

グラニュラリティ調整による 信用集中リスク管理

菅野 正泰

要旨

信用集中リスクは、金融機関の規制（バーゼル2）上は、第2の柱の枠組みとして内部管理に委ねられており、リスク量、管理手法などに関して、必ずしも明確な定義付けがされているわけではない。リスク計測モデルについても、これまで先進諸国の監督当局、中央銀行の実務研究者が中心になって研究が行われてきていたが、マーケットリスクのモデルと異なり、デファクト・スタンダードと言えるものは、いまだ確立されていない。本稿では、信用集中リスクに関する主要なテーマとして、グラニュラリティ調整^{*1}による信用集中リスクモデルについて整理した上で、解析解によるグラニュラリティ調整項の近似精度を数値検証し、本モデルを利用する場合の課題を整理する。

キーワード：信用集中リスク，グラニュラリティ調整，不均一ポートフォリオ

^{*1} 詳細は後述するが、大雑把に言えば、個社集中や業種集中などを内包する実際の信用ポートフォリオのリスク量と、無限に分散された信用ポートフォリオのリスク量との差分に相当する。

1 はじめに

一般に、リスク測度は、システムティック・リスクの部分と固有リスクの部分に分解することが可能である。簡単な例として、リスク測度に損失率^{*2} L の分散 $V[L]$ を考えると、 X をシステムティック・リスクファクターとして、

$$V[L] = V[E[L|X]] + E[V[L|X]] \quad (1.1)$$

と表すことが可能である。ここで、 $E[\cdot]$ 及び $V[\cdot]$ は、それぞれ期待値及び分散を表す。また、 $L|X$ は、 X の実現値を条件とした L の条件付確率変数を表す。

(1.1)式より、損失率の分散 $V[L]$ は、損失率の条件付期待値の分散 $V[E[L|X]]$ と損失率の条件付分散の期待値 $E[V[L|X]]$ の和に等しいことがわかる。前者は、システムティック・リスクファクター X のコントリビューション (contribution)を表し、システムティック・リスクファクターが債務者に影響を及ぼす限り、 $E[L|X]$ は X とともに変動し、分散 $V[E[L|X]]$ はポートフォリオの債務者数が増加しても消えることはない。

これに対して、後者は、ポートフォリオの債務者固有のリスクのコントリビューションを表すが、無限に分散されたポートフォリオであれば、債務者数の増加に伴って固有リスクは減少し、損失率の条件付分散はゼロになる。しかしながら、十分に分散されないポートフォリオでは、固有リスクの残差が残る。

他のリスク測度である VaR や期待ショートフォールなども同様にリスク分解することが可能である。これらリスク測度に対する固有リスクのコントリビューションをグラニューラリティ調整といい、Gordy [2003] によってバーゼル II の枠組みの中で最初に議論が行われ、最終的には、第 2 の柱で取り扱われることとなった。

本稿では、最初に第 2 節から第 4 節で、Gordy [2003] のモデルを説明する。次に、第 5 節では、グラニューラリティ調整を利用した信用集中リスクの推定精度を数値検証し、Gordy [2003] の方法を利用する場合の課題を整理する。第 6 節では、グラニューラリティ調整項に関する比較静学を行う。

^{*2} 後の議論と一貫性をとるため、損失額ではなく、損失率を扱う。

2 モデルの基本設定

n 人の債務者で構成されるポートフォリオ^{*3}に対して、 U_i をシステムティック・リスクファクター X に関する条件付独立な資産 i の損失率と置く。このとき、ポートフォリオの損失率 L_n は、各債務者のエクスポージャー A_i ($i = 1, \dots, n$) の加重平均として、

$$L_n = \frac{\sum_{i=1}^n U_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (2.1)$$

と表される。ここで、損失率 U_i は、次の条件を満たす確率変数である。

仮定 2.1 (U_i の制約条件). U_i は $[0, 1]$ の値をとり、システムティック・リスクファクター X に関して条件付独立である。

このとき、 U_i は、次の例のように、「簿価」あるいは「時価」ベースの何れかで定義される。

例 2.1. 簿価ベース (*Default Mode* 方式) の場合、

$$U_i = \begin{cases} LGD_i & ; \text{債務者 } i \text{ がデフォルトした場合} \\ 0 & ; \text{それ以外} \end{cases}$$

ここで、 LGD_i は債務者 i のデフォルト時損失率を表す。例として、*CreditRisk+* がある。

例 2.2. 時価ベース (*Mark-To-Market* 方式) の場合、 U_i は、満期における期待市場価値を割り引いた価値である。例として、*CreditMetricsTM* の *Mark-To-Market* 方式^{*4}がある。

次に、ある $q \in (0, 1)$ の値を所与とすると、VaR は損失分布 L_n の q パーセンタイル値として定義され、これを $VaR[L_n]$ とおく。また、確率変数 X の分布

^{*3} 簡単化のため、各債務者に対して 1 つの資産を仮定する。

^{*4} *CreditMetricsTM* には、*Default Mode* 方式もある。

の q パーセンタイル値を $\alpha_q(X)$ とおくと,

$$\alpha_q(X) := \inf\{x : Pr(X \leq x) \geq q\} \quad (2.2)$$

と定義される. ここで, より一般的な標記をすると, $VaR_q[L_n] = \alpha_q(L_n)$ となる.

■極限損失分布 債務者 (エクスポージャー) 数 n が無限のケースを考える. このとき, エクスポージャー A_i ($i = 1, \dots, n$) に関して, 固有リスクが漸近的に分散されて消滅するための制約条件, すなわち, ポートフォリオのエクスポージャー数 n が増加したとき, ポートフォリオの全エクスポージャーに対する最大のエクスポージャーの割合が 0 になるという条件を考え, 次のように仮定する.

仮定 2.2 (エクスポージャーの性質). A_i ($i = 1, \dots, n$) は次の 2 つの条件を満たす正の定数である.

1. $\sum_{i=1}^n A_i \uparrow \infty$
2. $A_n / \sum_{i=1}^n A_i = O(n^{-\zeta})$ を満たす $\zeta > 1/2$ が存在する.

この制約条件の下では, $n \rightarrow \infty$ のとき, L_n の条件付分布は, 条件付期待値である極限損失分布に収束する. すなわち, 次の命題が成立する.

命題 2.1 (極限損失分布). 仮定 (2.1) と (2.2) が成立するとき, システムティック・リスクファクター X の実現値 x を与えたとき,

$$L_n - E[L_n|x] \rightarrow 0 \quad a.s. \quad (2.3)$$

となる.

命題 2.1 は大数の強法則により成立する. 証明は, Gordy [2003] を参照されたい. 命題 2.1 を直感的に説明すると, 「ポートフォリオの各エクスポージャーの割合が増加するにつれて, ポートフォリオの固有リスクは完全に分散されて消滅する」ということである. このような性質を持つポートフォリオを「無限分散ポートフォリオ」(Infinitely Fine-grained Portfolio), あるいは「漸近ポート

フォリオ」(Asymptotic Portfolio) といい、このポートフォリオの分布を「極限損失分布」(Limit Loss Distribution) という。

よって、極限損失分布が解れば、 L_n の非条件付分布を計算することができる。最も重要な例として、非条件付損失分布 L_n の q パーセンタイル値は、 $E[L_n|X]$ の非条件付分布の q パーセンタイル値に漸近する、すなわち、

$$\alpha_q(L_n) - \alpha_q(E[L_n|X]) \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

が成立する。一般には、損失率 L_n のパーセンタイル値を計算するよりも、 $E[L_n|X]$ のパーセンタイル値を計算する方が簡単な場合が多い。これまで、条件付期待損失関数 $E[U_i|x]$ に課した制約条件は、仮定 2.1: U_i は $[0, 1]$ の区間の値をとる、ということだけであり、それ以外の制約条件は課していない。

しかしながら、 U_i や $E[U_i|X = x]$ は、「不連続関数」であるかもしれないし、「非単調関数」であるかもしれない。また、システムティック・リスクファクターベクトル X に関しては、何の制約条件も課していない。そこで、 $E[U_i|X = x]$ のパーセンタイル値を簡単に求めるために、更に次の 2 つの制約条件を課す。

仮定 2.3 (単一リスクファクター). システムティック・リスクファクター X は 1 変量である。

仮定 2.4 (条件付期待損失関数の単調性). 任意の債務者 i に対して、条件付期待損失関数 $E[L_n|x]$ は、 x の単調増加関数である。また、 x において、連続かつ微分可能である。

直感的には、2.3 の仮定は、「債務者全体に依存を与える源泉は、単一のグローバルな経済変数である」ことを意味している。また、2.4 の仮定は、「 $E[L_n|X]$ の q パーセンタイル値は、 X の q パーセンタイル値と関連している」ことを意味しており、この仮定がなければ、損失分布のパーセンタイル値は、 x の変動と共に、債務者の条件付期待損失関数と複雑に依存するため、容易に計算することができない。

これらの仮定の下、極限損失分布のパーセンタイル値は、次の命題として与えられる。

命題 2.2 (極限損失分布のパーセンタイル値). 仮定 2.3 及び 2.4 が成立するとき, 極限損失分布 $E[L_n|X]$ の q パーセンタイル値は, 次式のようになる.

$$\alpha_q(E[L_n|X]) = E[L_n|\alpha_q(X)] = \frac{\sum_{i=1}^n E[U_i|\alpha_q(X)]A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (2.5)$$

(2.5) 式の最初の等号は, 仮定 2.3 と 2.4 から成立する. また, 2 番目の等号は, 期待値の線形性から成立する. 一般に, $\alpha_q(E[L_n|X])$ はかなり複雑であるが, $E[L_n|\alpha_q(X)]$ は, 個別資産の条件付期待損失率をエクスポージャーで加重平均した値として, 簡単に求めることが可能なため, この命題が有用である.

バーゼル II では, 内部格付手法において, 各資産のリスクウエイトは, ポートフォリオの構成には依存せず, ポートフォリオを構成する資産の性質のみに依存するという「ポートフォリオ不変性」(portfolio-invariance) を仮定しており, この前提として,

- 仮定 2.2: 漸近ポートフォリオ (Asymptotic Portfolio)
- 仮定 2.4: 単一リスクファクター (Single Systematic Risk Factor)

という 2 つの仮定を置いている. これらを前提としたモデルを **ASRF**(Asymptotic Single Risk Factor) モデルと言う.

以降では, まず, 均一なポートフォリオに対する VaR のグラニュラリティ調整の方法を解説し, 次に, 不均一なポートフォリオに対するグラニュラリティ調整の方法として, モーメント・マッチングの方法について説明する.

3 均一ポートフォリオに対するグラニュラリティ調整

まず, 均一ポートフォリオについて考えると, エクスポージャー A_i ($i = 1, \dots, n$) は全て等しく, (2.1) 式は,

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i \quad (3.1)$$

と簡略化され、また、各資産の条件付期待損失関数 $\mu(x) = E[U_i|X = x]$ は全て等しくなる。

このとき、仮定 2.3 と 2.4 の下で、有限サイズの均一ポートフォリオの VaR は、漸近値の周りにテーラー展開することで、次式のように求めることができる*5。

$$\alpha_q(L_n) = \mu[\alpha_q(X)] + \frac{1}{n}\beta[\alpha_q(X)] + \mathcal{O}(n^{-2}) \quad (3.2)$$

ここで、 $\alpha_q(L_n)$ は、ポートフォリオの真の VaR を表し、エクスポージャー A_i が「均一 (homogenous)」で「資産数が有限 ($n < \infty$)」のポートフォリオに対する VaR である。 $\mu[\alpha_q(X)]$ は、漸近 VaR を表し、エクスポージャー A_i が「均一」で「資産数が無限大 ($n = \infty$)」のポートフォリオの分布、すなわち極限損失分布 (Limit Loss Distribution) に対する VaR である。 $\frac{1}{n}\beta[\alpha_q(X)]$ は、「グラニューラリティ調整項」であり、VaR をテーラー展開したときの一次導関数であり、関数形からもわかるように、“資産数が 2 倍になると、グラニューラリティ調整項は半分になる”ことがわかる。また、 $\mathcal{O}(n^{-2})$ は、次数 n^{-2} 以下の微小項を表す。

グラニューラリティ調整は、Gordy [2003] により提案されたが、(3.2) 式の調整項 β/n の導出は、Gouriéroux et al. [2000] や Martin and Wilde [2002] の結果に基づいている。Martin and Wilde [2002] によると、グラニューラリティ調整項 β/n に含まれる β の一般形は、

$$\beta(\hat{x}) = -\frac{1}{2h(x)} \frac{d}{dx} \frac{\sigma^2(x)h(x)}{\mu'(x)} \Bigg|_{x=\hat{x}} \quad (3.3)$$

と与えられる。ここで、 $\mu(x) = E[U_i|X = x]$ 、 $\sigma^2(x) = V[U_i|X = x]$ 、及び $h(x)$ は X の確率密度であり、追加的な仮定として、条件付分散 $V[U_i | X = x]$ は、局所的に x において連続かつ微分可能であるとする。大数の強法則により、確率 1 で $|L_n - \mu(X)|$ は 0 に収束する。したがって、 L_n は、債務者数 n が無限大のとき $\mu(X)$ に収束する。

*5 正式な導出は、Martin and Wilde [2002] を参照されたい。

X が 1 変量るとき、すなわち単一のシステムティック・リスクファクターしか存在せず、加えて $\mu(X)$ が x の単調増加関数のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_q(L_n) = \mu[\alpha_q(X)] \quad (3.4)$$

が得られる。(3.4) 式の証明は、Gordy [2003] 命題 2 の証明を参照されたい。

この関係式は、バーゼル II の内部格付手法の理論的基礎を与えるものである。また、 n が十分大きい場合には、 $\alpha_q(L_n)$ は $\mu[\alpha_q(X)]$ で近似することが可能であり、一般に金融機関で広く使われているモデルでは、非常に簡単な形で表現することが可能であり、商用モデルの CreditRisk+ に対しても、後掲の (3.9) 式で簡単な形で表されることがわかる。

グラニュラリティ調整項を具体的に計算するためには、特定のモデルを仮定して、(3.3) 式の β を特定する必要がある。一般に、金融機関で広く使われている信用 VaR モデルでは、 $\mu(x)$ 、 $\sigma^2(x)$ 及び $h(x)$ に対して、厳密に単調増加で、連続微分可能な関数を仮定している。

そこで、Gordy [2003] に従い、CreditRisk+ モデルの拡張版に対するグラニュラリティ調整項を計算する。ここでの仮定としては、

- システムティック・リスクファクター X は、平均 1、分散 $\sigma^2 =: 1/\xi$ のガンマ分布に従う。
- 各債務者は、同じデフォルト確率 \bar{p} と factor loading w を持つ。
- 各債務者は、同じサイズで 1 に正規化されたエクスポージャーを持つ。
- 各債務者は、 X とは独立で、平均 λ 、分散 η^2 のガンマ分布に従う同じ LGD を持つ。

である。このとき、 X の確率密度 $h(x)$ は、次式で与えられる*6。

$$h(x) = \frac{\xi^\xi}{\Gamma(\xi)} x^{\xi-1} \exp(-\xi x) \quad (3.5)$$

*6 参考までに、ガンマ関数 $\Gamma(\xi)$ は、次式で定義される。

$$\Gamma(\xi) = \int_0^\infty x^{\xi-1} e^{-x} dx$$

また、条件付期待損失 $\mu(x)$ と条件付分散 $\sigma^2(x)$ は、それぞれ、

$$\mu(x) = \lambda \bar{p}(1 + w(x - 1)) \quad (3.6)$$

$$\sigma^2(x) = (\lambda^2 + \eta^2) \bar{p}(1 + w(x - 1)) \quad (3.7)$$

となる。(3.5)~(3.7) 式を (3.3) 式に代入することにより、

$$\beta[\alpha_q(X)] = \frac{\lambda^2 + \eta^2}{2\lambda} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(1 + \frac{\sigma^2 - 1}{\alpha_q(X)} \right) \left(\alpha_q(X) + \frac{1 - w}{w} \right) - 1 \right] \quad (3.8)$$

が得られる。なお、CreditRisk+ の標準版に対するグラニュラリティ調整項を得るには、 $\eta = 0$ と置けばよい。

また、漸近 VaR の値は、(3.6) 式で $x = \alpha_q(X)$ と置くことにより、

$$\mu[\alpha_q(X)] = \lambda \bar{p}(1 + w(\alpha_q(X) - 1)) \quad (3.9)$$

として求めることができる。

4 不均一ポートフォリオに対するグラニュラリティ調整

実際の金融機関のポートフォリオの多くは、(2.1) 式に含まれるエクスポージャー A_i が不均一 (heterogenous) で資産数 n が有限 ($n < \infty$) のポートフォリオであり、また、(3.2) 式は不均一であっても成立する。ただし、均一なポートフォリオと異なり、実際の不均一なポートフォリオに対するグラニュラリティ調整項を直接計算することは難しい。

Gordy [2003] では、元々の不均一ポートフォリオ (資産数 n) と分布のモーメントが等価な仮定の均一ポートフォリオ (資産数 $n^* (< n)$) を計算した上で、実際のポートフォリオに対するグラニュラリティ調整項を計算することで近似している。この方法は、次のステップからなる。

1. 実際の不均一なポートフォリオと損失分布のモーメントが等価な均一の仮定ポートフォリオをモーメント・マッチングにより作成する。
2. 仮定のポートフォリオのグラニュラリティ調整項を計算する。

第1ステップとして、債務者数 n 、プール数 B の不均一なポートフォリオを考える。各プール b 内の債務者は、同じパラメーターとして、PD: \bar{p}_b , factor loading: w_b , 期待 LGD: λ_b , 及び LGD のボラティリティ: η_b を持つ。

エクスポージャーのサイズを A_i とすると、プール b 内のエクスポージャーの集中度合を表す集中指標（ハーフィンダール指標） H_b は、次式で与えられる。

$$H_b := \frac{\sum_{i \in b} A_i^2}{(\sum_{i \in b} A_i)^2} \quad (4.1)$$

この集中指標 H_b は、完全に不均一の場合、すなわち 1 債務者のみに与信集中する場合、1 をとる。一方、均一の場合、プール b を構成する債務者数を n_b とすると、 $1/n_b$ をとる。したがって、 H_b のとり得る値の範囲は、次のようになる。

$$\frac{1}{n_b} \leq H_b \leq 1 \quad (4.2)$$

損失分布のモーメント・マッチングを行う場合、プールレベルの 5 つのモーメント ($\bar{p}_b, w_b, \lambda_b, \eta_b, H_b$) と全プールのエクスポージャーの合計により、等価な仮定の均一ポートフォリオのサイズ n^* と 4 つのモーメント ($\bar{p}^*, w^*, \lambda^*, \eta^*$) を求める。なお、マッチングさせるモーメントは、次の 5 つである。

- エクスポージャーで加重した期待デフォルト率
- 期待ポートフォリオ損失率
- システマティック・リスクのコントリビューション ((1.1) 式の第 1 項に対応)
- 損失分散に対する固有のデフォルトリスクのコントリビューション ((1.1) 式の第 2 項に関連*7)
- 損失分散に対する固有の回収リスクのコントリビューション ((1.1) 式の第 2 項に関連)

*7 (1.1) 式の第 2 項は、損失分散に対する固有リスクのコントリビューションに対応し、これを更に分解すると、「固有のデフォルトリスク」に対するコントリビューションと「固有の回収リスク」に対するコントリビューションに分解することが可能である。

第2ステップとして、これらモーメントを等価な均一ポートフォリオに対する漸近的な β^* を、(3.8)式に代入することにより求めることができる。等価な均一の仮想のポートフォリオのサイズ n^* と4つのモーメント $(\bar{p}^*, w^*, \lambda^*, \eta^*)$ は以下のように求めることができる。すなわち、 s_b をプール b のエクスポージャーの全ポートフォリオのエクスポージャーに対する比率とおくと、

$$\bar{p}^* = \sum_{b=1}^B \bar{p}_b s_b \quad (4.3)$$

$$\lambda^* = \frac{\sum_{b=1}^B \lambda_b \bar{p}_b s_b}{\sum_{b=1}^B \bar{p}_b s_b} \quad (4.4)$$

$$w^* = \frac{\sum_{b=1}^B \lambda_b \bar{p}_b w_b s_b}{\lambda^* \bar{p}^* w^*} \quad (4.5)$$

$$n^* = \left(\sum_{b=1}^B \Lambda_b H_b s_b^2 \right)^{-1} \quad (4.6)$$

$$\eta^{*2} = \frac{n^*}{\bar{p}^*} \sum_{b=1}^B \eta_b^2 \bar{p}_b H_b s_b^2 \quad (4.7)$$

である。ここで、

$$\Lambda_b = \frac{\lambda_b^2 (\bar{p}_b (1 - \bar{p}_b) - (\bar{p}_b w_b \sigma)^2)}{\lambda^{*2} (\bar{p}^* (1 - \bar{p}^*) - (\bar{p}^* w^* \sigma)^2)}$$

である。

ここで、(4.2)式よりわかるように、等価な均一の仮想ポートフォリオの資産数 n^* は、ハーフィンダール指標 H_b^* の逆数であることがわかる。

5 数値検証

本節では、前節までで説明した Gordy [2003] が提案するグラニュラリティ調整による不均一なポートフォリオに関する信用集中リスク量の推定精度を検証する。

すなわち、実務への応用のためには、Gordy [2003] が提案する解析的に線形近似したグラニュラリティ調整項の数値が、真のグラニュラリティ調整項と比

較して、線形近似をすることにより、どの程度の近似精度があるのかを確認する。また、Gordy [2003] では、エクスポージャーの不均一性を調整する手段として、モーメント・マッチングの手法を取り入れているが、数値的にその特徴を調べる。その他、数値計算上の問題点があれば、その内容を明らかにする必要がある。

まず、最大5つのプールから構成されるサンプル・ポートフォリオを設定する。そこで、プール別のパラメーターを設定する。表1は、プール番号を b として、プール別の平均パラメーターを設定したものである*8。なお、LGD のボラティリティ η_b は、Gordy [2003] に合わせて、

$$\eta_b = 0.5\sqrt{\lambda_b(1 - \lambda_b)} \quad (5.1)$$

として計算している。

表1: サンプル・ポートフォリオ共通のプール別パラメーター

b	\bar{p}	w	λ	η
1	0.05%	1.000	0.3	0.229
2	0.50%	0.700	0.2	0.200
3	1.00%	0.600	0.6	0.245
4	5.00%	0.400	0.5	0.250
5	10%	0.300	0.4	0.245

次に、表1の各プールに各資産（資産数500）を割り当てて、最大5つのプールからなるサンプル・ポートフォリオを複数設定したものが、表2である。ここで、グラニエラリティ調整法が、主に個社集中リスクを計測するものであることを考慮し、サンプル・ポートフォリオが複数のプールから構成される場合でも、プールの債務者数を均一にし、また、エクスポージャーの分布もほぼ均一に

*8 パラメーターの設定値は、Gordy [2003] を参考に、金融機関の内部格付を意識した数値としており、例えば、プール番号1から5までを、金融機関の内部格付として A, BBB, BB, B, CCC と考えて見ると良い。

なるように、Gordy [2003] を参考に、次のようにエクスポージャーの割り当てを行った。

表 2: サンプル・ポートフォリオのプール別資産数

b \ Port No.	1	2	3	4	5	6	7	8
1	500	-	-	-	-	250	125	100
2	-	500	-	-	-	250	125	100
3	-	-	500	-	-	-	125	100
4	-	-	-	500	-	-	125	100
5	-	-	-	-	500	-	-	100
合計	500	500	500	500	500	500	500	500

資産 i に対するエクスポージャーのサイズ A_i を $A_i = i^2$ とする。プール数が最大のサンプル・ポートフォリオ 8 を例にとると、 $A_1 = 1^2$ をプール 5 に、 $A_2 = 2^2$ をプール 4 に、 $A_3 = 3^2$ をプール 3 に、 $A_4 = 4^2$ をプール 2 に、 $A_5 = 5^2$ をプール 1 に、 $A_6 = 6^2$ をプール 5 へと、各プールに $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ の順番で繰り返し割り当てる。残りのサンプル・ポートフォリオ 6 及び 7 に関しても、同様の考え方で割り当てを行う。図 1 は、全資産のエクスポージャーをヒストグラムにしたものであるが、不均一なポートフォリオの構成できていることがわかる。また、複数のプールに割り当てる場合（サンプル・ポートフォリオ 6, 7 及び 8）であっても、各プールのエクスポージャーの分布は、ほぼ等しく、図 1 のような傾向を示す。

表 1 と表 2 の設定に従って計算した、各サンプル・ポートフォリオと等価な仮想の均一ポートフォリオのパラメーターは、ハーフィンダール指標 H_b については表 3、その他のパラメーターについては表 4 の通りとなった。表 4 を見ると、同じ資産数 n であっても、各プールへの割り当てを変えることにより、等価な均一ポートフォリオのパラメーター・セットの値は大きく異なる可能性がある。また、債務者数 n^* は、元の不均一ポートフォリオの債務者数 n の約 55 ~ 58% 程度の値となっている。

表 3: サンプル・ポートフォリオのプール別ハーフィンダール指標 H_b

$b \backslash$ Port No.	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0055	-	-	-	-	0.0072	0.0143	0.0179
2	-	0.0055	-	-	-	0.0072	0.0144	0.0179
3	-	-	0.0055	-	-	-	0.0144	0.0180
4	-	-	-	0.0055	-	-	0.0144	0.0180
5	-	-	-	-	0.0055	-	-	0.0181

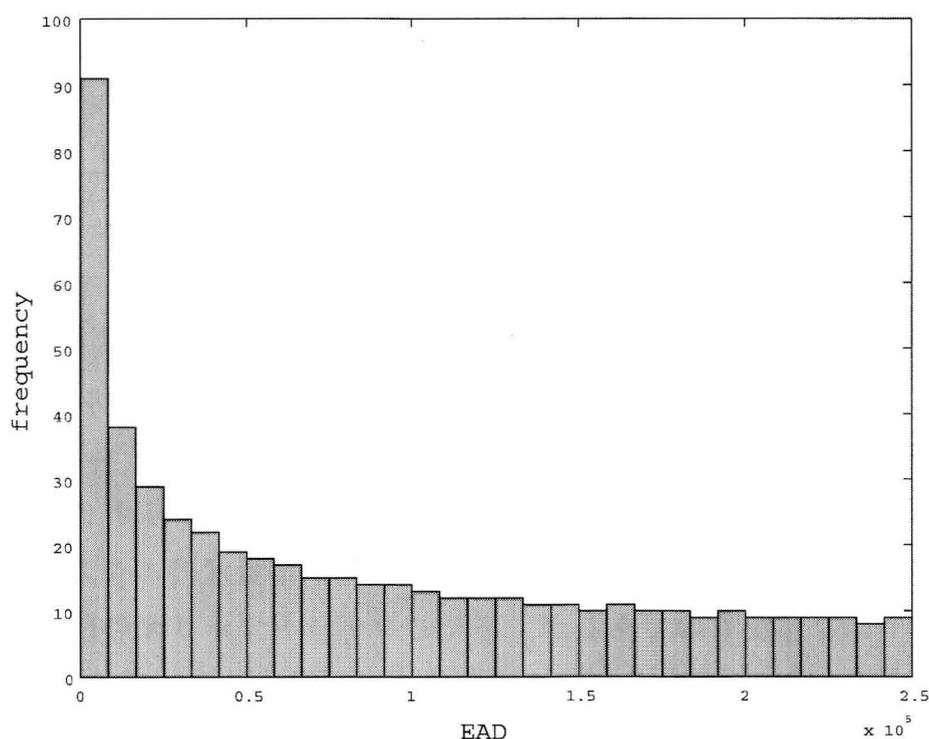


図 1: EAD のヒストグラム (債務者数 $N = 500$)

各サンプル・ポートフォリオの推定結果は、表 5~12 の通りとなった。各表中の数値の説明は、次の通りである。

(1) の真の VaR 値は、Gordy [2003] を基本として、元々の不均一ポートフォリオに対して、CreditRisk+ の拡張版をモンテカルロ・シミュレーションにより計算した数値である。すなわち、システムティック・リスクファクター X は、平

表 4: サンプル・ポートフォリオ別等価ポートフォリオのパラメーター

port No	1	2	3	4	5	6	7	8
\bar{p}^*	0.0005	0.0050	0.0500	0.0500	0.1000	0.0027	0.0163	0.0328
w^*	1.0000	0.7000	0.4000	0.4000	0.3000	0.7393	0.4498	0.3670
λ^*	0.3000	0.2000	0.5000	0.5000	0.4000	0.2091	0.4906	0.4360
η^*	0.2291	0.2000	0.2500	0.2500	0.2449	0.2013	0.2462	0.2485
n^*	278.1	278.1	278.1	278.1	278.1	274.3	280.9	287.3

均 1, 分散 σ^2 のガンマ分布に従う確率変数とし, また, 固有の回収リスクを導入するため, 各債務者に対する LGD は, 平均 λ , 分散 η^2 のガンマ分布に従うとしている. なお, シミュレーション回数を 30 万回とした. (2) の漸近 VaR 値は, (3.9) 式による. (3) の真の GA (Granularity Adjustment) は, (2)-(1) で計算される真のグラニューラリティ調整項の値である. (4) の近似 GA は, CreditRisk+ の拡張版を想定した理論式である (3.8) 式から計算される $\beta^*[\alpha_q(X)]$ を用いて, 等価な仮想の均一ポートフォリオ (サイズ n^*) に対して計算されるグラニューラリティ調整項であり,

$$\frac{\beta^*[\alpha_q(X)]}{n^*} \quad (5.2)$$

により, 線形関数として計算される. (5) の近似 VaR は, (2) の漸近 VaR と (4) の近似 GA を足し合わせたものである. (6) の数値は VaR 乖離幅であり, (5) の近似 VaR から (1) の真の VaR を引いて計算され, この数値は, (4) の近似 GA から (3) の真の GA から引いた GA 乖離幅でもある. また, (7) の VaR 乖離率と (8) の GA 乖離率は, それぞれ次のように定義する.

$$VaR \text{ 乖離率} := \frac{(6) VaR \text{ 乖離幅}}{(1) \text{ 真の } VaR}, \quad GA \text{ 乖離率} := \frac{(6) GA \text{ 乖離幅}}{(3) \text{ 真の } GA}$$

(7) の VaR 乖離率と (8) の GA 乖離率をサンプル・ポートフォリオ別, 及びパーセンタイル値別に図示したものが, それぞれ図 2 及び図 3 である.

表 5: サンプル・ポートフォリオ 1 に対する推定結果

q	0.99	0.995	0.999
(1) 真の VaR	0.47%	0.60%	0.88%
(2) 漸近 VaR	0.29%	0.36%	0.53%
(3) 真の GA	0.18%	0.23%	0.36%
(4) 近似 GA	0.19%	0.24%	0.35%
(5) 近似 VaR:(2)+(4)	0.48%	0.60%	0.88%
(6) VaR 乖離幅=GA 乖離幅:(5)-(1)	0.01%	0.00%	0.00%
(7) VaR 乖離率:(6)/(1)	1.69%	0.03%	-0.34%
(8) GA 乖離率:(6)/(3)	4.44%	0.07%	-0.85%

表 6: サンプル・ポートフォリオ 2 に対する推定結果

q	0.99	0.995	0.999
(1) 真の VaR	0.88%	1.06%	1.54%
(2) 漸近 VaR	0.71%	0.87%	1.26%
(3) 真の GA	0.16%	0.19%	0.29%
(4) 近似 GA	0.17%	0.21%	0.31%
(5) 近似 VaR:(2)+(4)	0.88%	1.08%	1.56%
(6) VaR 乖離幅=GA 乖離幅:(5)-(1)	0.00%	0.02%	0.02%
(7) VaR 乖離率:(6)/(1)	0.29%	1.68%	1.18%
(8) GA 乖離率:(6)/(3)	1.52%	9.37%	6.36%

推定結果から、GA 乖離率、VaR 乖離率とも、ポートフォリオの構成、パーセンタイル値によって、一定の傾向が見られるわけではなく、VaR 乖離率の最大絶対値は 2% 以内、GA 乖離率の最大絶対値は約 17% となった。GA 乖離率と VaR 乖離率の分子の値は同一であるが、分母の値については、GA 乖離率の方が VaR 乖離率に比べてオーダーがほぼ 1 桁小さいので、GA 乖離率が大きな

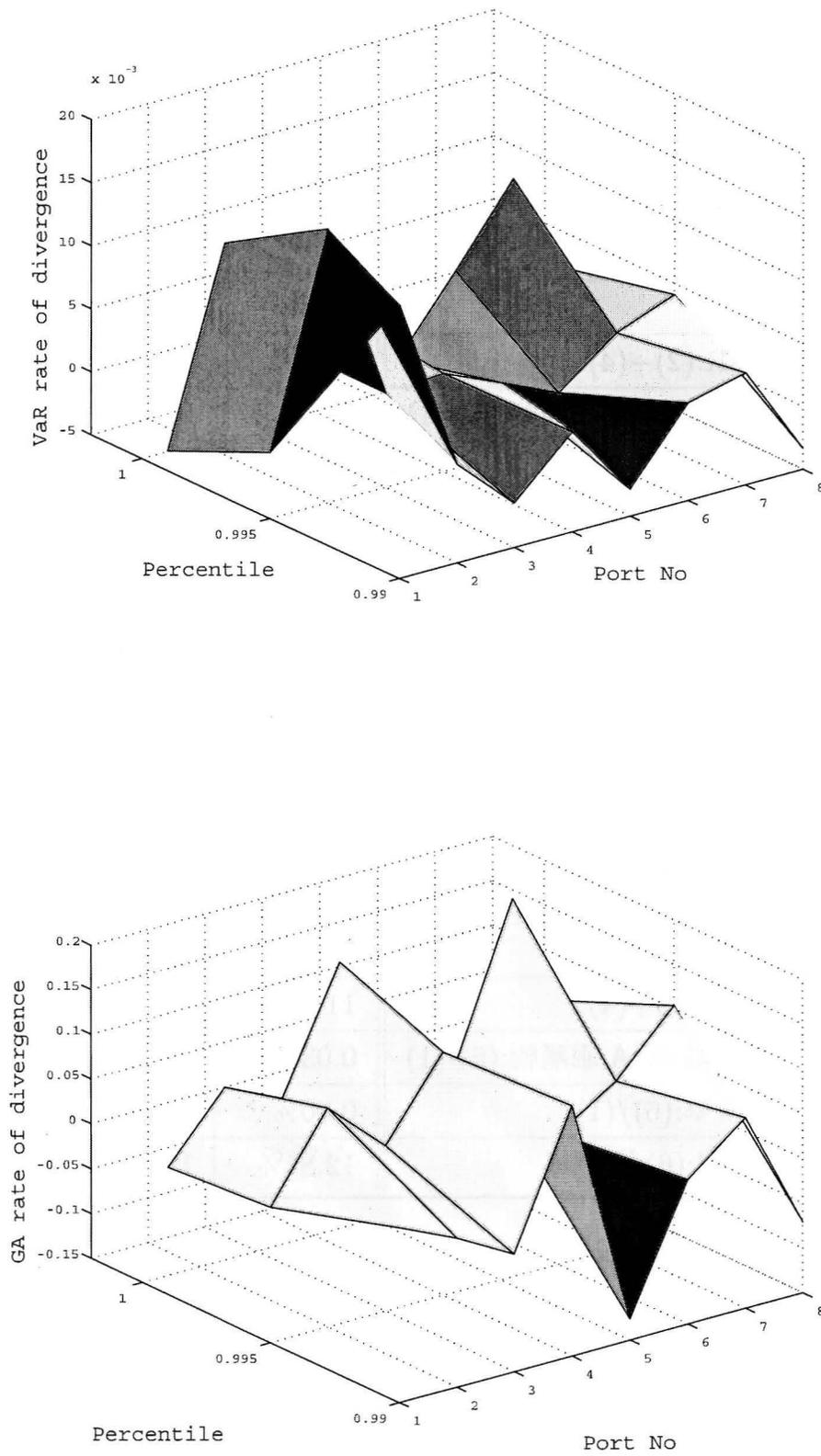


図 3: グラニューラリティ調整項の乖離率

表 7: サンプル・ポートフォリオ 3 に対する推定結果

q	0.99	0.995	0.999
(1) 真の VaR	4.05%	4.92%	7.07%
(2) 漸近 VaR	3.74%	4.56%	6.54%
(3) 真の GA	0.31%	0.36%	0.53%
(4) 近似 GA	0.30%	0.37%	0.54%
(5) 近似 VaR:(2)+(4)	4.05%	4.94%	7.09%
(6) VaR 乖離幅=GA 乖離幅:(5)-(1)	-0.01%	0.01%	0.02%
(7) VaR 乖離率:(6)/(1)	-0.15%	0.25%	0.25%
(8) GA 乖離率:(6)/(3)	-1.93%	3.43%	3.37%

表 8: サンプル・ポートフォリオ 4 に対する推定結果

q	0.99	0.995	0.999
(1) 真の VaR	11.50%	13.83%	19.44%
(2) 漸近 VaR	11.24%	13.51%	19.01%
(3) 真の GA	0.27%	0.32%	0.44%
(4) 近似 GA	0.30%	0.36%	0.51%
(5) 近似 VaR:(2)+(4)	11.54%	13.87%	19.52%
(6) VaR 乖離幅=GA 乖離幅:(5)-(1)	0.03%	0.04%	0.07%
(7) VaR 乖離率:(6)/(1)	0.30%	0.28%	0.38%
(8) GA 乖離率:(6)/(3)	12.84%	12.14%	16.89%

値として計算される。

また、(4) の近似 GA は、グラニュラリティ調整項を線形近似しているため、真のグラニュラリティ調整項を過大評価しており、本来、VaR 乖離率、GA 乖離率とも正の値をとるはずである。しかしながら、真のグラニュラリティ調整項には、シミュレーション誤差が含まれているため、理論式による近似誤差より

表 9: サンプル・ポートフォリオ 5 に対する推定結果

q	0.99	0.995	0.999
(1) 真の VaR	14.82%	17.54%	24.31%
(2) 漸近 VaR	14.48%	17.21%	23.81%
(3) 真の GA	0.33%	0.33%	0.50%
(4) 近似 GA	0.29%	0.34%	0.48%
(5) 近似 VaR:(2)+(4)	14.77%	17.55%	24.28%
(6) VaR 乖離幅=GA 乖離幅:(5)-(1)	-0.04%	0.01%	-0.03%
(7) VaR 乖離率:(6)/(1)	-0.29%	0.09%	-0.12%
(8) GA 乖離率:(6)/(3)	-12.66%	4.53%	-5.65%

表 10: サンプル・ポートフォリオ 6 に対する推定結果

q	0.99	0.995	0.999
(1) 真の VaR	0.67%	0.83%	1.20%
(2) 漸近 VaR	0.50%	0.61%	0.89%
(3) 真の GA	0.17%	0.21%	0.31%
(4) 近似 GA	0.17%	0.21%	0.32%
(5) 近似 VaR:(2)+(4)	0.67%	0.83%	1.20%
(6) VaR 乖離幅=GA 乖離幅:(5)-(1)	0.00%	0.00%	0.01%
(7) VaR 乖離率:(6)/(1)	0.28%	-0.12%	0.46%
(8) GA 乖離率:(6)/(3)	1.10%	-0.46%	1.80%

もシミュレーション誤差が大きい場合には、乖離率は負の値をとる可能性があり、両乖離率は、負の値をとる場合もある。本検証では、シミュレーション回数を Gordy [2003] と同様に 30 万回^{*9}として行っているが、更に誤差を減らした

^{*9} 本検証では、Gordy [2003] の”Table 3: Direct and approximated estimates of VaR”に

表 11: サンプル・ポートフォリオ 7 に対する推定結果

q	0.99	0.995	0.999
(1) 真の VaR	4.23%	5.12%	7.20%
(2) 漸近 VaR	3.97%	4.79%	6.79%
(3) 真の GA	0.27%	0.33%	0.41%
(4) 近似 GA	0.28%	0.34%	0.49%
(5) 近似 VaR:(2)+(4)	4.25%	5.13%	7.28%
(6) VaR 乖離幅=GA 乖離幅:(5)-(1)	0.02%	0.01%	0.08%
(7) VaR 乖離率:(6)/(1)	0.39%	0.23%	1.07%
(8) GA 乖離率:(6)/(3)	6.28%	3.64%	18.75%

表 12: サンプル・ポートフォリオ 8 に対する推定結果

q	0.99	0.995	0.999
(1) 真の VaR	6.34%	7.55%	10.59%
(2) 漸近 VaR	6.05%	7.25%	10.15%
(3) 真の GA	0.30%	0.30%	0.44%
(4) 近似 GA	0.28%	0.33%	0.47%
(5) 近似 VaR:(2)+(4)	6.32%	7.58%	10.62%
(6) VaR 乖離幅=GA 乖離幅:(5)-(1)	-0.02%	0.03%	0.02%
(7) VaR 乖離率:(6)/(1)	-0.33%	0.41%	0.23%
(8) GA 乖離率:(6)/(3)	-7.09%	10.34%	5.53%

めには、シミュレーション回数を増やしたり、テイルの分布が安定する方法（例

示される数値例で検証したプログラムを使用しており、この表のモンテカルロ・シミュレーションの数値例は、シミュレーション回数 30 万回で計算されている。一方、Gürter et al. [2005] では、類似の計算でシミュレーション回数を 3 百万回としており、この点を考慮しても、30 万回では安定性に欠ける点は否めない。しかしながら、金融機関で実際に運用することを考えた場合には、3 百万回で大規模ポートフォリオを計算する負荷は高く、本検証でも、

えば、按点近似法)を取り入れる必要がある。

6 グラニューラリティ調整項に関する比較静学

本節では、グラニューラリティ調整項に関する比較静学を行う。すなわち、均一ポートフォリオ^{*10}に対して、(3.3)式により、factor loading w に関する比較静学を行う。パラメーターの設定値は、 $n = 100, \lambda = 0.5, \eta = 0.025, \sigma = 2$ とし、パーセンタイル値 $q = 0.99, 0.995, 0.999$ の3種類について計算する。

図6を見ても解るように、グラニューラリティ調整項は、factor loading w の単調減少関数であり、 w が0.3~1までの区間では大きな減衰は見られない。

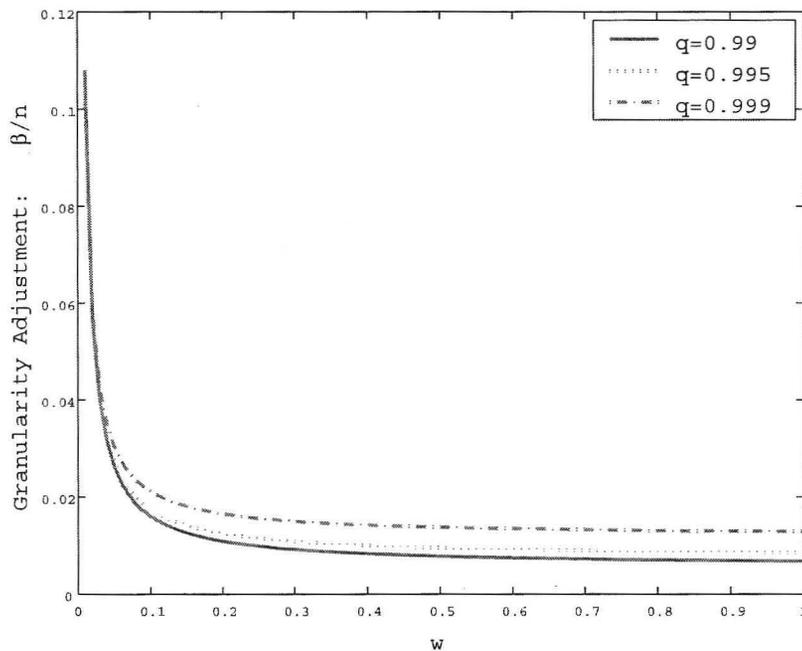


図4: w に関するグラニューラリティ調整項の比較静学

$$(n = 100, \lambda = 0.5, \eta = 0.025, \sigma = 2)$$

一方、グラニューラリティ調整項の近似 VaR に対する影響を見るために、デ

PC の性能を考慮の上、30 万回とした。

^{*10} 第4節で示した方法により、不均一ポートフォリオに対して、等価な仮定の均一ポートフォリオを求めることを前提としている。

フォルト確率 \bar{p} の異なる 3つのポートフォリオに対して、漸近 VaR と近似 VaR を計算したものが、図 5~7 である。なお、3つのポートフォリオをそれぞれ、高デフォルトポートフォリオ ($\bar{p} = 0.1\%$)、中デフォルトポートフォリオ ($\bar{p} = 1\%$)、及び低デフォルトポートフォリオ ($\bar{p} = 10\%$) と定義する。

図 5~7 を見ると、 \bar{p} の水準により、漸近 VaR の水準が変わるため、グラニューラリティ調整項の近似 VaR に対する影響が異なることがわかる。すなわち、高デフォルトポートフォリオでは、漸近 VaR の水準がグラニューラリティ調整項の水準に比べて低いために、近似 VaR はグラニューラリティ調整項と同様の形状をとる。これに対して、中デフォルトポートフォリオでは、漸近 VaR の水準とグラニューラリティ調整項の水準が拮抗しているため、近似 VaR は $w = 0.1$ 近傍で最小値とることがわかる。また、低デフォルトポートフォリオでは、高デフォルトポートフォリオとは逆に、漸近 VaR の水準がグラニューラリティ調整項の水準に比べて高いために、近似 VaR は漸近 VaR と同様の形状をとることがわかる。なお、図 8 は、近似 VaR を w とデフォルト確率 \bar{p} の関数として 3次元で表現したものである。

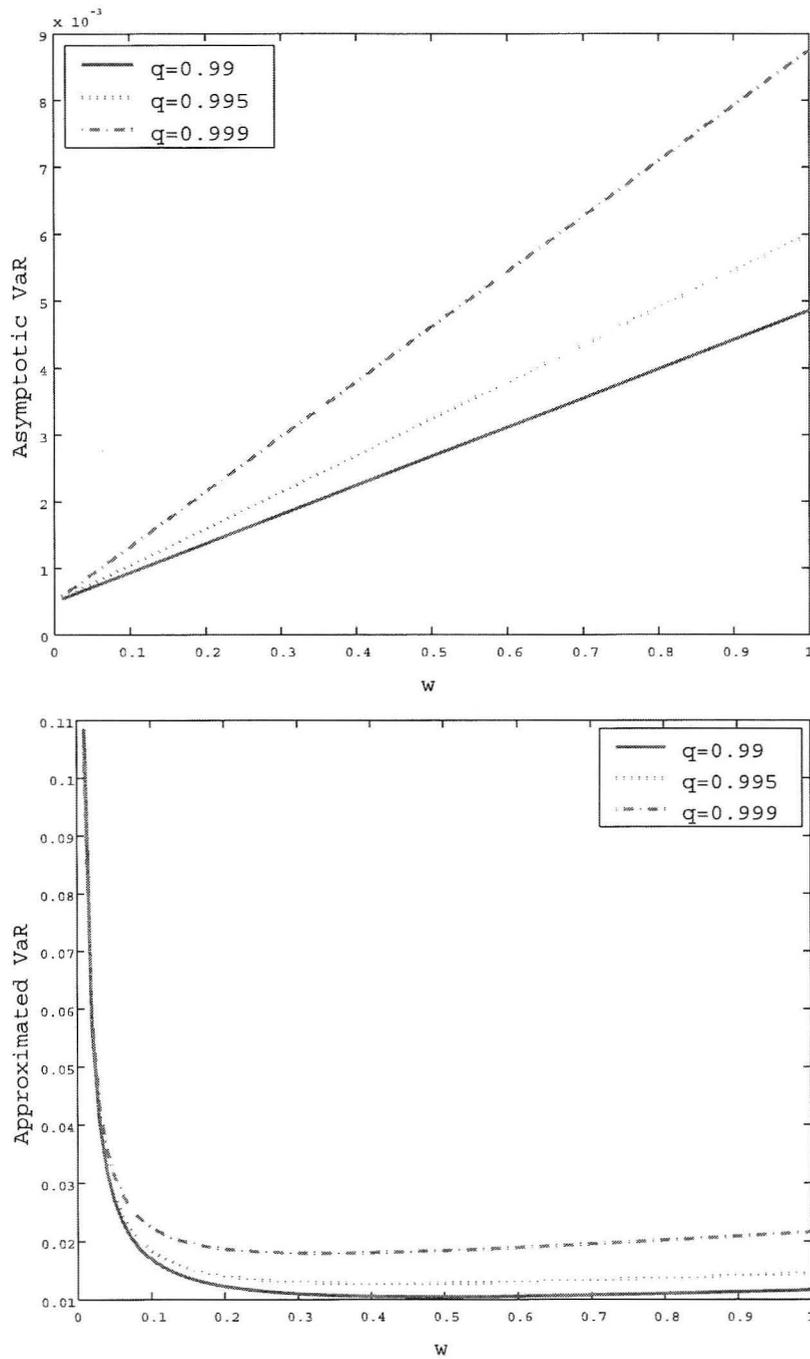


図 5: w に関する比較静学：高デフォルトポートフォリオ ($\bar{p} = 0.1\%$)

漸近 VaR (上段) / 近似 VaR (下段)

($n = 100, \lambda = 0.5, \eta = 0.025, \sigma = 2$)

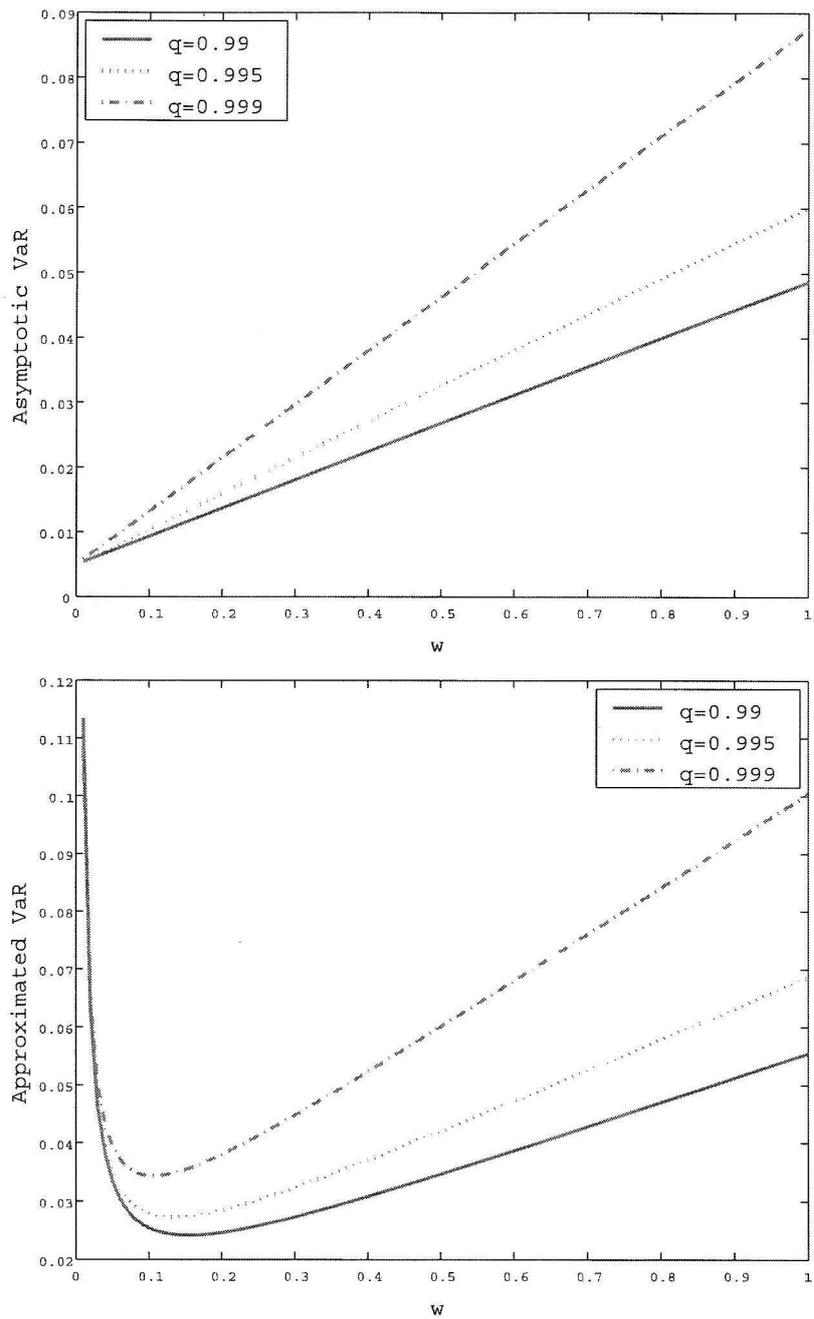


図 6: w に関する比較静学：中デフォルトポートフォリオ ($\bar{p} = 1\%$)

漸近 VaR (上段) / 近似 VaR (下段)

($n = 100, \lambda = 0.5, \eta = 0.025, \sigma = 2$)

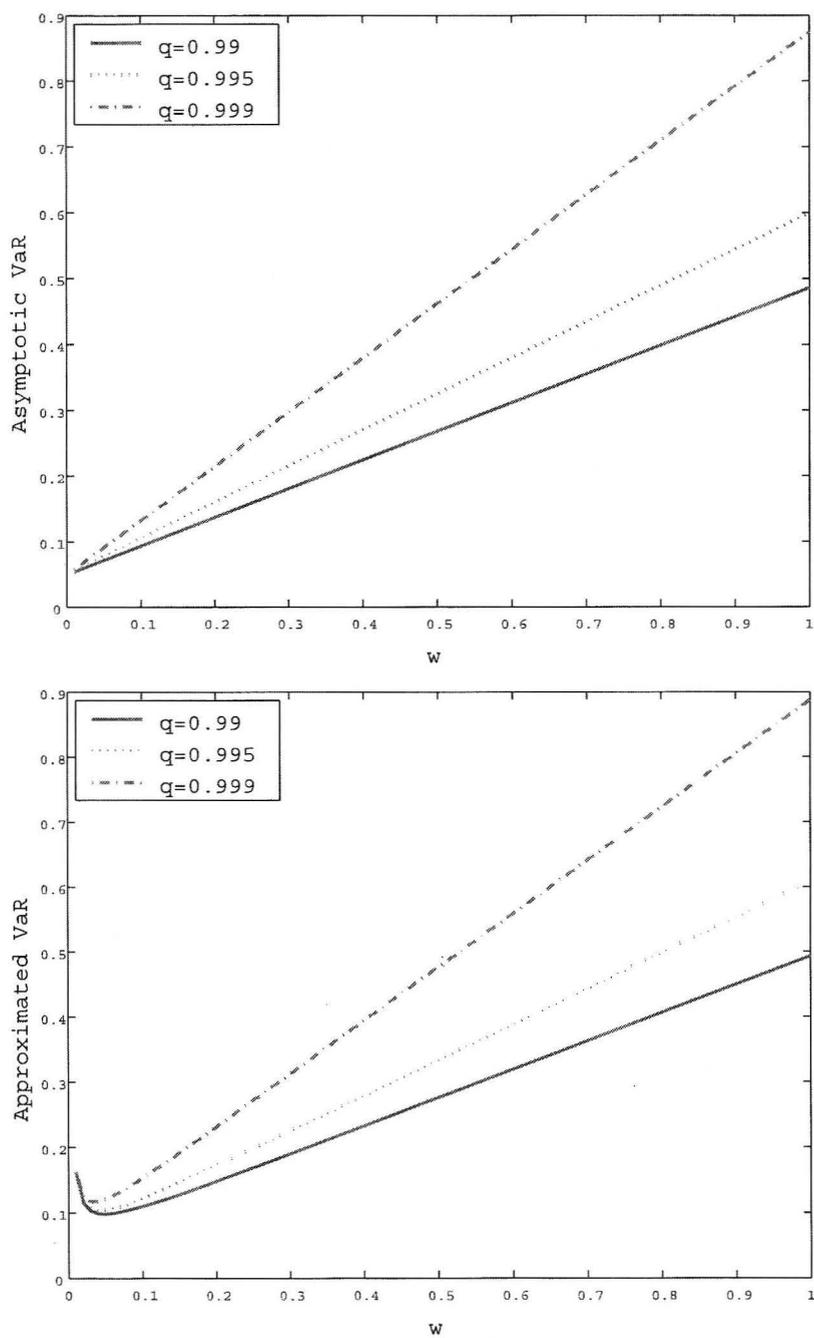


図 7: w に関する比較静学：低デフォルトポートフォリオ ($\bar{p} = 10\%$)

漸近 VaR (上段) / 近似 VaR (下段)

($n = 100, \lambda = 0.5, \eta = 0.025, \sigma = 2$)

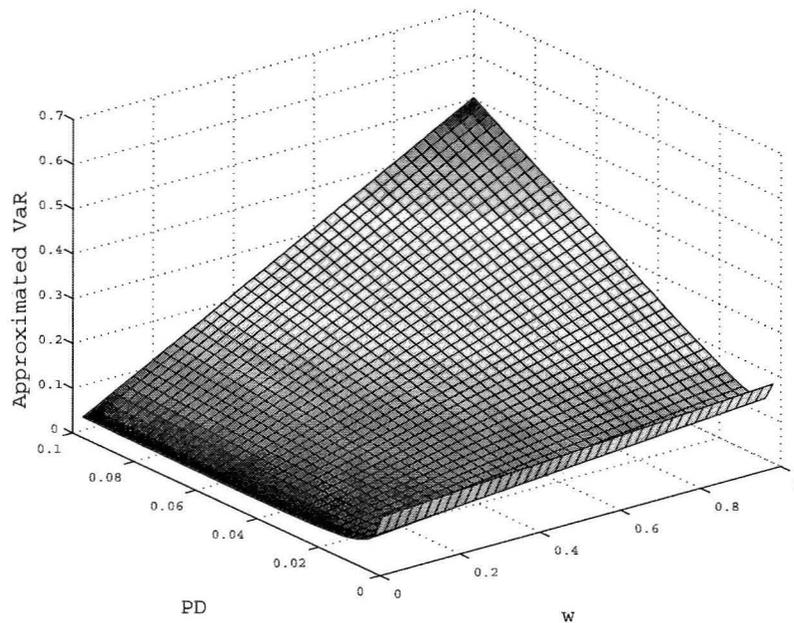


図 8: 近似 VaR($n = 100, \lambda = 0.5, \eta = 0.025, \sigma = 2$)

次に、システムティック・リスクファクターのボラティリティ σ に関する比較静学を行う。図 9 より、グラニュラリティ調整項は λ の単調減少関数となっており、システムティック・リスクファクターのボラティリティが大きい時程、グラニュラリティの影響は小さいことがわかる。

次に、LGD の平均 λ に関する比較静学を行う。Gordy [2003] では、LGD の標準偏差 η は、(5.1) 式により設定しているため、(3.3) 式を見ると、グラニュラリティ調整項は、 λ の線型関数であることがわかり、図 10 のように λ の単調増加関数となる。

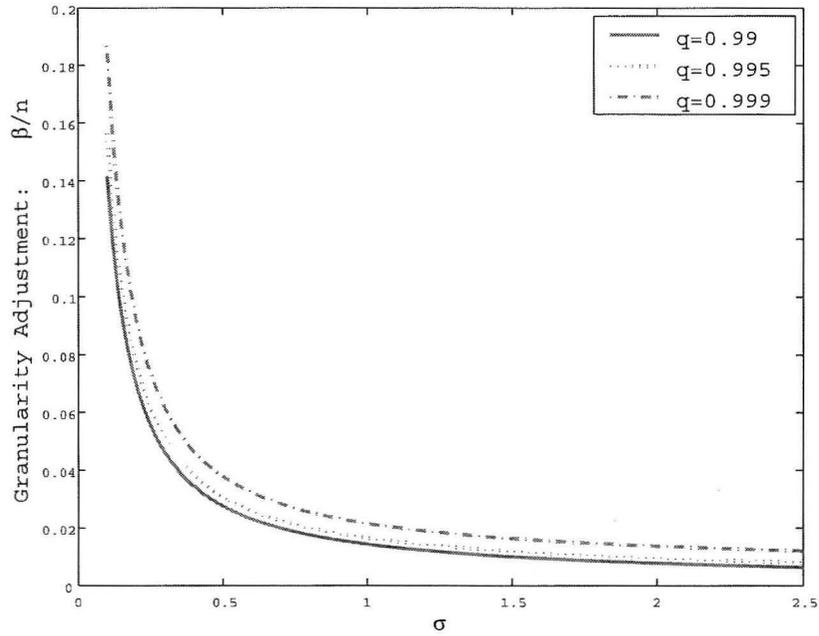


図 9: σ に関するグラニューラリティ調整項の比較静学

($n = 100, w = 0.5, \lambda = 0.5, \eta = 0.025$)

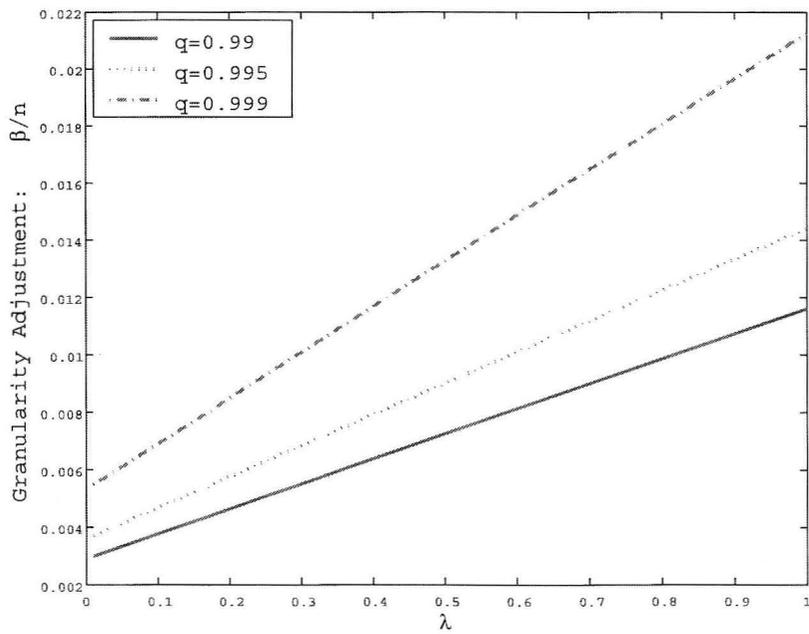


図 10: λ に関するグラニューラリティ調整項の比較静学

($n = 100, w = 0.7, \sigma = 2$)

7 おわりに

本稿では、グラニューラリティ調整による信用集中リスク管理モデルについて、Gordy [2003] をベースに考察した。まず、実際の不均一なポートフォリオに対するグラニューラリティ調整項の計算手段として、いくつかの主要なモーメントが同一な仮想の均一ポートフォリオを計算する方法として、モーメント・マッチングについて説明した。しかしながら、本方法では、高次のモーメントをマッチングしていないために、真のグラニューラリティ調整項に対して、大きな誤差をもたらす可能性があり、改善の余地があると言える。

また、真のグラニューラリティ調整項をモンテカルロ・シミュレーションを使って、真の VaR から漸近 VaR を控除する方法で計算する場合、一定の推定精度を得るためには、シミュレーションの計算負荷を考慮しなければならず、テイルの分布が安定する方法を併せて検討する必要がある。

一方、真のグラニューラリティ調整項の代替として、近似グラニューラリティ調整項を計算する場合、真のグラニューラリティ調整項を線形近似している点を留意する必要がある。ポートフォリオの構成によっては、真のグラニューラリティ調整項からの乖離率がやや大きくなる（最大約 17 %）場合があることが数値検証から判明しており、特に、低デフォルト・ポートフォリオについては、Gordy [2003](Figure 1) において、乖離率が大きくなることが示されており、留意する必要がある。

参考文献

- [1] 菅野正泰 [2009], 『信用リスク評価の実務』 中央経済社
- [2] 木島正明 [1999], 『ファイナンス工学入門 第 III 部』 日科技連
- [3] BCBS [2004], "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework"
- [4] Gordy, M [1998]: "A Comparative Anatomy of Credit Risk Models", *Journal of Banking and Finance*, 24(1-2), pp. 119-149.

- [5] Gordy, M [2003]: "A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules", *Journal of Financial Intermediation*, **12(3)**,
- [6] Gordy, M [2004]: "Granularity adjustment in portfolio credit risk measurement", *Risk Measures for the 21st Century*, edited by G. Szegő, John Wiley, pp. 109-121.
- [7] Gouriéroux, C, J P Laurent and O Scaillet [2000]: "Sensitivity analysis of values at risk", *Journal of Empirical Finance*, **7**, pp. 225-245.
- [8] Gütler, M, D Heithecker and M Hibbeln [2006]: "Auditing Basel II Capital Rules: When are Standardised portfolios Infinitely Fine Grained?", *Working Paper*
- [9] Martin, R and T Wilde [2002]: "Unsystematic credit risk", *Risk Magazine*, **15(11)**, pp. 123-128.
- [10] Vasicek, O [1987]: "Probability of Loss on Loan portfolio", *Moody's KMV Corp., Working Paper*.
- [11] Vasicek, O [1991]: "Limiting Loan Loss Distribution", *Moody's KMV Corp., Working Paper*.
- [12] Wilde, T [2001a]: "The IRB approach explained", *Risk Magazine*, **14(5)**, pp. 87-90.
- [13] Wilde, T [2001b]: "Probing granularity", *Risk Magazine*, **14(8)**, pp. 103-106.