<論　説>

危険資産市場の均衡

桐　谷　　維

目　次

0. 序論

金融資産の収益は，市場で取り引きされる際に発生する資本利得と，将来に発生する確定利子（債券）や不確実な配当（株式）から成る．危険資産とは，通常，その名目的収益が不確実で，資本損失（負の資本利得）の危険を伴う金融資産の総称である．本論では，このような危険資産の価格が市場で形成されるメカニズムを資産選択理論の枠組において解明する．

不確実性下の価格形成の理論は，1953年以降，モーリス・アレ（Maurice Allais）[1953]，ケネス・J・アロー（Kenneth J. Arrow）[1953] により，ほぼ同時に採り上げられ，ケネス・J・アロー＝ジェラール・デブリュー（Gerard Debreu）[1954] の純粋交換市場の理論的拡張へ導くことになる．1960年代半ばにウィリアム・F・シャープ（William F. Sharpe）[1964]，ヤン・モッシン（Jan Mossin）[1966] 等の危険資産市場の価格形成に関する考察が相次いで提出されたが，特に，シャープは不確実性下における危険資産市場均衡価格決定の理論を構成するように E-V 接近法の理論モデルを拡張できると示唆し，やや不正確な図式的議論により危険資産の価格形成を疑似動学的見地で説明付けようとした．しかし，シャープのこの接近は，均衡条件に関する厳密な定式化を欠いていたために不鮮明な論点が多く，ビアバッグ（G. O. Bierwag）＝グローヴ（M. A. Grove）[1965] の批判の後でも，若干の疑問点が残っている．本論稿では，危険資産市場における均衡価格決定の理論的展開を示したあと，付随的に，この問題を巡る論争を紹介し，論点を整理することにする．

1. 投資主体の最適化行動

個別投資主体は資産選択の最適化行動において投資行動を決定する．いま，個別投資主体にとって投資可能な金融的危険資産が株式と債券であるとし，これらが n 種類あるとする．投資主体によるこれら危険資産の保有残高の物理的量，すなわち，株式ならば株数，債券ならば債券枚数を n 次のベクトル $\mathbf{z}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ で表す．

他方で，利用可能な確実資産混合は現金・預金等，数種に亘る確実資産から構成されるが，確実資産は非危険的な金融資産であり，別の保有基準により編成されると考え，この確実資産混合を一括してその物理的保有残高[1)]を z_{n+1} と表す．

危険資産（$i=1, 2, \cdots, n$）の1株・1枚当たりの物理的単位当たり将来価値 q^f は，将来価格 p_i^f と配当・利子 d_i の和[2)]である．

$$q_i^f = p_i^f + d_i \tag{1}$$

この q_i^f と d_i は確率変数と想定される．市場性[3]のある金融資産は市場で取り引きされるから，市場価格が形成される．この市場価格 p_i^f は将来，資本利得（値上がり益）を招くか資本損失（値下がり損）をもたらすか不確実であるから，確率変数と見なされる．また，金融資産が株式であれば，その配当は将来の企業活動の営業成果であって不確実であるから，確率変数と見なされる．特に金融資産が債券であれば，その利子は確定的であるから，d_i は非確率的である．よって，将来価格 p_i^f と配当・利子 d_i の和 q_i^f は確率変数なのである．

確率変数である将来価値 q_i^f の1次と2次のモーメントを考慮する2パラメーター方式[4]を採用すると，平均値と分散を明示的に導入することになる．将来価値の n 次列ベクトルを $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1^f \\ q_2^f \\ \vdots \\ q_n^f \end{bmatrix}$，その期待値の n 次ベクトルを $\boldsymbol{\mu}$，n 次分散共分散行列を $\mathbf{V}$ と表す．

$$\boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}[\mathbf{q}] = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \text{かつ}$$

$$\mathbf{V} = \mathrm{E}[(\mathbf{q}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{q}-\boldsymbol{\mu})'] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

他方，確実資産混合は名目上，確実な将来利子収入が約束され，元本の将来価値が一定であるような金融資産から構成されるので，その将来価値額は名目的に確定的である．確実資産混合を $n+1$ で表示し，その将来価格が現行価格に等しく，しかも1と設ける．すなわち，$p_{n+1}^f = p_{n+1} = 1$ である．このように将来価格＝現行価格＝1と設けることは，確実資産の単位当たり価値を1ドルないし1円と置くことに等しく，これは確実資産を価値尺度財 (numéraire)[5] にすることを意味する．

確実資産は市場性がなく，資本利得が存在しないから，確実資産の収益率は確定利子率 r のみである．すると，確実資産 $n+1$ の保有額単位当たり将来価値額は $q_{n+1} = p_{n+1} + d_{n+1} = 1 + r = q$ と固定することができる．ただし $p_{n+1} = 1$，$d_{n+1} = r$ を代入する．r は確定利子率であり，確率変数ではない．

投資主体 k の賦存富[6] w_k^0 は危険資産混合 z_k^0 と確実資産混合 $z_{n+1,k}^0$ から成る．投資主体は，新しい所要の危険資産混合を実現するために，危険資産の不要な物理的量を市場で売却し，この売却代金を確実資産賦存額に併せて，必要な物理的量を市場で買い増しする．つまり，賦存ポートフォリオ $w_k^0 = \mathbf{p}'\mathbf{z}_k^0 + z_{n+1,k}^0$ において，同じ価格ベクトル $\mathbf{p}$ で危険資産混合を $\mathbf{p}'(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0)$ だけ同じ価格で追加売買し，確実資産混合を $(z_{n+1,k} - z_{n+1,k}^0)$ だけ増減させるならば，新しいポートフォリオ $\mathbf{p}'\mathbf{z}_k + z_{n+1,k}$ に到達する．この危険資産混合追加売買額と確実資産混合増減額の和は必ずゼロだから，

$$\mathbf{p}'(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0) + (z_{n+1,k} - z_{n+1,k}^0) = 0 \tag{3}$$

これより

$$w_k^0 = \mathbf{p}'\mathbf{z}_k^0 + z_{n+1,k}^0 = \mathbf{p}'\mathbf{z}_k + z_{n+1,k} \tag{3'}$$

が成り立つ．すなわち，賦存ポートフォリオ $\mathbf{p}'\mathbf{z}_k^0 + z_{n+1,k}^0$ の危険資産混合全体 $\mathbf{p}'\mathbf{z}_k^0$ を市場に売り放ち，その売却代金を用いて，そのまま同じ価格ベクトル $\mathbf{p}$ で新しい危険資産混合 $\mathbf{p}'\mathbf{z}_k$ を市場から買い戻して，新しいポートフォリオ $\mathbf{p}'\mathbf{z}_k + z_{n+1,k}$ を編成すると考えても同じことである．

(3')式右辺の新しく配分された投資額は所定の期末までに増殖して，富は

$$w_k = \mathbf{q}'\mathbf{z}_k + q z_{n+1,k} \tag{4}$$

に成長する．ただし，

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}^f + \mathbf{d},\ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1^f \\ q_2^f \\ \vdots \\ q_n^f \end{bmatrix}, \mathbf{p}^f = \begin{bmatrix} p_1^f \\ p_2^f \\ \vdots \\ q_n^f \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix},$$

かつ $q = 1 + r$ と置いている．よって，富 w_k の期待値と分散は，それぞれ

$$E = \mu_{wk} = \boldsymbol{\mu}_k'\mathbf{z}_k + q z_{n+1,k} \tag{5}$$

$$V = \sigma_{w,k}^2 = \mathbf{z}_k'\mathbf{V}_k\mathbf{z}_k \tag{6}$$

と表される．

2．期待効用仮説

ダニエル・ベルヌイを嚆矢とし，フォン・ノイマン＝モルゲンシュテルンにより彫琢された期待効用仮説は，ポートフォリオ将来収益ないし富を確率変数として，投資主体が効用の期待値を極大にするという行動基準を提唱している．マーコヴィッツ以来，トービン以降も趨勢的に採択されてきたE–V投資基準[7]は，将来収益ないし将来富の確率分布の最初の1次と2次のモーメントである期待値Eと分散V（またはその平方根である標準偏差S）の関数として，期待効用を定式化する．これは，将来収益ないし将来富の確率分布が正規分布のように期待値と分散（または標準偏差）により，その形状が規定されることを意味する．それゆえ，ここでは個別投資主体kの期待効用関数[8]$\bar{u}_k$を将来富w_kの効用関数$u_k(w_k)$の数学的期待値として定義する．

$$\mathrm{E}[u_k]=\bar{u}_k(E_k,V_k)=\bar{u}_k(\mu_{w,k},\sigma^2_{w,k})$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}u_k(w)f(w;\mu_{w,k},\sigma_{w,k})dw \qquad (7)$$

期待効用は，上式最右辺に示すように，確率変数である将来富wの効用関数の期待値であるが，確率密度関数$f(w;\mu_{w,k},\ \sigma_{w,k})$のパラメーター$\mu_{w,k}$と$\sigma_{w,k}$の関数$\bar{u}_k(\mu_{w,k},\ \sigma_{w,k})$であることが判る．

3．個別投資主体の最適化行動

個別投資主体kの最適化行動は，上述の制約条件(3)の下で期待効用(7)を極大化する行動として把握される．それゆえ，制約条件付き極値問題を解くために，次のようなラグランジュ関数Λを設ける[9]．

$$\Lambda=\bar{u}_k(\boldsymbol{\mu}_k'\mathbf{z}_k+qz_{n+1,k},\ \mathbf{z}_k'\mathbf{V}_k\mathbf{z}_k)$$
$$-\lambda_k\left\{\mathbf{P}'(\mathbf{z}_k-\mathbf{z}_k^0)+(z_{n+1,k}-z^0_{n+1,k})\right\} \qquad (8)$$

Λを変数z_k，$z_{n+1,k}$，およびλ_kに関して偏微分し，得られた偏導関数をゼロと置けば極大化の1階条件が得られる．

$$\frac{\partial\Lambda_k}{\partial\mathbf{z}_k}=\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial E_k}\boldsymbol{\mu}_k+2\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial V_k}\mathbf{V}_k\mathbf{z}_k-\lambda_k\mathbf{p}=\mathbf{0} \qquad (9\text{–}1)$$

$$\frac{\partial\Lambda_k}{\partial z_{n+1,k}}=\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial E_k}q-\lambda_k=0 \qquad (9\text{–}2)$$

$$\frac{\partial\Lambda_k}{\partial\lambda_k}=-\mathbf{p}'(\mathbf{z}_k-\mathbf{z}_k^0)-(z_{n+1,k}-z^0_{n+1,k})=0 \qquad (9\text{–}3)$$

極大化の2階条件は，$[d\mathbf{z}_k'\ dz_{n+1,k}]\begin{bmatrix}\mathbf{p}\\1\end{bmatrix}=0$を満足する，あらゆる$[d\mathbf{z}_k'\,dz_{n+1,k}]\neq[\mathbf{0}'\,0]$に対して，次の2次形式が負値定符号なることである．すなわち，

$$[d\mathbf{z}_k'\ dz_{n+1,k}]\begin{bmatrix}\Lambda_{z,z} & \Lambda_{z,zn+1}\\ \Lambda_{zn+1,z} & \Lambda_{zn+1,zt+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\mathbf{z}_k\\ dz_{n+1,k}\end{bmatrix}<0 \qquad (10)$$

1階条件（9–1），（9–2），（9–3）の同時方程式体系を解けば，最適解$\mathbf{z}_k^*$，$z^*_{n+1,k}$およびλ_k^*が得られる．そこで，まず，（9–1）と（9–2）よりλ_kを消去すれば，

$$\mathbf{V}_k\mathbf{z}_k=-\frac{\bar{u}_{E,k}}{2\bar{u}_{V,k}}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}]=\beta_k[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}] \qquad (11)$$

を得る．ただし，$-(\bar{u}_{E,k}/2\bar{u}_{V,k})=\beta_k$と置いている．この(11)式と（9–3）式から同時解$\mathbf{z}_k^*$と$z^*_{n+1,k}$を求めることができる．

$$\mathbf{z}_k^*=-\frac{\bar{u}_{E,k}}{2\bar{u}_{V,k}}\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}]=\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}] \qquad (12)$$

$$\mathbf{z}^*_{n+1,k}=\mathbf{p}'\mathbf{z}_k^0+z^0_{n+1,k}+\frac{\bar{u}_{E,k}}{2\bar{u}_{V,k}}\mathbf{p}'\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}]$$
$$=\mathbf{p}'\mathbf{z}_k^0+z^0_{n+1,k}-\beta_k\mathbf{p}'\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}] \qquad (13)$$

ここで，上掲のβ_kの意味について付言しておく．期待効用関数(7)に戻って，
$E[u_k]=u_k(E_k,V_k)$を全微分してゼロと置く．

$$d\mathrm{E}[u_k]=\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial E_k}dE_k+\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial V_k}dV_k=0 \qquad (14)$$

上式を変形すると，

$$\frac{dV_k}{dE_k}=-\frac{\partial\bar{u}_k/\partial E_k}{\partial\bar{u}_k/\partial V_k}=2\beta_k \qquad (15)$$

を得る．これは富の危険（V_k）と期待富（E_k）の間の限界代替率を表す．ただし，β_kの値は一定ではなく，$\mathbf{z}_k$と$z_{n+1,k}$に依存するが，符号は一定であることに注意すべきである．

通常，すべての投資主体にとって，期待富が増加すれば期待効用が上昇するから，$\partial\bar{u}_k/\partial E_k>0$と

想定でき，危険回避者（risk averter)[10] にとって将来富の分散（危険）が増加すれば期待効用が減少するから，$\partial \bar{u}_k/\partial V_k<0$ と想定できる．それゆえ，⒂式の符号は正，$dV_k/dE_k=2\beta_k>0$，すなわち，富の危険（V_k）と期待富（E_k）の間の限界代替率は正となるであろう．これは，σ_w-μ_w 平面において危険回避的な投資主体の無差別曲線群が正の勾配を持つことを示している．

4．危険資産市場の同時均衡

⑿式に示す個別投資主体による n 種危険資産混合の最適保有ベクトル z_k^* は，投資可能で市場性のあるすべての危険資産に対する保有需要計画表のベクトルになっている．１つの危険資産市場に関わる個別投資主体の全員について最適危険資産混合を集計すると，この危険資産市場における集計的危険資産需要関数の n 次ベクトルを表すことになる．

$$\mathbf{Z}^*=\sum_{k=1}^{K}\mathbf{z}_k^*=\sum_{k=1}^{K}\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}] \tag{16}$$

これに対して，個別投資主体による危険資産の賦存量ベクトルを市場全体で集計したものは，n 種危険資産の物理的な既発行残高のベクトル $\mathbf{Z}^0$ に等しい．

$$\sum_{k=1}^{K}\mathbf{z}_k^0=\mathbf{Z}^0 \tag{17}$$

また，各投資主体 k の超過需要ベクトル（$\mathbf{z}_k^*-\mathbf{z}_k^0$）を市場全体で集計した市場超過需要ベクトル $\sum_{k=1}^{K}(\mathbf{z}_k^*-\mathbf{z}_k^0)=\mathbf{Z}^*-\mathbf{Z}^0$ は，危険資産市場で取り引きされる需要残高マイナス既発行残高（供給残高）のベクトルであり，超過需要ベクトルがゼロ・ベクトルに等しいこと，すなわち，

$$\sum_{k=1}^{K}(\mathbf{z}_k^*-\mathbf{z}_k^0)=\mathbf{Z}^*-\mathbf{Z}^0=\mathbf{0} \tag{18}$$

は，危険資産市場における需要残高＝既発行残高，すなわち，n 個の危険資産市場の同時均衡条件を表す．よって，集計的危険資産需要関数のベクトル⒃ $\mathbf{Z}^*=\sum_{k=1}^{K}\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}]$ を用いると，危険資産市場均衡条件 $\mathbf{Z}^*=\mathbf{Z}^0$ は

$$\sum_{k=1}^{K}\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}]-\mathbf{Z}^0=\mathbf{0} \tag{19}$$

と書かれるから，これより危険資産市場の n 次均衡価格ベクトルが次のように一般形として解かれる．

$$\mathbf{p}^e=\left(q\sum_{k=1}^{K}\beta_k^e\mathbf{V}_k^{-1}\right)^{-1}\left\{\left[\sum_{k=1}^{K}\beta_k^e\mathbf{V}_k^{-1}\boldsymbol{\mu}_k\right]-\mathbf{Z}^0\right\} \tag{20}$$

解が⒇式のような形に書けるためには，式中の逆行列が存在することを証明しなければならない．

［逆行列の存在］

⒇式の逆行列 $\left(q\sum_{k=1}^{K}\beta_k^e\mathbf{V}_k^{-1}\right)^{-1}$ の存在を確かめる．逆行列 $\mathbf{V}_k^{-1}$ は正値定符号であるから，$\beta_k>0$ をウェイトとする正１次結合 $\sum_{k=1}^{K}\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}$ は，任意の n 次列ベクトル ξ を用いて２次形式 $\xi'\left[\sum_{k=1}^{K}\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}\right]\xi=\sum_{k=1}^{K}\beta_k\xi'\mathbf{V}_k^{-1}\xi>0$ を作ることにより，やはり正値定符号であると判る．よって，行列 $\sum_{k=1}^{K}\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}$ には逆行列が存在する．┃

ところで，市場を構成する K 人の投資主体の集計的予算制約は，個々の投資主体の予算制約(3′)の総和を取ることによって得られる．

$$\begin{aligned}W^0&=\sum_{k=1}^{K}w_k^0=\mathbf{p}'\sum_{k=1}^{K}\mathbf{z}_k^0+\sum_{k=1}^{K}z_{n+1,k}^0\\&=\mathbf{p}'\sum_{k=1}^{K}\mathbf{z}_k^*+\sum_{k=1}^{K}z_{n+1,k}^*\\&=\mathbf{p}'\mathbf{Z}^0+Z_{n+1}^0=\mathbf{p}'\mathbf{Z}^*+Z_{n+1}^*\end{aligned} \tag{21}$$

市場を構成する K 人の投資主体は，現行市場価格 $\mathbf{p}$ で賦存危険資産混合 $\mathbf{Z}^0$ を売却し，この売却代金を賦存の確実資産残高 Z_{n+1}^0 に付け加えて，所要の新しい危険資産混合 $\mathbf{Z}^*$ を同じ価格ベクトル $\mathbf{p}$ で買い戻し，新しい確実資産残高 Z_{n+1}^* を保有する．この経緯は(21)の集計式で表現されるが，⒃式を用いると次のような集計的予算制約になる．

$$\mathbf{p}'\left\{\sum_{k=1}^{K}\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}]-\mathbf{Z}^0\right\}+(Z_{n+1}^*-Z_{n+1}^0)=0 \tag{22}$$

通常，財に関する市場理論では，この(22)式はワ

ルラス法則（Walras' Law）[11] に相当する．しかし，内容的には多数市場理論におけるワルラス法則とは含意が異なるので，若干の検討が必要になる．

n 種危険資産の取引市場における物理的需要量と供給量の同時均衡は，均衡条件(18)式（$\mathbf{Z}^*=\mathbf{Z}^0$），あるいは，それに需要関数を代入した(19)式で表される．すなわち，

$$\sum_{k=1}^{K}\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}]-\mathbf{Z}^0=\mathbf{0} \qquad (19)$$

それ故，もし n 個の危険資産市場で同時均衡が生ずるならば，(19)式はゼロ・ベクトルになり，これを(22)式の｛・｝内に代入すると，

$$Z^*_{n+1}-Z^0_{n+1}=0 \qquad (23)$$

が成立する．すなわち，「n 種の危険資産市場が同時に均衡するならば，集計的確実資産残高は賦存額のまま変化せず，一定に留まる」ことが判る．

5．投資家期待の同質性

ここで，単純化のため，投資家期待の同質性（Homogeneity of Investors' Expectations）を仮定する．この仮定は，全く非現実的であるが，情報伝達システムが完備し，人々の確率信念が一様に画一的になった場合の極限的状況を示唆する．

[投資家期待の同質性]

すべての投資主体は，将来の予想について完全に同意しており，投資収益に関する将来の予想（確率分布の形状）はすべての投資主体にとって同一である．

それゆえ，投資主体の予想を具体化する，投資収益の確率分布は，すべての投資主体を通じて同一であると仮定する．すなわち，投資収益の確率分布のパラメーター $\boldsymbol{\mu}_k$ と $\mathbf{V}_k$ は，どの投資主体（$k=1, 2\cdots, K$）についても等しいと仮定し，共通に $\boldsymbol{\mu}$ と $\mathbf{V}$ とする．

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2=\cdots=\boldsymbol{\mu}_K \qquad (24)$$

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_1=\mathbf{V}_2=\cdots=\mathbf{V}_K \qquad (25)$$

また，$\beta=\sum_{k=1}^{K}\beta_k$ と表す．すると，危険資産市場均衡価格ベクトル決定の(20)式は単純化されて

$$\mathbf{p}^e=\frac{1}{q}\left(\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{\beta}\mathbf{V}\mathbf{Z}^0\right) \qquad (26)$$

のように書かれる．もし(16)式で投資家期待の同質性を仮定すると，集計的危険資産需要は

$\mathbf{Z}^*=\beta\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\mathbf{p}]$　すなわち，

$$\mathbf{p}=\frac{1}{q}\left(\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{\beta}\mathbf{V}\mathbf{Z}^*\right) \qquad (27)$$

と書かれるから，これをベクトル $\mathbf{Z}^*$ に関して微分すると，微係数は行列

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{Z}^*}=-\frac{1}{q\beta}\mathbf{V} \qquad (28)$$

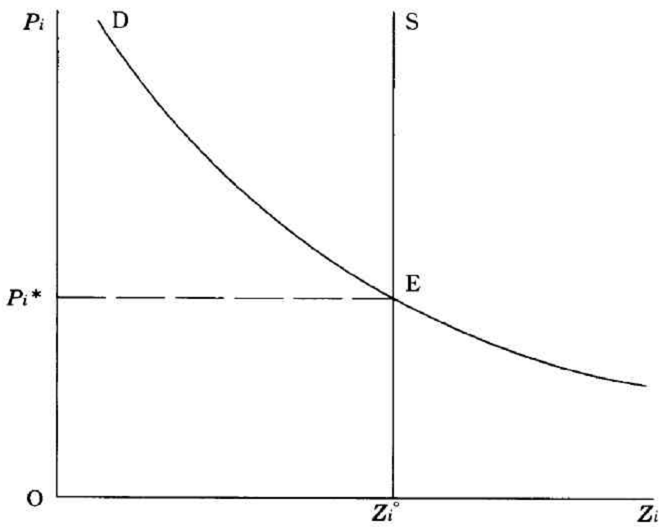
になり，同じ資産の最適保有量とその価格の間の逆需要関数の勾配（$\partial p_i/\partial z_i$）は，(28)式右辺の行列の対角要素により表される．一般に，行列(28)の i 番目の対角要素は

$$\frac{\partial p_i}{\partial Z_i^*}=-\frac{1}{q\beta}\sigma_{ii}<0, \quad i=1, 2, \cdots, n \qquad (29)$$

であり，すべての i に対して $q=1+r>0$，$\beta>0$，かつ，分散 $\sigma_{ii}>0$ だから，Z_i の需要関数の勾配は負で，右下がりであると判定できる．

図-1 は，典型的な i 番目の危険資産の市場均衡を図示している．横軸に危険資産 i の物理的集計量 Z_i を取り，縦軸に危険資産 i の価格 p_i を取る．曲線 D は危険資産 i の需要曲線を表し，右下がりである．垂直の直線 S は供給関数のグラフであり[12]，危険資産 i の既発行残高 Z_i^0 を表す．需要曲線 D と供給曲線 S の交点 E は市場均衡を表し，

図-1



対応する均衡価格 p_i^e が決定される.

投資家期待の同質性の下で，危険資産市場の均衡条件式(19)は，

$$\beta \mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]-\mathbf{Z}^0=\mathbf{0} \quad (30)$$

と書き直せる．また，集計的予算制約式は

$$\beta \mathbf{p}'\,\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]-\mathbf{p}'\,\mathbf{Z}^0+Z_{n+1}^*-Z_{n+1}^0=0 \quad (31)$$

となるが，これに市場均衡条件(30)を代入すると，

$$Z_{n+1}^*-Z_{n+1}^0=0 \quad (32)$$

になる．これは集計的確実資産保有額が固定的になることを告げている.

6．個別有効フロンティアと資本市場線

個別主体の局面に立ち帰って，次のような設問を考える.

「分散 $\sigma_{w,k}^2=\mathbf{z}_k'\mathbf{V}_k\mathbf{z}_k$ を，制約条件 $\mu_{w,k}=\boldsymbol{\mu}_k'\mathbf{z}_k+qz_{n+1,k}$，および $\mathbf{p}'\,(\mathbf{z}_k-\mathbf{z}_k^0)+(z_{n+1,k}-z_{n+1,k}^0)=0$ の下で極小にする.」

制約条件付き極小化問題は，将来富の分散を目的関数(6)とし，期待富(5)と現行予算式(3)の2式を制約条件とするラグランジュ関数 L を設けることにより実行される.

$$L=\mathbf{z}_k'\mathbf{V}_k\mathbf{z}_k-2\lambda_1\{\boldsymbol{\mu}_k'\mathbf{z}_k+qz_{n+1,k}-\mu_{w,k}\}$$
$$-2\lambda_2\{\mathbf{p}'(\mathbf{z}_k-\mathbf{z}_k^0)+(z_{n+1,k}-z_{n+1,k}^0)\} \quad (33)$$

この極小化問題の1階条件は，関数 L を変数 $\mathbf{z}_k, z_{n+1,k}$, λ_1 および λ_2 に関して偏微分してゼロと置いて得られる.

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}_k}=2\mathbf{V}_k\mathbf{z}_k-2\lambda_1\boldsymbol{\mu}_k-2\lambda_2\mathbf{p}=\mathbf{0} \quad (34\text{–}1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_{n+1}}=-2\lambda_1 q-2\lambda_2=0 \quad (34\text{–}2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=-2(\boldsymbol{\mu}_k'\mathbf{z}_k+qz_{n+1,k}-\mu_{w,k})=0 \quad (34\text{–}3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=-2\{\mathbf{p}'\,(\mathbf{z}_k-\mathbf{z}_k^0)+(z_{n+1,k}-z_{n+1,k}^0)\}=0$$

(34–4)

極小化の2階条件は，$[d\mathbf{z}'\,dz_{n+1}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_k & \mathbf{p}\\ q & 1\end{bmatrix}=[0\ \ 0]$ を満足する，あらゆる非ゼロの $[d\mathbf{z}'\,dz_{n+1}]\neq[\mathbf{0}'\,0]$ に対して次の2次形式が正，すなわち，

$$[d\mathbf{z}'\,dz_{n+1}]\begin{bmatrix}\mathbf{V}_k & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}' & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\mathbf{z}\\ dz_{n+1}\end{bmatrix}=(d\mathbf{z})'\,\mathbf{V}_k(d\mathbf{z})>0$$

(35)

なることである．すなわち，行列 $\mathbf{V}_k$ は正値定符号 (positive definite)[13] である.

1階条件で，(34–2) 式 $\lambda_2=-\lambda_1 q$ を (34–1) 式に代入する.

$$\mathbf{z}_k=\lambda_1\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}] \quad (36)$$

これを (34–4) 式に代入すると

$$z_{n+1,k}=\mathbf{p}'\,\mathbf{z}_k^0+z_{n+1,k}^0-\lambda_1\mathbf{p}'\,\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}] \quad (37)$$

を得るから，上2式を (34–3) 式に用いて，

$$\mu_{w,k}=\lambda_1[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]'\,\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]$$
$$+q(\mathbf{p}'\,\mathbf{z}_k^0+z_{n+1,k}^0)$$

よって，

$$\lambda_1=\frac{\mu_{w,k}-q(\mathbf{p}'\,\mathbf{z}_k^0+z_{n+1,k}^0)}{[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]'\,\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]} \quad (38)$$

これを(36)式に代入して，

$$\mathbf{z}_k=\frac{\mu_{w,k}-q(\mathbf{p}'\,\mathbf{z}_k^0+z_{n+1,k}^0)}{[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]'\,\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]}\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}] \quad (39)$$

を得るから，これを用いて目的関数を書き直す.

$$\sigma_{w,k}^2=\mathbf{z}_k'\,\mathbf{V}_k\mathbf{z}_k=\lambda_1\mathbf{z}_k'\,[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]$$
$$=\lambda_1^2[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]'\,\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]$$
$$=\frac{\{\mu_{w,k}-q(\mathbf{p}'\,\mathbf{z}_k^0+z_{n+1,k}^0)\}^2}{[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]'\,\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]} \quad (40)$$

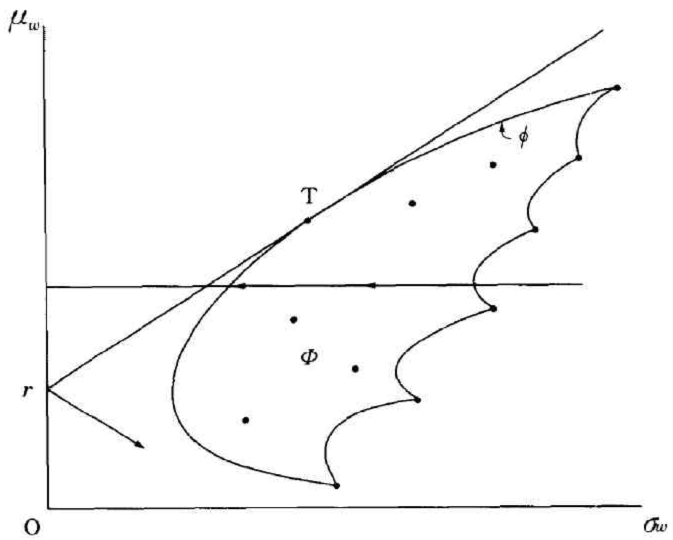
よって，期待収益と危険との間の直線関係が導かれる.

$$\mu_{w,k}=\sqrt{[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]'\,\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]}\,\sigma_{w,k}$$
$$+q(\mathbf{p}'\,\mathbf{z}_k^0+z_{n+1,k}^0) \quad (41)$$

それゆえ，投資機会軌跡は σ_w-μ_w 平面において勾配 $\sqrt{[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]'\,\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\,\mathbf{p}]}$ と切片 $q\,(\mathbf{p}'\,\mathbf{z}_k^0+z_{n+1,k}^0)$ を持つ直線になることが判る.

前述の経緯を図–2で図解すると以下のようである．σ_w-μ_w 平面において，期待富(5)のさまざまな水準の下で，分散(6)を極小にするプロセスは，予算制約(3)を満足しながら，各期待富 μ_w の水準で横軸の標準偏差 σ_w を極小にするように左方に移動して予算制約の限界で止まる境界点の軌跡が描かれる．この投資機会境界の上方分枝 (upper branch) は有効フロンティア (efficient frontier)[14] と呼ばれ，この場合の条件設定では，有効フロンティアは(41)式で示す直線になるのであ

図-2



る.

付言すれば，σ_w-μ_w 平面において，個別投資主体の危険資産混合に関する有効フロンティアは，各危険資産収益に関する基礎的投資機会点（σ_i, μ_i）を包摂する危険資産投資機会集合Φの境界双曲線ϕの上方分枝である．縦軸μ_wの確実資産の累積要因（$q=1+r$）の点Qから危険資産投資機会集合Φの境界双曲線ϕへ接線を引くと，その接点Tと点Qを結ぶ直線分が，危険資産と確実資産から成る総合ポートフォリオの有効フロンティア(41)になるのである．

一般に，総合ポートフォリオの線形の有効フロンティア(41)は，個別投資主体ごとに異なるものである．個別投資主体の投資収益予想はさまざまだから，危険資産投資機会集合Φの境界双曲線ϕや接点Tの位置は主体ごとに各様に現れる．ここで，先と同じ「投資家期待の同質性」を仮定すると，個別投資主体の総合有効フロンティアは次式になる．

$$\mu_{w,k}=\sqrt{[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]'\,\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]}\,\sigma_{w,k}+q(\mathbf{p}'\,\mathbf{z}_k^0+z_{n+1,k}^0) \tag{42}$$

いま，この直線の有効フロンティアの式(42)を投資主体$k=1,2,\cdots,K$について集計すると，勾配は等しいから，切片の和$q(\mathbf{p}'\,\mathbf{z}_k^0+z_{n+1,k}^0)$は集計されて

$$\mu_w=\sqrt{[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]'\,\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]}\,\sigma_w+q\sum_{k=1}^{K}(\mathbf{p}'\,\mathbf{z}_k^0+z_{n+1,k}^0) \tag{43}$$

になる．ただし，$\sigma_w=\sigma_{w,1}+\sigma_{w,2}+\cdots+\sigma_{w,K}$ は個々の標準偏差$\sigma_{w,k}$の単純和を表す[15]．すると，(43)式は市場全体の集計的総合有効フロンティアを表すことになり，この場合の資本市場線（capital market line）である．

7．マーケット・ポートフォリオ

投資家期待の同質性を仮定した場合，個別投資主体の最適危険資産ポートフォリオの(12)式は，分散共分散行列の逆行列$\mathbf{V}^{-1}$と期待値ベクトル$\boldsymbol{\mu}$が投資主体全員に対して共通となり，さらに市場均衡価格ベクトル$\mathbf{p}^e$に対して個別主体の均衡需要ベクトル$\mathbf{z}_k^e$が決まる．均衡時のβ_k値をβ_k^eと表す．

$$\mathbf{z}_k^e=\beta_k^e\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}^e] \tag{44}$$

他方，市場均衡条件(19)式で，均衡時のβ値をβ^eと表せば，

$$\beta^e\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}^e]-\mathbf{Z}^0=\mathbf{0} \tag{45}$$

と書かれるから，(44)式と(45)式を合成すると，次の重要な結果が得られる．

$$\mathbf{z}_k^e=\left(\frac{\beta_k^e}{\beta^e}\right)\mathbf{Z}^0,\quad k=1,2,\cdots,K \tag{46}$$

すなわち，主体kの均衡需要ベクトル$\mathbf{z}_k^e$は危険資産の既発行残高ベクトル$\mathbf{Z}^0$を比率$\left(\frac{\beta_k^e}{\beta^e}\right)$で収縮したものになっている．そこで，(46)式で任意の二つの資産iとjの比を作ると，すべての$i,j=1,2,\cdots,n$に対して

$$\frac{z_{i,k}^e}{z_{j,k}^e}=\frac{Z_i^0}{Z_j^0} \tag{47}$$

が成立する．すなわち，主体kの均衡危険資産$\mathbf{z}_k^e$の内部構成比は，対応する危険資産の既発行残高の構成比に一致することが判る．危険資産の既発行残高と同じ構成比を持つ危険資産混合は，マーケット・ポートフォリオ（market portfolio）と呼ばれる．

［マーケット・ポートフォリオ］

「投資家期待の同質性」の仮定の下で，危険資産市場が均衡にあるとき，すべての投資主体は各自の最適資産混合の内部構成比を同一に構成し，し

かもその内部構成比は，市場全体の危険資産既発行残高の構成比に一致する．さらに，市場均衡において，個々の危険資産の発行残高に占める投資主体の保有割合は，主体全員の限界代替率の和に対する自己の限界代替率の割合に等しい．∎

8．シャープの資本資産価格形成モデル

W・F・シャープ (1964) は，危険資産の1ドル当たり収益率 R_i の期待値 μ_R と分散 σ_R^2 を用いた2パラメーター接近においてやや厳密性を欠いた図式的方法により危険資産市場の価格形成を論じた．危険資産の単位投資額当たり収益率 R_i は，$p_i^f-p_i=g_i$ を資本利得として，

$$R_i=\frac{p_i^f-p_i+d_i}{p_i}=\frac{g_i+d_i}{p_i} \tag{48}$$

と表されるが，単位投資額当たり収益率 R_i のベクトル $\mathbf{R}$ と，資産の物理的単位当たり将来価値額 q_i のベクトル $\mathbf{q}$ との間には，要素 i についての関係

$$q_i=p_i^f+d_i=p_i+(p_i^f-p_i)+d_i=p_i(1+R_i)$$

より確認できるように

$$\mathbf{q}=\mathbf{P}(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}) \tag{49}$$

という変換関係がある．ただし，$\mathbf{P}$ は危険資産価格の対角行列

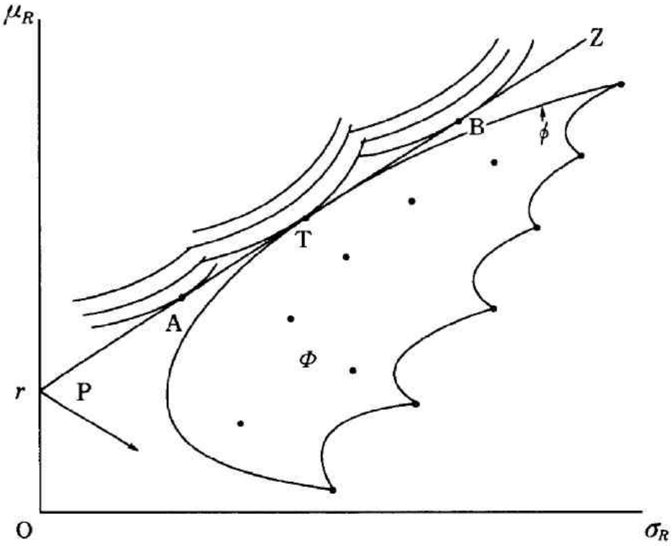
$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & p_n \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\iota}$ は要素がすべて1の n 次列ベクトル $\boldsymbol{\iota}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ である．

σ_R-μ_R 平面に危険資産混合の投資機会集合 Φ を描き，確定利子率 r の点Pから投資機会集合 Φ へ接線を引くと確実資産も含めた総合的資産混合の線形有効フロンティア（シャープは資本市場線と呼ぶ）PZが得られる．

投資家期待の同質性を仮定すると，**図-3** に示すように，収益率 (R) による接近の場合，投資機会集合 Φ と線形有効フロンティア PZ はどの投資主体に対しても同一に現れると同時に，投資主体の無差別曲線群だけが主体ごとに異なって現れることになる．

図-3



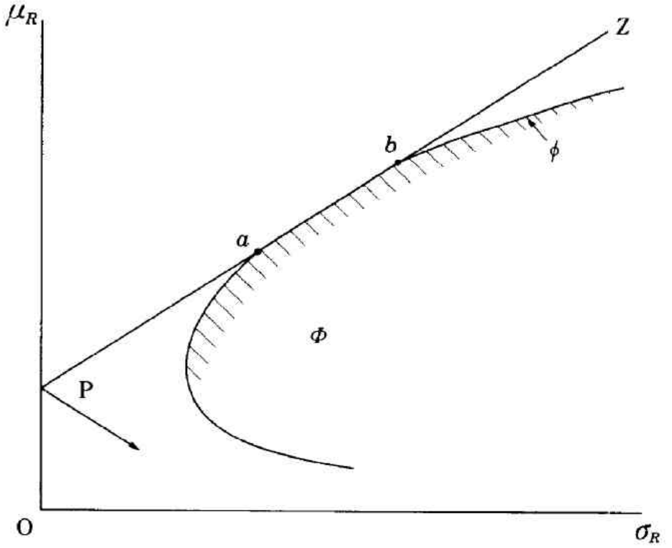
σ_R-μ_R 平面で投資機会集合 Φ と線形有効フロンティア PZ の接点を T とする．

「投資家は混合Tに含まれる危険資産だけを市場で購入しようとするから，これらの資産価格は上昇し，つれて期待収益率が下落する．よってTは下方にシフトする．他方，混合Tに含まれない資産は購買されないから，価格が下落し，期待収益率が上昇する．このような価格変化は新しい資産混合を魅力的にし，投資行動の修正を促す．この一連の修正プロセスが進行するにつれて投資機会双曲線は次第に線形化し，資本市場線の少なくとも一つの混合にあらゆる資産が入り込むようになるまで価格体系が変化するであろう.」(Sharpe, 1964, p. 435)

この主張は要約すると，**図-4** が示すように，模索過程を経て，投資機会集合 Φ の双曲線有効フロンティア ϕ が線形化し，投資機会集合 Φ が資本市場線にめり込み，線分 $\overline{ab}$ になるというのである．この主張が誤りであることは次のように示すことができる．(桐谷 1986 b)

第一に，双曲線有効フロンティア ϕ 上の点は危険資産混合を構成する資産をすべて含んでいる．したがって，接点の混合Tに含まれる危険資産と含まれない危険資産とを区別し，それらの有無に

図-4



応じて需要に差を生じ，価格が上下に分かれるという主張は不合理であり，誤りである.

第二に，投資機会双曲線が次第に線形化するという主張の根底には，線形の資本市場線が固定しているという誤認がある．シャープの設定で資本市場線は

$$\mu_R=\sqrt{(\boldsymbol{\mu}_R-r\boldsymbol{\iota})'\mathbf{V}_R^{-1}(\boldsymbol{\mu}_R-r\boldsymbol{\iota})}\,\sigma_R+r \tag{50}$$

のように示され，勾配には危険資産の市場価格 $\mathbf{p}$ が明示的に現れていない．しかし，勾配 $\theta=\sqrt{(\boldsymbol{\mu}_R-r\boldsymbol{\iota})'\mathbf{V}_R^{-1}(\boldsymbol{\mu}_R-r\boldsymbol{\iota})}$ を価格 $\mathbf{p}$ が表記されるように変形すると，

$$\begin{aligned}\theta^2&=(\boldsymbol{\mu}_R-r\boldsymbol{\iota})'\mathbf{V}_R^{-1}(\boldsymbol{\mu}_R-r\boldsymbol{\iota})\\&=[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]\end{aligned} \tag{51}$$

であることが判る[16]．それゆえ，市場価格ベクトル $\mathbf{p}$ が変化すると，資本市場線の勾配も変化するのであり，固定した資本市場線 PZ へ投資機会集合 Φ がめり込むのではなく，価格ベクトル $\mathbf{p}$ の変化とともに，投資機会集合 Φ と資本市場線 ϕ は接したままシフトするのである.

上述の経緯を簡潔に展開する．われわれの物理的価値接近とシャープの収益率接近の間のいくつかの変換式を用意する．将来価値額 $\mathbf{q}$ の期待値を $\boldsymbol{\mu}=\mathrm{E}[\mathbf{q}]$，収益率ベクトル $\mathbf{R}$ の期待値を $\boldsymbol{\mu}_R=\mathrm{E}[\mathbf{R}]$ と置けば，

$$\boldsymbol{\mu}=\mathbf{P}(\boldsymbol{\iota}+\boldsymbol{\mu}_R) \tag{52}$$

と書かれるから，

$$\mathbf{q}-\mathrm{E}[\mathbf{q}]=\mathbf{q}-\boldsymbol{\mu}=\mathbf{P}(\mathbf{R}-\boldsymbol{\mu}_R)$$

を用いて，分散共分散行列 $\mathbf{V}$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{V}&=\mathrm{E}[(\mathbf{q}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{q}-\boldsymbol{\mu})']\\&=\mathbf{P}\mathrm{E}[(\mathbf{R}-\boldsymbol{\mu}_R)(\mathbf{R}-\boldsymbol{\mu}_R)']\mathbf{P}'=\mathbf{P}\mathbf{V}_R\mathbf{P}'\end{aligned} \tag{53}$$

と変換される.

投資家期待の同質性を仮定した場合の有効フロンティアの勾配を $\theta=\sqrt{[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]'\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]}$ と置こう．すると，これを2乗したものは

$$\theta^2=[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}]'\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\,\mathbf{p}] \tag{54}$$

だから，これを $\mathbf{p}$ に関して偏微分する.

$$\frac{\partial\theta^2}{\partial\mathbf{p}}=-2q\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\mathbf{p}] \tag{55}$$

(27)式 $\mathbf{Z}^*=\beta\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\mathbf{p}]$ で，$\mathbf{Z}^*>0$ かつ $\beta>0$ により，$\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\mathbf{p}]>\mathbf{0}$ を得るから，$q>0$ を考慮して，(55)式の符号は負，$\partial\theta^2/\partial\mathbf{p}<\mathbf{0}$ である．よって，資本市場線は，各危険資産の価格 p_i が上昇すれば，右方に回転して勾配が減少する．また，各危険資産の価格 p_i が下降すれば，左方に回転して勾配が増加する.

危険資産の投資機会集合 Φ において，ある代表的な基礎的投資機会点（σ_{Ri}, μ_{Ri}）が価格変化とともにどう変位するかを見てみよう．期待値と標準偏差は，それぞれ

$$\mu_{Ri}=\frac{\mu_{wi}}{P_i}-1 \quad \text{かつ} \quad \sigma_{Ri}=\frac{\sigma_{wi}}{P_i} \tag{56}$$

と変換できるから，各式を価格 p_i で微分する.

$$\frac{d\mu_{Ri}}{dp_i}=-\frac{\mu_{wi}}{p_i^2}<0 \quad \text{かつ} \quad \frac{d\sigma_{Ri}}{dp_i}=-\frac{\sigma_{wi}}{p_i^2}<0 \tag{57}$$

すると，危険資産 i の価格 p_i が上昇すると期待収益と標準偏差はともに減少し，基礎的投資機会点（σ_{Ri}, μ_{Ri}）は原点に向かって移動する．また，同価格が下落すると期待収益と標準偏差はともに増加し，基礎的投資機会点（σ_{Ri}, μ_{Ri}）は原点から遠ざかる．これは価格の上昇と下落に応じて，投資機会集合 Φ が原点に接近するか遠ざかることを示唆している.

9．ビアバッグ＝グローヴのシャープ批判

シャープの危険資産市場モデルが厳密性を欠き，種々の問題点を孕んでいるいるとしてビアバッグ＝グローヴ（G. O. Bierwag＝M. A. Grove,

1965）は一応厳密な数学モデルを代案として提出した．彼らの議論は途中までモッシン（Mossin, 1966）の理論モデルと類似し，有益な結果が出そうであったが，重要な誤りを犯したので不発に終わってしまった．以下で，ビアバッグ＝グローヴのモデルの問題点を摘出し，検討する．彼らは単純化のため，危険資産の配当を捨象して資本利得だけを収益とし，確実資産を現金のみとし，利子を捨象したが，これは本質的なことではない．以下は，われわれのモデルになぞらえて説明する．

先の個別主体の最適資産選択の解(12)と(13)式で，$q=1$ と置けば，形式上，ビアバッグ＝グローヴのモデルになる．先ず，個別投資主体の最適解を出す．

$$\mathbf{z}_k^*=\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-\mathbf{p}] \tag{58}$$

$$z_{n+1,k}^*=w_k^0+\beta_k\mathbf{p}'\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-\mathbf{p}] \tag{59}$$

次いで，経済全体の K 主体の危険資産超過需要（$\mathbf{z}_k^*-\mathbf{z}_k^0$）を集計してゼロと置けば，危険資産市場のストック均衡条件が得られるとする．

$$\sum_{k=1}^{K}(\mathbf{z}_k^*-\mathbf{z}_k^0)=\sum_{k=1}^{K}\mathbf{z}_k^*=\sum_{k=1}^{K}\beta_k\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-\mathbf{p}]=\mathbf{0} \tag{60}$$

しかしながら，ここでビアバッグ＝グローヴは，

$$\sum_{k=1}^{K}\mathbf{z}_k^0=\mathbf{Z}^0=\mathbf{0} \tag{61}$$

と仮定するが，これが重大な過誤となるのである．まず，彼らは(60)式を，危険資産市場均衡の本質的な閉鎖条件と考える．社会で誰かが株式を保有するならば，その株式は誰かにより発行されたものであり，相殺されてゼロになると考えた．仮定(61)は，経済の K 人の主体が証券の発行と引受を行い，さらに証券の貸借を行い，これらを相殺して，なお，保有の移転（取引）を行うから，

$$\sum_{k=1}^{K}\mathbf{z}_k^*=\mathbf{Z}^*\equiv\mathbf{0} \tag{62}$$

すらも成立してしまうのである．(60)式を価格 $\mathbf{p}$ について解き，

$$\mathbf{p}^e=\left(q\sum_{k=1}^{K}\beta_k^e\mathbf{V}_k^{-1}\right)^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{K}\beta_k^e\mathbf{V}_k^{-1}\boldsymbol{\mu}_k\right\} \tag{63}$$

ここでビアバッグ＝グローヴは投資家期待の同質性を適用する．このとき上式は

$$\mathbf{p}^e=(\beta\mathbf{V}^{-1})^{-1}\{\beta\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}\}=\boldsymbol{\mu} \tag{64}$$

となり，(58)と(59)で $\mathbf{z}_k^*=\mathbf{0}$ かつ $z_{n+1,k}^*=w_k^0$ が導かれるから，投資主体は危険資産市場の均衡において，危険資産を全く保有することなく，全投資残高を現金で保有するという驚くべき結論が出てくる．つまり，投資家期待の同質性の下で，危険資産市場均衡において投資主体は現金しか保有せず，完全な流動性選好状態になるので，このような非現実的な状況は，投資家期待の同質性を仮定したことに起因するというのである．

しかしながら，本来，$\mathbf{Z}^0=\sum_{k=1}^{K}\mathbf{z}_k^0$ は，危険資産証券の貸借を相殺した後，証券の発行市場で引き受けられた既発行証券数のベクトル $\mathbf{Z}^0>\mathbf{0}$ に等しく，ゼロではない．他方で，$\mathbf{Z}^*=\sum_{k=1}^{K}\mathbf{z}^*$ は，各投資主体による最適な危険資産証券の保有需要の集計的ベクトルであり，$\mathbf{Z}^*>\mathbf{0}$ である．そして，$\mathbf{Z}^*-\mathbf{Z}^0=\mathbf{0}$ は既発行証券の流通市場だけを対象とする均衡条件である．

［注］

1）資産選択論において保有残高は当初は保有比率で取り扱われ，後に保有金額で定式化されたが，資産価格を決定するために，株式数・債券数を物理的保有残高と呼び，変数とする．

2）変数 d_i は，株式のとき不確実な配当であり，債券のとき確実な利子である．しかし，株式と債券の双方とも市場で取り引きされるから，不確実な資本利得を発生し，危険資産に分類される．

3）金融資産収益を確率変数と見なす場合，資産収益が属する確率分布が1次と2次のモーメント（積率）で規定される場合の理論体系をいう．最も周知な2パラメーター確率分布は正規分布であり，平均値（mean, 期待値）と分散（variance）によって分布形が指定される．

4）任意の財の価格を1と置くことにより，その財と他財との交換比率が絶対的に決定される．このように価格を1と置く財を価値尺度財という．

5）市場性（marketability）とは，証券や財が市場で売買できる可能性をいう．証券が市場性を持つとは，その証券が証券市場に上場されていなければならない．

6）所定の分析期間の初期にすでに保有されている富＝財産（財のストック）をいう．

7）投資家が彼らの投資を，投資収益の期待値（E）と分散（V）ないし標準偏差（S）によって規定するという投資基準をいう．2パラメーター方式と同義である．

8）確率変数である危険資産収益の効用関数は確率変数であり，その期待値を取ることができ，それを期待効用（expeted utility）と呼ぶ．

9）m 個の制約条件の下で，目的関数を極大あるいは極小にする方式である．$\mathbf{x}$ を変数の n 次列ベクトル，λ を Lagrange 未定乗数の m 次列ベクトルとする．先ず，Lagrange 関数 Λ を作る．Lagrange 関数は目的関数を $f(\mathbf{x})$ と置き，

Lagrange 未定乗数の m 次列ベクトル λ に制約条件を陰関数形式にしたベクトル $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ を掛けた $\lambda'\mathbf{g}(\mathbf{x})$ を付け加える．$\Lambda=f(\mathbf{x})-\lambda'\mathbf{g}(\mathbf{x})$．これを $\mathbf{x}$ に関して微分しゼロに等しく置いて1階条件が得られる：$\partial\Lambda/\partial\mathbf{x}=\partial f(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\partial\Lambda/\partial\lambda=-\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$．2階条件は，$\mathbf{g}'(\mathbf{x})d\mathbf{x}=0$ を満足する非ゼロの $d\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ に対して次の2次形式が正値定符号で $(d\mathbf{x})'[\partial^2\Lambda/\partial\mathbf{x}^2](d\mathbf{x})>0$ ならば極小，負値定符号で $(d\mathbf{x})'[\partial^2\Lambda/\partial\mathbf{x}^2](d\mathbf{x})<0$ ならば極大である．

10) 収益 R の標準偏差 σ_R が増加するにつれて期待効用が減少するような投資主体を危険回避者という．危険回避者の特徴は $\partial E[u]/\partial\sigma_R<0$ で表される．これに対して危険愛好者 (risk lover) の特徴は $\partial E[u]/\partial\sigma_R>0$ で表される．危険愛好者の最適解は通常，端解になるから，分析はむしろ容易である．

11) ワルラス法則は通常，多数財市場で n 種の財市場が均衡するとき，社会全体の取引制約条件が成り立つので，$n-1$ 市場が均衡すれば n 番目の市場が自動的に均衡することをいう．n 市場が均衡して超過需要関数がゼロならば，$E_1(p_1, p_2, \cdots, p_n)=0$, $E_2(p_1, p_2, \cdots, p_n)=0$, $\cdots$, $E_n(p_1, p_2, \cdots, p_n)=0$．さらに，会計的な取引制約 $\sum_{j=1}^{n}p_jE_j=0$ も成立するから，$\sum_{j=1}^{n-1}p_jE_j+p_nE_n=0$．すなわち，$n-1$ 市場が均衡すると $p_nE_n=0$ を伴うから，$E_n=0$ が出てくる．

12) ストック均衡では垂直の供給関数が現れる．**図-1** で，垂直線 S は危険資産 i の既発行残高（ストック量）を表し，ストック需要曲線 D との交点 E でストックの均衡が成立する．対応する均衡価格は p_i^* である．

13) もし対称行列 $\mathbf{A}$ が正値定符号 (positive definite) であるならば，すべての非ゼロのベクトル $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ に対して2次形式 $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}>0$ である．

14) 有効フロンティアは，実行可能な集合 A の任意の点 a において，より好ましい標的が達成される東北└または西北┘方向で直角の範囲を立てる．もしこの範囲内に集合 A の内点がないならば，点 a は有効である (efficient) という．また，もしこの範囲内に集合 A の内点があるならば，点 a は有効でない (inefficient) という．

15) 投資家期待の同質性の下で，分散の(40)式より，

$$\sum_{k=1}^{K}\sigma_{w,k}=\frac{\Sigma_k\{\mu_{w,k}-qw_k^0\}}{\sqrt{[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}]'\mathbf{V}_k^{-1}[\boldsymbol{\mu}_k-q\mathbf{p}]}}, \text{ すなわち，}$$

$$\sigma_w=\frac{\mu_w-qW^0}{\theta}.$$ よって，$\mu_w=\theta\sigma_w+qW^0$ を得る．

ただし $\sigma_w=\Sigma\sigma_{w,k}$, $\mu_w=\Sigma\mu_{w,k}$ かつ $W^0=\sum_{k=1}^{K}w_k^0$ である．

16) $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{P}(\boldsymbol{\iota}+\boldsymbol{\mu}_R)$ を用いて，$[\boldsymbol{\mu}-q\mathbf{p}]'\mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu}-q\mathbf{p}]$
$=\{\mathbf{P}[(\boldsymbol{\iota}+\boldsymbol{\mu}_R)-(1+r)\boldsymbol{\iota}]\}'\mathbf{P}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{P}\{\mathbf{P}[(\boldsymbol{\iota}+\boldsymbol{\mu}_R)-(1+r)\boldsymbol{\iota}]\}$
$=(\boldsymbol{\mu}_R-r\boldsymbol{\iota})'\mathbf{V}_R^{-1}(\boldsymbol{\mu}_R-r\boldsymbol{\iota})$ と変形できる．

[参考文献]

Allais, Maurice (1953) :"Généralisation des théories de l'équilibre économique général et du rendement social au cas de risque," *Colloques Internationaux du CNRS*, Paris, pp. 81–109.

Arrow, Kenneth J. (1953) :"Le Rôle des valeurs boursiers pour la répartition la meilleure des risques," *Colloques Internationaux du CNRS*, Paris, pp. 41–48.
("The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing," *Review of Economic Studies*, Vol. 31, April, 1964, pp. 91–96.)

Arrow, K. J., and Gerard Debreu (1954) :"Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica*, Vol. 22, July, pp. 265–90.

Bierwag, G. O., and M. A. Grove (1965) : "On Capital Asset Prices : Comment," *Journal of Finance*, Vol. 20, March, 1965, pp. 89–93.

桐谷　維 (1980) :「E-V 接近における資産選択理論—論争的系譜—」『経済と経済学』第 45 号，1980 年 10 月，東京都立大学経済学会，1-31 頁．

桐谷　維 (1986a) :「資産選択のプロトタイプ・モデル」『経済と経済学』第 57 号，1986 年 2 月，東京都立大学経済学会，53-78 頁．

桐谷　維 (1986b) :『資産選択の現代理論』東洋経済新報社．

Mossin, Jan (1966) : "Equilibrium in a Capital Asset Market," *Econometrica*, Vol. 34, October, 1966, pp. 768–83.

Sharpe, W. F. (1964) : Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, Vol. 19, September, 1964, pp. 425–42.

Sharpe, W. F. (1965) : "Reply," *Journal of Finance*, Vol. 20, March, 1965, pp. 94–95.