一斉射撃問題を解いてみる：
分かりやすい８状態最少時間解まで

神奈川大学理学部情報科学科　野口健一郎

まえがき

一斉射撃問題とは、１次元に並んだ任意個数の有限オートマトン（有限状態機械）が同期して仕事を行うためのアルゴリズムを見付ける問題である。この問題の最少時間解（先頭のオートマトンから信号を発した後、信号がオートマトン列を往復する時間だけですべてのオートマトンが同時に射撃状態に至る解）を最初に見付けられたのは現在当学科に居られる後藤英一先生である。その後いろいろな最少時間解が提案されてきたが、近頃になってそれらの解のうちの一つ（１６状態の有限オートマトンによるもの）に誤りがあることとその修正解が報告された。これによりこの問題の証明が容易な解を示すことの意味が出てきた。そこでこの問題をあらためて解いてみたところ、分かりやすいアルゴリズムに従った８状態有限オートマトンによる最少時間解までが得られた。得られた８状態解はBaltzerの８状態解と比較して状態遷移規則数がより少ない。解は計算機シミュレーションによっても検証済みである

１．はじめに

一斉射撃問題とは、１次元に並んだ有限オートマトン（有限状態機械）が同期して仕事を行うためのアルゴリズムを見付ける問題である。有限オートマトンが任意の個数並んでおり、並びの長さは有限オートマトンが記憶できる容量を越えて極めて大きいかもしれない。各オートマトンは両隣のオートマトンとだけ信号のやりとりができ、信号を受け取り自分の状態を変化させるのに１クロックかかる。先頭のオートマトンから仕事を指示する信号を出して、その信号が伝播されていき、何クロック目かで、全てのオートマトンが一斉に同じ状態に入るようにする。その時点で一斉射撃が行われると考えて、一斉射撃問題と呼ばれる。

一斉射撃問題は1957年にJohn Myhillにより提案され、これを最初に解いたのはJohn McCarthyとMarvin Minskyであると言われる。当時、この問題の最少時間解がどういうものか知られていなかったが、それを1961年に当学科の後藤英一教授（当時東京大学で在 MIT）が初めて明らかにし、先頭から出された信号が列を往復する時間だけで一斉射撃ができることを示した［1］［2］［4］。明らかに、それより短い時間での解は存在しない。

その後、1966年にWaksmanが１６状態の有限オートマトンによる最少時間解を示し［3］、また1967年にBaltzerが８状態による最少時間解を示した［4］。さらに1987年にMazoyerが６状態による最少時間解を示している［5］。

近頃（2000年）になって、大阪電気通信大学のグループによってWaksmanによる解が検証されて、１６状態の有限オートマトンの状態遷移規則に誤りがあることが明らかにされ、修正された状態遷移規則も示された［7］［8］。これをきっかけとして、古典的と言える一斉射撃問題について、その解を検証したり、また証明が容易な解を示すことの意味が出てきた。

そこで、一斉射撃問題をあらためて解いてみたところ、分かりやすいアルゴリズムに従った８状態有限オートマトンによる最少時間解までが得られた。１３４個の状態遷移規則を持つ８状態解が得られ、また規則数を１１９個にまで減らした別解も得られた。ここで得られた８状態解はBaltzerの８状態解と比較して、より分かりやすいものであると思わる。また状態遷移規則数もより少ない。なお、状態遷移規則数１１９個はMazoyerの６状態解の場合と同数である。解は計算機によるシミュレーションによって、有限オートマトンの個数が２から10,000まで検証済みである。

２．最少時間解について

有限オートマトンを兵士に見立て、兵士の人数をNとする。先頭の兵士から出た信号が末尾の兵士に伝わるには$N-1$クロックかかり、信号が往復するにはその２倍の$2N-2$クロックかかる。最少時間解とは$2N-2$クロック後に全ての兵士が同時に射撃状態に遷移することである。

各兵士は全く同等な有限オートマトンとする。ただし、先頭の兵士とそれ以外の兵士とでは初期状態が異なる。

隣り合う兵士間で受け渡される信号は、それぞれの状態情報であるとし、各兵士の状態遷移は、隣りあう兵士の状態および自分自身の状態から決定される、とする。すなわち、兵士iのクロックtにおける状態を$S_i(t)$で表すと、兵士iの次のクロックでの状態$S_i(t+1)$は$S_{i-1}(t)$, $S_i(t)$, $S_{i+1}(t)$から決まる。ただし、両端の兵士は片側からしか入力が無い。

3．解の全体的な方針

（1）一般的な戦略

各兵士の記憶容量は有限であり、また兵士の人数に上限が無いことから、次の一般的な戦略が立てられる。

・全体に関する情報は兵士の並びの中に（一種の波として）分散して蓄えるしかない。

・複数の波を利用することにより、いろいろな情報を蓄えられ、また波の相互のぶつかり（干渉）によって状態の検出などができる、という可能性がある。

・最も基本の波は全兵士を往復する波である。（本稿では主波と呼ぶ。）

（2）総人数に関する手掛かりを掴む基本戦略

兵士の総人数が分からぬことから、主波の往きでは、人数に関する手掛りは得られない。主波の戻りのときに、何らかの手掛りが得られる可能性がある。主波の戻りと他の波とのぶつかりを利用することになろう。

兵士の列を横軸にし、時間を縦軸にした図を用いて、各兵士の状態遷移の状況（従って兵士間の波の状況）を表すことにする。（図1）

（3）真中の検出と問題の分割

総人数 N に関する手掛り検出の第1歩として、主波とそれより遅い波を丁度兵士列の真中でぶつからせることを考える。主波が $1.5N$ 伝播したときに、遅い波は $0.5N$ だけ伝播していればよいから、すなわち主波に対して3分の1の速度で進む波を作れればよい。

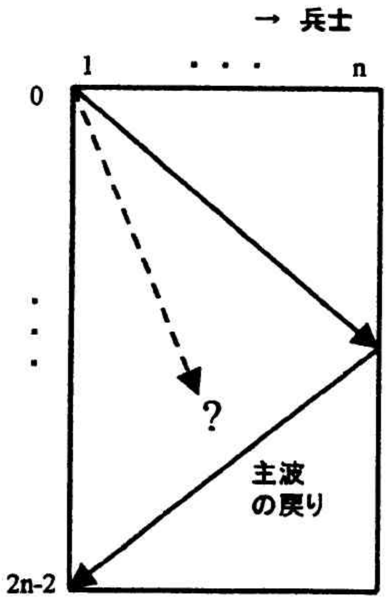


図1 状態遷移の状況（波の状況）の表現

真中の検出が出来たとして、そこで主波の枝分かれを作り、枝分かれの方は再び末尾の方向へ伝播させると、兵士列の後ろ半分の部分に、丁度半分のサイズの一斉射撃問題が出来ていることに気付く。（図2）さらに、前半の部分に対しては、主波とさらに遅い波を丁度兵士列の前から4分の1でぶつからせることができれば、そこでまた主波を枝分かれさせることにより、前から4分の1から全体の真中の間に、4分の1のサイズの一斉射撃問題が出来ていることに気付く。このためには、この遅い波は主波の7分の1の速度で進めばよい。

このようにして、順に、進み方が $1/(2^i-1)$ の波を作れれば、元の問題はどんどん小さい問題に分割されてゆく。（図2）（本稿ではこれらの波をまとめて中間波と呼ぶ。）

それでは分割された半分のサイズ、4分の1のサイズ等の一斉射撃問題はどのようにして解くか。これも、それぞれでさらに真中、4分の1の位置、等を検出して、より小さな問題に分割していけばよい。

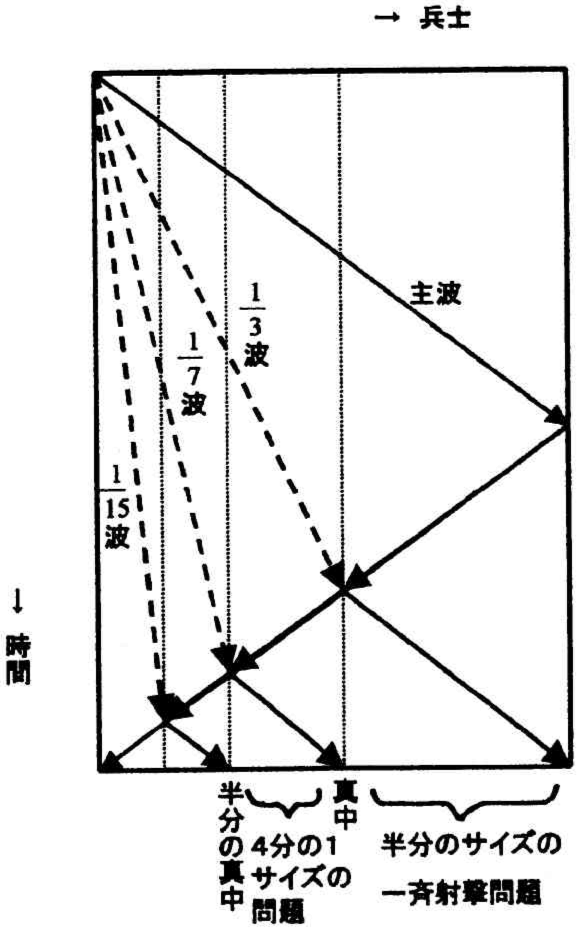


図2 一斉射撃問題の分割

この戦略は全体として見ると、全体を半分に、また半分になった部分をさらに半分に、と、半分、半分に分割してゆく方法と見ることが出来る。最後は、兵士数が２や３の小さな問題を解けばよくなり、その解は自明となる

４．進み方が１／（2^i −1)の波を作るアルゴリズム

ここが解の最もポイントになるところである。

これらの波は主波が 2^i 進む度に１つ進めばよい。３分の１波では主波が４進む度に１進めばよい。

これを実現するために、主波（の往き）が通過した兵士から、先頭方向へ信号を返してもらう、と言う手が考えられる。この返り信号は、それを返す兵士の位置が順に一つずつ先頭から遠ざかるため、連続的には返ってこず、２クロックに１回送られて来る。（図３。２クロックに１回戻り波が発生する。）この返り信号を二つ受け取ったら、一つ前へ進む波を作れば３分の１波になる。

３分の１波が前へ一つ進むたびに、返り信号をさらに先頭方向に送り出せば（返り信号の二つ目を通過させて先頭方向に返すことに相当)、それを二つ受け取ると主波が８進むことに相当するので、その度に７分の１波を１進めればよい。以下順に、受け取った返り信号の二つ目を通過させていくことにより、順次１/(2^i-1)の波を作ることができる。

中間波の生成と伝播の最初の部分を図４に示す。先頭がクロック２で返り信号（<）を受け取った後、クロック３で３分の１波が２番目の兵士に渡される。（先頭はクロック０で最初の返り信号を受け付けている、と考える。）以降、３クロック毎に３分の１波は前進する。また、先頭がクロック６で返り信号を受け取った後、クロック７で７分の１波が２番目の兵士に渡される。以降、７クロック毎に７分の１波は前進する。後は同様に１/(2^i-1)の波が作られ、伝播されて行く。なお、中間波を▷信号と▶信号で示している。前者は一つ目の返り信号に遭遇する前の状態、後者は一つ目の返り信号に遭遇した後の状態である。なお、返り信号とのぶつかりは記号を重ねて示してある。

５．真中決定のアルゴリズム

（１）兵士数が 2^n ＋１の場合

この場合、真中の兵士は一人である。その兵士を端の兵士として全体を２分すると、それぞれの兵士数は $2^{n-1}+1$ になる。以下、半々にしていくと兵士数は常に 2^i+1 の形になり、常に真中の兵士は一人に決まる。

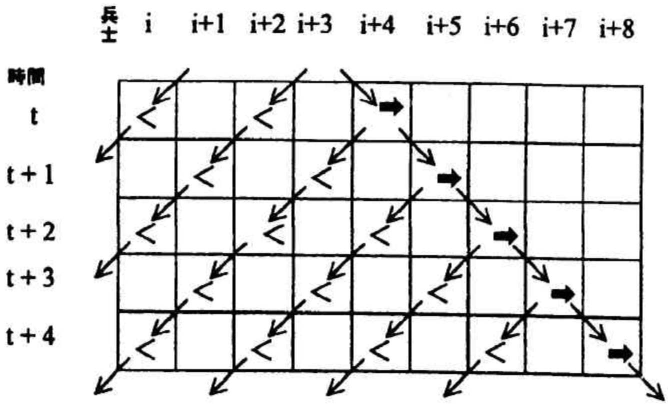


図３　主波(➡信号)と戻り波(<信号)の伝播の様子

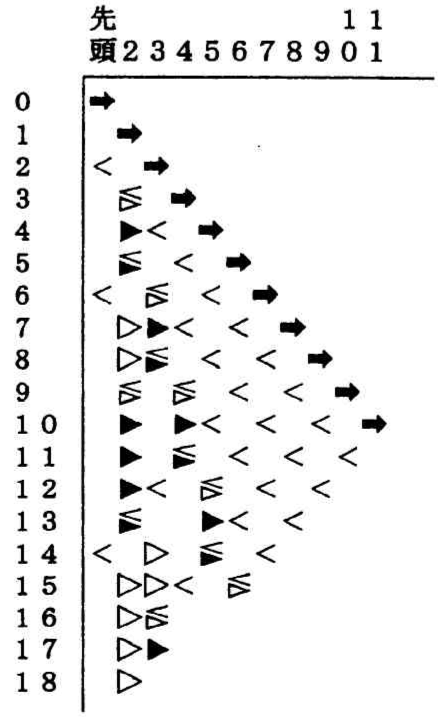
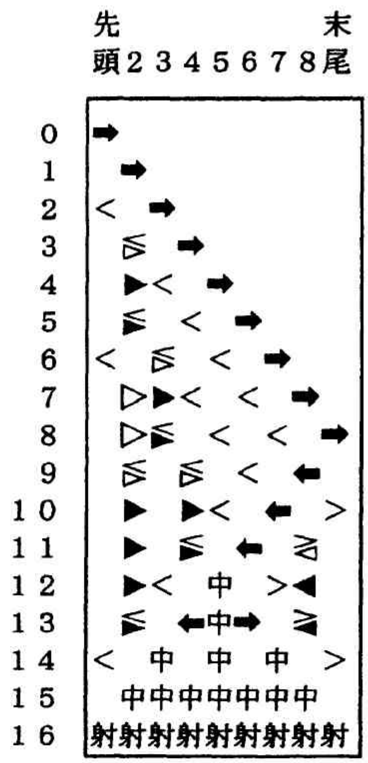


図４　中間波の生成・伝播の最初の部分

この場合の一斉射撃アルゴリズムの概観を図５に示す。（兵士数９の場合）クロック８で主波が末尾に達した後、末尾は先頭の役割を担って動作する。クロック１２で３分の１波が主波の戻りとぶつかり、真中が決まる。真中の兵士は、両側に対して先頭の兵士としての役割を担う。その結果、主波の枝分かれも起こる。クロック１４で７分の１波が主波の戻りとぶつかり、前の半分の真中が決まる。同じくクロック１４で、後ろ半分の３分の１波が枝分かれした主波とぶつかり、後ろ半分の真中が決まる。残りは３人ずつの兵士となり、その真中は明らかである。中間の兵士は自分と両隣すべてが真中になった後、また端の兵士は隣が真中になった後、射撃状態に移る。



末尾も真中も先頭として振舞うようになる。

図5　兵士数9の場合の概観

（2）兵士数が 2^n の場合

この場合は真中の兵士が二人となる。半々にしていっても常に真中は二人になる。

この場合の一斉射撃アルゴリズムの概観を図6に示す。（兵士数8の場合）クロック10で3分の1波が主波の戻りとぶつかり（厳密に言うと3分の1波の後半状態（▶信号）と並び）、その後、二人の兵士が真中になる。以後それぞれの真中が先頭の役割を担って振舞う。なおこのとき、左右のタイミングを合わせるため、後ろの半分の部分は、主波が真中の兵士ですぐに反射せず、1クロック置いてから反射することに注意する必要がある。（最少時間＋1クロックの一斉射撃問題になっている。）

クロック13で二人の真中が二組できる。中間のすべての兵士が真中になり、射撃状態に移る。

（3）一般の場合

兵士の人数により、半分半分にしていく過程で真中が一人だったり二人だったりする。

真中決定の原理を図7に示す。これは中間波が右方向に進行する場合である。中間波の後半状態では真中は右側に点線で囲んだ部分との二つになる。すなわち主波がこの点線部分とぶつかったときはそこが二人目の真中になる。

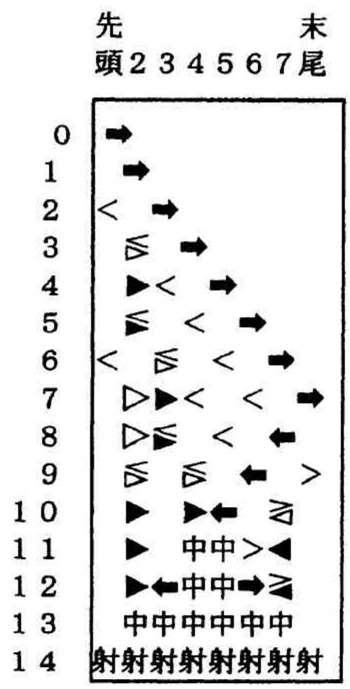
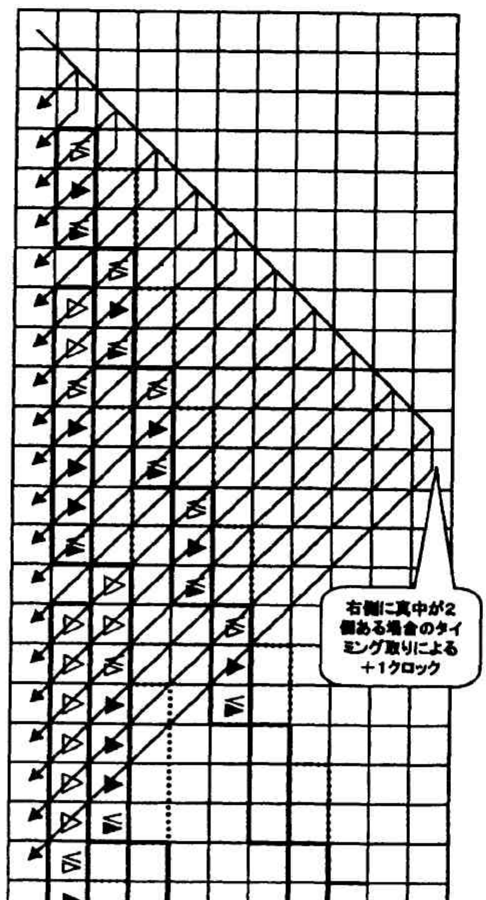


図6　兵士数8の場合の概観



矢印は可能性のある主波の流れ。これが点線の中に入ると、真中が2個になる。

図7　真中決定のアルゴリズム

ここで重要なのは、真中が決まるとき、必ず左右が対称形になることである。半分半分の過程で常に左右が対称形になることにより、全体として最終的な射撃状態への移行が同時に行われることが保証される。

6．十分な種類の状態のリストアップ

以上で解の原理を述べた。この原理を実現するための有限オートマトンの状態を設定する。まず、オートマトンが保持している信号の種類に着目して、十分な種類の状態をリストする。

［先頭の兵士以外の初期状態］

・静止状態

［主波に関わる状態（向きにより２状態）］

・➡および⬅：先頭の兵士以外について。

［戻り波に関わる状態（向きにより２状態）］

・＜および＞：先頭の兵士以外について。

［中間波に関わる状態（向きによりそれぞれ２状態）］

・▷と◁：戻り波と交叉する前の中間波状態。

・⋚と⋛：戻り波との最初の交叉。戻り波はここで吸収する。

・▶と◀：戻り波との最初の交叉後２回目の交叉前までの状態。

・⪋と⪌：戻り波との２回目の交叉。この後、中間波を前進させ、また戻り波は通過させる。

・▶と◀の進行方向側の隣で、戻り波との交叉前の状態：もう一つの真中の最初のほうの状態。

・▶と◀の進行方向側の隣で、戻り波との交叉状態：もう一つの真中の最後から２番目の状態。

・⪋と⪌の進行方向側の隣で、戻り波との交叉後の状態：もう一つの真中の最後の状態。

［先頭の兵士に関わる状態］

・先頭の兵士の初期状態：次のクロックで主波のための信号を隣の兵士に渡す。末尾の兵士に主波が達した後、および真中の兵士が決定された後、それらの兵士もこの状態に入る。

・先頭の兵士に返り信号が到達した状態：次のクロックで（次の）中間波が２番目の兵士に渡される。

・先頭の兵士のその他の状態

［二人目の真中決定に関わる状態（向きにより２状態）］

・二人目の真中として決定した状態：主波が中間波のもう一つの真中にぶつかったとき。次のクロックで「先頭の兵士の初期状態」に遷移する。

［最終状態］

・射撃状態

全部で２５状態ある。これらの状態をもとに、それらの間の状態遷移規則を設定することにより、最少時間解を作ることができる。

7．状態の整理

前節でリストアップした状態は、縮退させて、種類を少なくすることができる。どう縮退できるかを見付けるのは多分に試行錯誤による発見的なプロセスになる。ただし、見付けた縮退が可能なことの証明は必要である。

（1）中間波に関わる状態

真中の決定は主波との関係で行われる。オートマトンの左隣が▶状態で右隣が⬅状態であれば、次のクロックでそのオートマトンは二人目の真中として決定する。これは「▶と◀の進行方向側の隣で、戻り波との交叉前の状態」は無くても済む（コンテキストで区別が付くから）ことを意味している。

また、オートマトンの左隣が⋚状態で右隣が⬅状態であっても、次のクロックでそのオートマトンは二人目の真中として決定するから、⋚と▶の区別は不要になる。すなわち⋚と▶、⋛と◀はそれぞれ一つの状態に縮退できる。

また、「⪋と⪌の進行方向側の隣で、戻り波との交叉後の状態」は、次のクロックでは中間波が一つ進んだ先頭の状態に移るから、前倒しで▷または◁の状態にしておいても問題が無い。すなわち、「⪋と⪌の進行方向側の隣で、戻り波との交叉後の状態」と「▷と◁」は縮退ができる。

また、⪋は右隣が必ず▷である（ただし上を前提にして）こと、また▷の左隣には他では＜は来ないことから、⪋は＜で表してもコンテキストで区別が付く。同様に、「▶の進行方向側の隣で、戻り波との交叉状態」も＜で表しても問題が無い。すなわち、「⪋と⪌」、「▶と◀の進行方向側の隣で、戻り波との交叉状態」は両方とも「＜と＞」に（コンテキスト上）縮退できる。

７分の１波を例に、図８（a）に未整理のもの、同（b）にここまでの整理結果を示す。

さらに、中間波の進行は戻り波との関係で決まる（戻り波の進行とは逆方向になる。前倒しで▷または◁の状態にすることで実現されている）ことを考慮すると、中間波の状態としては方向の区別をしなくてもよい。すなわち、▷と◁は一つに縮退できる。（それを○で表す。）また、▶と◀も一つに縮退できる。（●で表す。）図８（c）に最終的な結果を示す。中間波に関わる状態は２状態で済む。

（2）先頭の兵士に関わる状態

「先頭の兵士に返り信号が到達した状態」では、

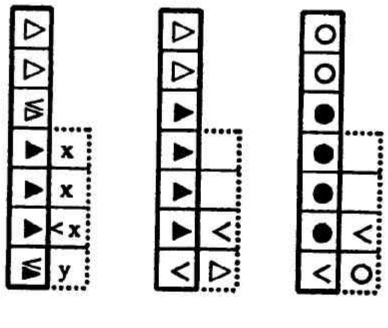


図８　中間波の状態の整理（７分の１波の例）

隣（２番目の兵士）は静止状態に居る。それ以外では、隣が静止状態に居ることは無い。（それ以外では隣は中間波の状態に居る。）従って、この状態は隣が静止状態かどうかというコンテキストで区別が付く。すなわち、「先頭の兵士に返り信号が到達した状態」と「先頭の兵士のその他の状態」の区別は不要で、一つに縮退できる。

「先頭の兵士の初期状態」でも隣（２番目の兵士）は必ず静止状態に居る。そこで、一旦は縮退した「先頭の兵士に返り信号が到達した状態」の部分を見直す。その隣の静止状態は、戻り波が通過した直後の状態で、かつ次の中間波が先頭から渡される直前の状態である。そこで、中間波の先頭を前倒しで渡すことにしてしまっても（戻り波が通過した直後の状態を前倒しで中間波の先頭状態とする）、動作上問題が無い。こうすると、「先頭の兵士の初期状態」は隣が静止状態というコンテキストでの区別が付く。以上より、先頭の兵士の状態は一つに縮退できる。

（３）二人目の真中決定に関わる状態

「二人目の真中として決定した状態」は、コンテキストで区別可能な他には無い組合せを探すことにより、縮退が可能である。

その一つは●に縮退することである。「●●」という並びは他に無い。また、真中が２個ということが分かりやすく表されるという利点もある。

他は、進行方向が逆でない返り信号を使うことである。これでもコンテキストで区別が付く。これには、主波の信号には返り信号が内在している、という意味的な整合もある。（ただし、こちらの方法のほうが状態遷移規則数が多くなる。）

９節では、ここ述べなかったさらなる縮退を述べる。

８．９状態最少時間解

前節での状態の整理をどこまで行うかによって、状態数が２５以下のさまざまな最少時間解を作ることができる。そして状態の整理をすべて適用すれば、９状態の最少時間解が得られる。状態は次のものである。図で表示するときの記号も示す。

静止状態：空白
主波状態（方向により二つ）：➡、⬅
戻り波状態（方向により二つ）：<、>
中間波状態（方向により二つ）：○、●
先頭状態：将（先頭を将軍と呼ぶことが行われているため。）
射撃状態：射

「二人目の真中として決定した状態」を●に縮退する方をとった場合、１４１個の状態遷移規則による９状態最少時間解が実現できた。（なお、先頭の隣を主波が通過した直後は静止状態でもよいが、他の部分との整合性のためにここも前倒しで中間波状態としている。）一斉射撃の実行例（兵士数＝２２の場合）を図９に示す。

この解は、主波、戻り波、中間波という解の原理をそのまま分かりやすく実現している。

９．８状態最少時間解

９状態からさらなる状態の縮退を検討する。主波の状態は戻り波の始まりという意味も内在するので、これを戻り波状態に統合することを考える。それには戻り波の始まりが前進（戻り波の進行方向とは逆向きに）しなければならない。これは静止状態を、主波が進む前方と、主波が進んだ後方に分け、その境界では主波は前方に引かれるようにすることで解決する。静止状態を末尾側静止状態と先頭側静止状態とし、主波が先頭から末尾に向けて進むときは末尾側静止状態に引かれ、主波が先頭に向けて戻るときには逆に先頭側静止状態に引かれるようにする。状態は次の８状態になる。

末尾側静止状態：空白
先頭側静止状態：・
戻り波状態（方向により二つ）：<、>
中間波状態（方向により二つ）：○、●
先頭状態：将
射撃状態：射

「二人目の真中として決定した状態」を●に縮退する方をとることにより、１３４個の状態遷移規則による８状態最少時間解が実現できた。一斉射撃の実行例（兵士数＝２２の場合）を図１０に、また状態遷移規則を表１に示す。

解の原理をシンプルに実現する８状態の有限オートマトンが得られた。

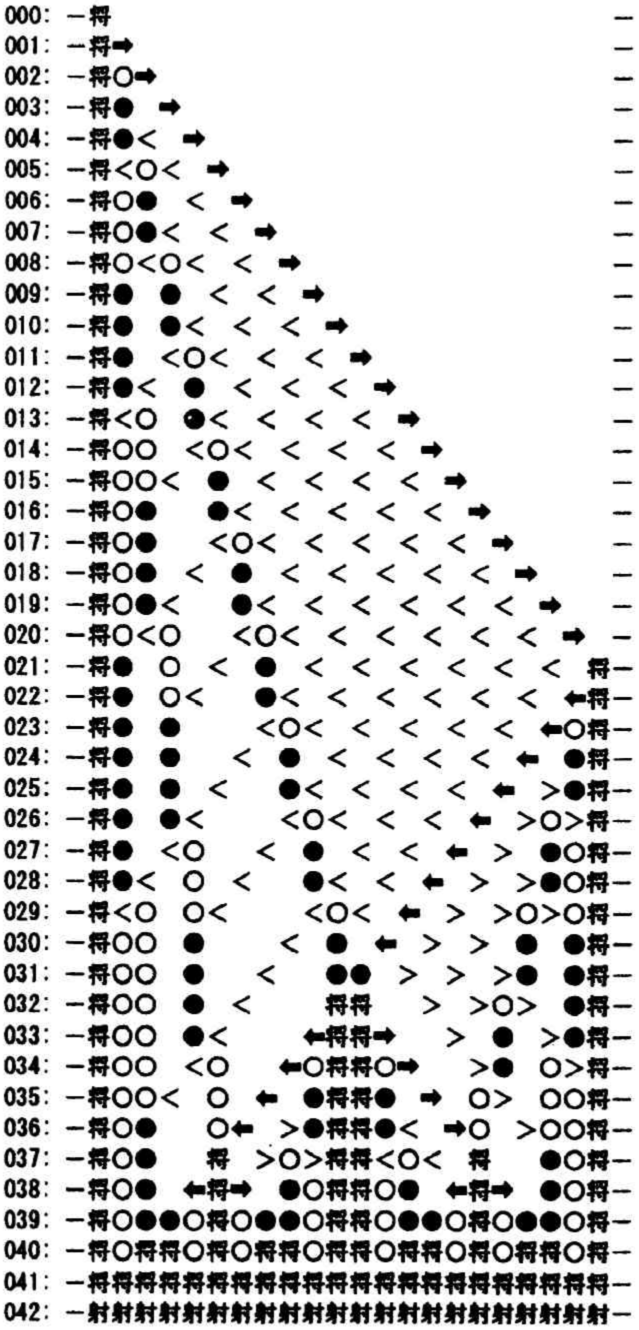


図９　９状態有限オートマトンによる一斉射撃実行例（兵士数＝２２の場合）

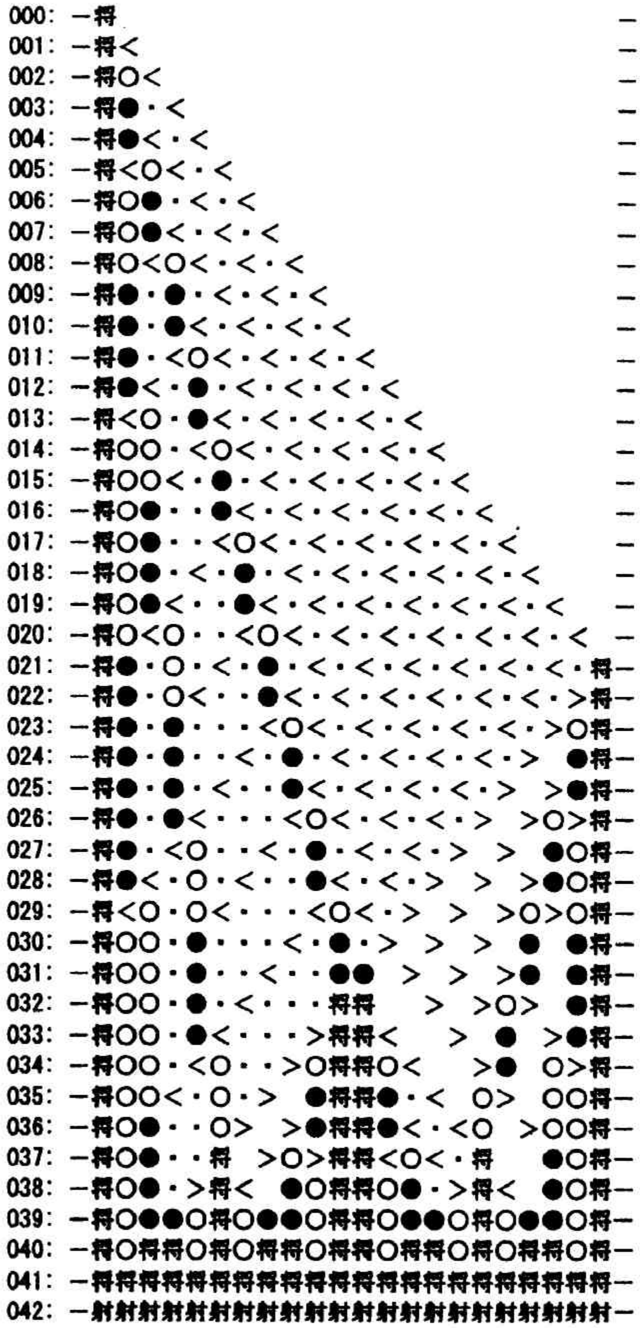


図１０　８状態有限オートマトンによる一斉射撃実行例（兵士数＝２２の場合）

```
000: —将　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　—
001: —将<　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　—
002: —将・<　　　　　　　　　　　　　　　　　　　—
003: —将●・<　　　　　　　　　　　　　　　　　　—
004: —将●<・<　　　　　　　　　　　　　　　　　—
005: —将・○<・<　　　　　　　　　　　　　　　　—
006: —将・●・<・<　　　　　　　　　　　　　　　—
007: —将・●<・<・<　　　　　　　　　　　　　　—
008: —将・<○<・<・<　　　　　　　　　　　　　—
009: —将●・●・<・<・<　　　　　　　　　　　　—
010: —将●・●<・<・<・<　　　　　　　　　　　—
011: —将●・<○<・<・<・<　　　　　　　　　　—
012: —将●<・●・<・<・<・<　　　　　　　　　—
013: —将・○・●<・<・<・<・<　　　　　　　　—
014: —将・○・<○<・<・<・<・<　　　　　　　—
015: —将・○<・●・<・<・<・<・<　　　　　　—
016: —将・●・・●<・<・<・<・<・<　　　　　—
017: —将・●・・<○<・<・<・<・<・<　　　　—
018: —将・●・<・●・<・<・<・<・<・<　　　—
019: —将・●<・・●<・<・<・<・<・<・<　　—
020: —将・<○・・<○<・<・<・<・<・<・<　—
021: —将●・○・<・●・<・<・<・<・<・<・将—
022: —将●・○<・・●<・<・<・<・<・<・>将—
023: —将●・●・・・<○<・<・<・<・<・>　将—
024: —将●・●・・<・●・<・<・<・<・>　●将—
025: —将●・●・<・・●<・<・<・<・>　>●将—
026: —将●・●<・・・<○<・<・<・>　>○　将—
027: —将●・<○・・<・●・<・<・>　>　●　将—
028: —将●<・○・<・・●<・<・>　>　>●　将—
029: —将・○・○<・・・<○<・>　>　>○>　将—
030: —将・○・●・・・<・●・>　>　>　●　●将—
031: —将・○・●・・<・・●●　>　>　>●　●将—
032: —将・○・●・<・・・将将　　>　>○>　●将—
033: —将・○・●<・・・>将将<　　>　●　>●将—
034: —将・○・<○・・>　将将・<　　>●　○　将—
035: —将・○<・○・>　●将将●・<　○>　○　将—
036: —将・●・・○>　>●将将●<・<○　>○　将—
037: —将・●・・将　>○　将将・○<・将　　●　将—
038: —将・●・>将<　●　将将・●・>将<　●　将—
039: —将・●●　将・●●　将将・●●　将・●●　将—
040: —将・将将　将・将将　将将・将将　将・将将　将—
041: —将将将将将将将将将将将将将将将将将将将将将将—
042: —射射射射射射射射射射射射射射射射射射射射射射—
```

図１１　８状態有限オートマトン（別解）による一斉射撃実行例（兵士数＝２２の場合）

１０．８状態最少時間解の別解

上で述べた９状態や８状態の解は、状態の取り方の細部を変えた変種や、またアルゴリズムを若干モディファイしたものなど、多くの別解を作ることができる。

８状態解の変種の一つとして、先頭の隣の○状態と戻り波状態（<と>）を静止状態（先頭の右隣は・、左隣は空白）で置き換えたものが作れる。こうしても、端というコンテキストを利用して同じ動作を実現できる。この場合、先頭とその隣との関係がより簡単になるので、状態遷移規則数が減り１１９個になった。この場合の一斉射撃の実行例（兵士数＝２２の場合）を図１１に、また状態遷移規則を表２に示す。これはよりシンプルな解であるが、解のアルゴリズムの表現という点では、前の解の方がより論理的といえる。

１１．計算機による検証

以上で述べた８状態および９状態の解のそれぞれについて計算機上でシミュレーションを行い、最少時間による一斉射撃が行われることを兵士数２人から 10,000 人まで確かめた。

１２．結言

一斉射撃問題の最少時間解について、兵士数を２分、２分していくという方針をとり、解の各ステップを検証しながら（インフォーマルな証明を与えながら）解いてみた。状態数が２５の有限オートマトンから始めて、状態の縮退の仕方によりいろいろな解があることを示し、最終的に８状態の解まで与えた。解の原理を直接的に実現した分かりやすい８状態解が得られた。これは Baltzer の８状態解と比較してより分かりやすいと思われる。また状態遷移規則数もより少ない（Baltzer の１６５個（注１）に対して１３４個ないし１１９個）。なお、１１９個は、Mazoyer の６状態解の状態遷移規則数と並ぶ少ない数である（注２）。解は計算機によるシミュレーションによって、有限オートマトンの個数が２から 10,000 まで検証した。

問題を解いていく過程で、遷移規則の整理と射撃の試行を計算機で行えるようにした。これにより、比較的短い期間で本研究が行えた。

（注１）Baltzer の論文 [4] には１８２個の状態遷移規則が示されているが、１６個は使われないもの、また１個は兵士数が１の場合のものであるため、実質的な数は１６５個であると思われる。

（注２）Mazoyer の論文 [5] には１２０個の状態遷移規則が示されているが、１個は一斉射撃が始まる前のものであり、実質は１１９個。

表１　８状態有限オートマトンの状態遷移規則

$S_{i-1}(t)\ S_i(t)\ S_{i+1}(t)\ S_i(t+1)$: x y （xとyは最初にこの規則が使われた兵士数とクロック数）で示す。
状態の文字表示と記号表示の対応

Q0:・　Q1:空白　B0:＜　B1:＞　M:○　N:●　C:将　F:射　（- は端を表す）

- C Q1C :	2	0
- C B0C :	3	1
- C M C :	3	2
- C N C :	4	3
- C C F :	2	1
Q1Q1- Q1:	3	0
Q1Q1Q1Q1:	4	0
Q1Q1B1Q1:	14	20
Q1Q1M Q1:	27	46
Q1Q1N Q1:	12	17
Q1B1Q1Q1:	13	18
Q1B1M Q1:	11	15
Q1B1N M :	9	12
Q1M Q1M :	27	47
Q1M B1M :	10	14
Q1M M M :	19	32
Q1N Q1N :	15	23
Q1N M N :	11	16
Q1N C N :	7	9
Q0Q0Q0Q0:	16	23
Q0Q0B0B0:	13	17
Q0Q0B1B1:	16	24
Q0Q0M Q0:	22	36
Q0Q0N Q0:	12	16
Q0Q0C B1:	12	17
Q0B0Q1Q0:	5	3
Q0B0Q0Q0:	7	6
Q0B0M Q0:	9	11
Q0B1Q1Q1:	10	12
Q0B1M Q1:	8	9
Q0B1C M :	6	6
Q0M Q0M :	14	21
Q0M B0N :	15	22
Q0M B1C :	14	22
Q0N Q0N :	8	9
Q0N B0B0:	9	10
Q0N N C :	8	10
Q0C - C :	4	3
Q0C Q1C :	7	9
Q0C C C :	8	11
B0Q1- C :	3	1
B0Q1Q1B0:	4	1
B0Q1B1B0:	13	19
B0Q1M B0:	14	21
B0Q1N N :	11	16
B0Q0Q0Q0:	14	19
B0Q0B0B0:	6	4
B0Q0B1B1:	7	7
B0Q0M Q0:	18	28
B0Q0N Q0:	10	12
B0Q0C B1:	5	4
B0M Q1C :	14	22
B0M Q0M :	10	13
B0M B0N :	6	5
B0M B1C :	5	5
B0M M C :	10	15
B1Q1Q1B1:	25	41
B1Q1B1B1:	11	14
B1Q1M B1:	21	34
B1Q1N B1:	9	11
B1M Q1N :	29	50
B1M B1N :	11	15
B1M M N :	21	35
B1M C N :	7	8
B1N Q1B1:	17	26
B1N M B1:	13	19
B1N C B1:	9	12
B1C - C :	5	5
B1C B0C :	9	13
B1C C C :	10	15
M Q1Q1Q1:	43	78
M Q1B1Q1:	18	29
M Q1M Q1:	35	63
M Q1N Q1:	14	22
M Q0Q0Q0:	14	20
M Q0B0B0:	11	14
M Q0B1B1:	14	21
M Q0M Q0:	18	29
M Q0N Q0:	10	13
M Q0C B1:	10	14
M B0Q1Q0:	4	2
M B0Q0Q0:	6	5
M B0M Q0:	7	8
M B1Q1Q1:	9	11
M B1M Q1:	7	8
M B1C M :	5	5
M M Q0M :	10	14
M M B0N :	11	15
M M B1C :	10	15
M M C M :	10	15
M N Q0N :	6	6
M N B0B0:	7	7
M N N C :	6	7
M C - C :	3	2
M C M C :	5	6
M C C C :	6	8
N Q1Q1Q1:	23	38
N Q1B1Q1:	10	13
N Q1M Q1:	19	31
N Q1N Q1:	8	10
N Q0Q0Q0:	12	16
N Q0B0B0:	5	3
N Q0B1N :	6	6
N Q0M Q0:	14	21
N Q0N Q0:	8	9
N Q0C N :	4	3
N B0Q0M :	5	4
N M C M :	6	7
N N Q1C :	8	10
N N M C :	6	7
N N C C :	4	4
N C - C :	4	4
N C N C :	7	10
N C C C :	8	12
C Q1- C :	2	0
C Q1Q1B0:	3	0
C Q1B1B0:	9	12
C Q1M B0:	10	14
C Q1N N :	7	9
C B0Q1M :	3	1
C B0M M :	5	5
C M B0N :	4	2
C M M M :	10	14
C M N M :	6	6
C M C C :	3	2
C N Q0N :	4	3
C N B0B0:	5	4
C N N C :	4	4
C C - F :	2	1
C C Q1C :	8	11
C C B0C :	10	15
C C M C :	6	8
C C N C :	8	12
C C C F :	3	3

Total: 134 rules

表２　８状態有限オートマトン（別解）の状態遷移規則

$S_{i-1}(t)\,S_i(t)\,S_{i+1}(t)\,S_i(t+1)$：$x$　y　（xとyは最初にこの規則が使われた兵士数とクロック数）で示す。
状態の文字表示と記号表示の対応
Q0:・　Q1:空白　B0:＜　B1:＞　M:○　N:●　C:将　F:射　(- は端を表す)

- C Q1C :	2	0
- C Q0C :	3	2
- C B0C :	3	1
- C N C :	4	3
- C C F :	2	1
Q1Q1- Q1:	3	0
Q1Q1Q1Q1:	4	0
Q1Q1B1Q1:	14	20
Q1Q1M Q1:	27	46
Q1Q1N Q1:	12	17
Q1B1Q1Q1:	13	18
Q1B1M Q1:	11	15
Q1B1N M :	9	12
Q1M Q1M :	10	14
Q1M B1M :	14	21
Q1N Q1N :	11	16
Q1N C N :	7	9
Q1C - C :	5	6
Q1C Q0C :	9	14
Q1C C C :	10	16
Q0Q0Q0Q0:	16	23
Q0Q0B0B0:	13	17
Q0Q0B1B1:	16	24
Q0Q0M Q0:	22	36
Q0Q0N Q0:	12	16
Q0Q0C B1:	12	17
Q0B0Q1Q0:	4	2
Q0B0Q0Q0:	7	6
Q0B0M Q0:	7	8
Q0B1Q1Q1:	8	9
Q0B1C Q1:	6	6
Q0M Q0M :	10	13
Q0M B0N :	6	5
Q0M B1C :	5	5
Q0N Q0N :	6	6
Q0N B0B0:	7	7
Q0N N C :	6	7
Q0C - C :	3	2
Q0C Q1C :	5	6
Q0C C C :	6	8
B0Q1- C :	3	1
B0Q1Q1B0:	4	1
B0Q1B1B0:	13	19
B0Q1M B0:	14	21
B0Q1N N :	11	16
B0Q0Q0Q0:	14	19
B0Q0B0B0:	6	4
B0Q0B1B1:	7	7
B0Q0M Q0:	18	28
B0Q0N Q0:	10	12
B0Q0C B1:	5	4
B0M Q1C :	9	13
B0M Q0M :	14	20
B0M B0N :	8	8
B0M B1C :	7	8
B1Q1Q1B1:	25	41
B1Q1B1B1:	11	14
B1Q1M B1:	21	34
B1Q1N B1:	9	11
B1Q1C N :	7	8
B1M Q1N :	11	15
B1M B1N :	15	22
B1N Q1B1:	13	19
B1N C Q1:	9	12
B1C - C :	5	5
B1C B0C :	9	13
B1C C C :	10	15
M Q1Q1Q1:	43	78
M Q1B1Q1:	18	29
M Q1M Q1:	35	63
M Q1N Q1:	14	22
M Q1C Q1:	9	13
M Q0Q0Q0:	14	20
M Q0B0B0:	11	14
M Q0B1B1:	14	21
M Q0M Q0:	18	29
M Q0N Q0:	10	13
M Q0C B1:	10	14
M B0Q0Q0:	6	5
M B1Q1Q1:	7	8
M B1C Q1:	5	5
N Q1Q1Q1:	23	38
N Q1B1Q1:	10	13
N Q1M Q1:	19	31
N Q1N Q1:	8	10
N Q1C Q1:	6	7
N Q0Q0Q0:	12	16
N Q0B0B0:	5	3
N Q0B1N :	6	6
N Q0M Q0:	14	21
N Q0N Q0:	8	9
N Q0C N :	4	3
N B0Q0M :	5	4
N N Q1C :	6	7
N N C C :	4	4
N C - C :	4	4
N C N C :	7	10
N C C C :	8	12
C Q1- C :	2	0
C Q1Q1B0:	3	0
C Q1B1B0:	9	12
C Q1M B0:	10	14
C Q1N N :	7	9
C Q1C C :	5	6
C Q0B0N :	4	2
C Q0M Q0:	5	5
C Q0N Q0:	6	6
C Q0C C :	3	2
C B0Q1Q0:	3	1
C B0M Q0:	9	13
C N Q0N :	4	3
C N B0Q0:	5	4
C N N C :	4	4
C C - F :	2	1
C C Q1C :	6	8
C C Q0C :	10	16
C C B0C :	10	15
C C N C :	8	12
C C C F :	3	3

Total: 119 Rules

謝辞　本研究にあたり、一斉射撃問題の由来やこれまでの研究状況につき種々ご教授いただいた後藤英一教授、および本問題に関する文献をご提供いただいた後藤研究室大学院生堀幸雄氏に感謝します。

参考文献

[1] 後藤英一："オートマトンに関するパズル"、情報科学への道（北川敏男編）第３章、pp. 67-92、共立出版（1966）

[2] 後藤英一："一斉射撃の問題"、数理科学、11巻、10号、pp. 42-46（1973）

[3] A. Waksman: "An optimal solution to the firing squad synchronization problem", Information and Control **9**, pp. 66-78 (1966)

[4] R. Baltzer: "An 8-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem", Information and Control **10**, pp. 22-42 (1967)

[5] J. Mazoyer: "A six-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem", Theoretical Computer Science, Vol. 50, pp. 183-238 (1987)

[6] J. Mazoyer: "On optimal solutions to the firing squad synchronization problem", Theoretical Computer Science, Vol. 168, pp. 367-404 (1996)

[7] 曽我部崇、野村行宏、梅尾博司："A. Waksmanの一斉射撃アルゴリズムにおける遷移規則の検証並びに最適化ついて"、情報処理学会第６０回全国大会、6F-1、pp. 1-187-1-188 (2000)

[8] H. Umeo, T. Sogabe, Y. Nomura: "Correction, optimization and verification of Translation Rule Set for Waksman's Firing Squad Synchronization Algorithm", Theoretical and Practical Issues on Cellular Automata (Proceedings of the 4th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry), pp. 152-160 (2000)