $\frac{\mu_0}{2} \vec{H}^2$ ではなく、 $\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$ であり、磁性体の内部エネルギー密度の変化は $\mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}$ ではなく、 $-\vec{M} \cdot d\vec{B}$ である。

磁化がマクロ磁場の関数として変化する場合に、磁気モーメントは $\vec{B}$ を感じているのであるから、 $\vec{M}(\vec{H})$ ではなく $\vec{M}(\vec{B})$ とすべきであり、帯磁率の定義も当然  $\chi = \frac{d}{dB} M$  とすべきである。これは電気分極 $\vec{P}$ を $\vec{P}(\vec{D})$ ではなく $\vec{P}(\vec{E})$ とするのと同じ精神である。しかしそのように磁性を議論しているのは、[太田](§10)のみである。

$\vec{H}$ を愛用する考え方に多少同情すべき点もある。それは $\vec{H}$ の、式(37)で表される性質ではなく、

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{free} \quad (42)$$

で表される性質に着目している場合である。すなわち、 $\vec{H}$ を「外場」として理解する考え方である。だが外場として首尾一貫できるのは

$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad (43)$$

の場合に限られる。[Feynman]の§36では、そのような場合に $\vec{H}$  (ただし $\mu_0 \vec{H}$ を $\vec{H}$ と定義し直して)を「外場」として使っている。しかし、混乱を防ぐには、外場は $\vec{H}$ ではなく、 $\vec{B}_{ext}$ などと表記すべきであろう。

磁荷描像は誤りであるにもかかわらず、その影響は広く根深いように思われる。(例えば、分解(40)は[太田]の(10-98)式以外に見た記憶が筆者にはない。) その大きな要因は、誘電体と磁性体との安易なアナロジーにあるのではないであろうか。磁荷描像は、誘電体の如く磁性体を眺めることだからである。電気分極 $P$ が固定されていれば電場が変化しても誘電体は仕事をされず、内部エネルギーに変化は起きない。このアナロジーとして「磁化 $M$ が固定されていれば磁場が変化しても磁性体の内部エネルギーに変化は生じない」と考えたくるのではないだろうか。だがそうではない。磁化の固定とは電流の固定であり、磁場の変化で起電力が生ずれば「定電流電源」はエネルギーを供給するか、吸収するかしなければならないのである。

筆者が磁性の原因を電流であると直感的に納得しているのは、磁性体に「磁場増幅作用」があるからである。 $\vec{M}$ が $\vec{B}$ と同じ向きに生じる物質の場合、外部から磁場を加えると加えた磁場よりも強い磁場を創りだす。この増幅作用は鉄心にコイルを巻く目的が分っている人なら誰もが知っていることである。外場を弱めることしか出来ない誘電体とは対照的である。この差の原因は、「電荷は異符号のとき引き合うが、電流は同符号のとき引き合う」ことにある、と筆者は思う。電荷は異符号が一緒になって効果を無くすが、電流は同符号が集まって効果を大きくする。磁場を増幅する代償として磁性体は内部エネルギー(ミクロな運動のエネルギー)を減らしている。

筆者が磁場のエネルギーに思いを巡らすきっかけとなった、阿部-白鳥論争についての筆者の現在の評価は「両者ともに問題あり」というものである。いずれにせよ、(36)式のエネルギー密度を、問題の状況に応じて忠実に積分すればよい話である。

## Appendix

### A Maxwellの方程式等

無用な誤解を避けるため、筆者の用いている基礎方程式等を列挙しておく。ここでは、全フーリエ成分を含んだものにアンダーラインをし、マクロな量(長波長成分のみを取り出したもの)はアンダーライン無しで表す。

- 点電荷 $Q$ の受ける力

$$\vec{F} = Q(\underline{\vec{E}} + \vec{v} \times \underline{\vec{B}}) \quad (44)$$

- Maxwellの方程式

$$\text{div} \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{rot} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}, \quad (45)$$

$$\operatorname{div} \underline{\vec{B}} = 0, \quad \operatorname{rot} \underline{\vec{B}} = \mu_0 [\underline{\vec{J}} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{E}}]. \quad (46)$$

● 電磁場のエネルギー密度

$$\underline{U}_F = \frac{\epsilon_0}{2} \underline{\vec{E}}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{\vec{B}}^2. \quad (47)$$

● 電磁場のエネルギーの流れ

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{U}_F + \operatorname{div} \left[ \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{B}} \right] = -\underline{\vec{J}} \cdot \underline{\vec{E}}. \quad (48)$$

● マクロな電荷密度と電流密度

— 電荷密度

$$\rho = \rho_{free} - \operatorname{div} \underline{\vec{P}}. \quad (49)$$

— 電流密度

$$\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{J}}_{free} + \operatorname{rot} \underline{\vec{M}} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{P}}. \quad (50)$$

●  $\underline{\vec{D}}$  と  $\underline{\vec{H}}$  の定義

$$\underline{\vec{D}} \equiv \epsilon_0 \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}}, \quad \underline{\vec{H}} \equiv \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{B}} - \underline{\vec{M}}. \quad (51)$$

● マクロ場のMaxwell方程式

$$\operatorname{div} \underline{\vec{D}} = \rho_{free}, \quad \operatorname{rot} \underline{\vec{D}} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{B}} + \operatorname{rot} \underline{\vec{P}}, \quad (52)$$

$$(\operatorname{rot} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{B}}, \quad \operatorname{div} \underline{\vec{B}} = 0), \quad (53)$$

$$\operatorname{div} \underline{\vec{H}} = -\operatorname{div} \underline{\vec{M}}, \quad \operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}_{free} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{D}}. \quad (54)$$



## ● マクロなエネルギーの流れ

- 電磁場のエネルギーの流れ

$$\frac{\partial}{\partial t} U_F + \operatorname{div} \left[ \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right] = - \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} + \operatorname{rot} \vec{M} + \vec{J}_{free} \right] \vec{E}. \quad (55)$$

- 電磁氣的内部エネルギーの流れ

$$\left[ \vec{E} \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} - \vec{M} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right] + \operatorname{div} [\vec{E} \times (-\vec{M})] = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} + \operatorname{rot} \vec{M} \right] \vec{E}. \quad (56)$$

## B 荷電Dirac場と電磁場

質量  $m$ 、電荷  $Q$ 、スピン ( $\frac{1}{2}$ ) の粒子を記述するDirac場と電磁場が相互作用している場合のエネルギーについて考える。 $\gamma$  行列等の表現は西島和彦著「場の理論」(紀伊国屋書店, 1987)にあるものを使うことにする。ただし、自然単位系ではなく、MKSA単位系で記述する。

## ● 定義

$$x_\mu (\mu = 1, 2, 3, 4) = (x, y, z, ict) \quad (57)$$

$$A_\mu = (A_x, A_y, A_z, i\varphi/c) \quad (58)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (59)$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\gamma_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_4 \quad (63)$$

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (64)$$

$$J_\mu = icQ\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = (cQ\psi^\dagger\alpha_k\psi, icQ\psi^\dagger\psi) = (\vec{J}, ic\rho). \quad (65)$$

●Lagrangian density

—電磁場

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2. \quad (66)$$

—Dirac場

$$\mathcal{L}_D = -\bar{\psi}[\hbar c\gamma_\mu\partial_\mu + mc^2]\psi. \quad (67)$$

—相互作用

$$\mathcal{L}_{int} = J_\mu A_\mu = \vec{J}\vec{A} - \rho\varphi. \quad (68)$$

●Dirac場の運動方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\sum_{k=1}^3 c(-i\hbar\partial_k - QA_k)\alpha_k + mc^2\gamma_4 + Q\varphi\right]\psi. \quad (69)$$

—正準運動量

$$p_k \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_k} = -\epsilon_0 E_k, \quad (70)$$

$$\Pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\hbar\psi^\dagger. \quad (71)$$

●エネルギー密度

$$U = p_k \dot{A}_k + \Pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = U_F + T_D \quad (72)$$

$$U_F = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2. \quad (73)$$

$$T_D = \psi^\dagger \left[ \sum_{k=1}^3 c(-i\hbar\partial_k - QA_k)\alpha_k + mc^2\gamma_4 \right] \psi. \quad (74)$$

$-i\hbar\partial_k - QA_k$  は力学的運動量なので、 $T_D$  はDirac場の（相対論的）運動エネルギー密度である。

### C 荷電Dirac場の電流密度

$J_k = cQ\psi^\dagger \alpha_k \psi$  を具体的に書くと

$$\begin{aligned} J_x &= cQ(\psi_1^* \psi_4 + \psi_2^* \psi_3 + c.c.) \\ J_y &= cQ(-i\psi_1^* \psi_4 + i\psi_2^* \psi_3 + c.c.) \\ J_z &= cQ(\psi_1^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_4 + c.c.) \end{aligned} \quad (75)$$

である。さて、 $\alpha_k, \gamma_4$  の具体的な形を代入すると運動方程式は

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - Q\varphi - mc^2) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 c(-i\hbar\partial_k - QA_k)\sigma_k \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - Q\varphi + mc^2) \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 c(-i\hbar\partial_k - QA_k)\sigma_k \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (77)$$

となる。エネルギーが正の解は $(\psi_3, \psi_4)$ が小さく、 $(\psi_1, \psi_2)$ を使って次のように近似できる：

$$\begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2mc} \sum_{k=1}^3 (-i\hbar\partial_k - QA_k)\sigma_k \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2mc} [(-i\hbar\partial_z - QA_z)\psi_1 + (-i\hbar\partial_x - \hbar\partial_y - Q(A_x - iA_y))\psi_2], \quad (79)$$

すなわち

$$\psi_4 = \frac{1}{2mc} [(i\hbar\partial_z + QA_z)\psi_2 + (-i\hbar\partial_x + \hbar\partial_y - Q(A_x + iA_y))\psi_1]. \quad (80)$$

(79)式、(80)式を(75)式に代入すると、荷電Dirac場による電流  $\vec{J}_D$  は、軌道運動による  $\vec{J}_{orbit}$  とスピンによる  $\vec{J}_{spin}$  の和となっていることがわかる。(本文 §4)