「演繹法」と「帰納法」
～数学的帰納法，漸化式の指導を巡って～

榎本　里志

0　はじめに

現行の学習指導要領では，「数列」は「数学Ｂ」で扱っているが，1951年から実施されてきた学習指導要領の長い歴史の中で「解析Ⅱ，数学Ⅲ，数学応用，数学ⅡＡ，数学ⅡＢ，数学Ⅱ，基礎解析，数学Ａ，数学Ｂ」と教科書のどの科目で扱うかの差はあるものの，「数列」は，その指導の中心として重要な位置を占めてきた。

その中でも，基本的な「漸化式」と「数学的帰納法」は重要な指導項目の一つである。

最近では，多くの教科書では，「漸化式」を「数列の帰納的定義」として導入し，続いて「数学的帰納法」を指導する流れになっている。

この分野の授業導入の際，必ず生徒に問いかけてきた点に「帰納」と「演繹」がある。

その内容は，教科書に「帰納」という用語が現れたとき，国語の反意語の問題に乗じて

「帰納の反対語を漢字で書いてみよう」

という質問をするのであるが，これまで，多くの生徒は「演繹」の漢字はおろか，「帰納」という単語にも馴染みが薄いという現実に直面する。

ちょっとした話題を提供することで，新しいテーマへの関心を惹き起して「漸化式」「数学的帰納法」への導入をスムーズにしていこうとするのが主旨であるが，ついつい脱線してしまうことも多い。

数学の基本的な論理展開である「演繹法」と数学の指導上で現れる「帰納法」について振り返ってみたい。

1　演繹法と帰納法

広辞苑によれば，

「**［演繹］，②（deduction）推論の一種。一定の前提から論理規則に基づいて必然的に結論を導き出すこと。通常は普遍的命題（公理）から個別的命題（定理）を導く形をとる。数学の証明はその典型。演繹法。･･･（略）･･･ ⇔ 帰納**」

「**［帰納］［論］（induction）推理および思考の手続きの一つ。個々の具体的事実から一般的な命題ないし法則を導き出すこと。特殊から普遍を導き出すこと。導かれた結論は必然的ではなく，蓋然的にとどまる。**」とあり，

「**［帰納的定義］集合の要素をまずいくつか与え，その他の要素を定める操作・手順を与えることにより，その集合を定義する方法。回帰的定義。**」

さらに，「**［帰納法］帰納を用いる科学的研究法。特に，因果関係を確定するに用いる。･･･（略）･･･⇔演繹法**」と記載されている。

また，19世紀末から20世紀初頭にかけて，論理学，数学他広範な分野で科学者として活躍したアメリカ人パースは，その著書「連続性の哲学」の中で，推論には「帰納（Induction）」「演繹（Deduction）」と「仮説形成（Retroduction）」の三種類があるとして，その特徴を述べてい

る。

バースは「演繹は（仮説的）前提から必然的に帰結するものを見て取ること。仮説形成は，手元にあるデータから背後にある規則を仮説的に推論すること。帰納は推測される規則の妥当性の程度を新たなデータによって検定すること。」であるとし，推論の方法が,「演繹」と「帰納」の二つだけでないとしていることを考えると，生徒に問いかけた「帰納」と「演繹」が推論において，反対語として良いのかとの疑問も生ずる。

「演繹法」の推論の典型は，ユークリッド幾何における定義，公理・公準，定理の展開を例として理解させることができる。

たとえば，ユークリッドの原論に書かれている「平行線公理」からは，「三角形の内角の和は180°」という定理，この定理からは「多角形の外角の和は360°」とか「n角形の内角の和は（$n-2$）×180°」などの定理が次々と説明できてくる。このように，「定義，公理・公準⇒定理，系・・・」と発展していくこれまでの数学本来の構成の流れが「演繹的」な推論であると説明することができる。

ところが,「数学的帰納法」を始めて目にしたときに「帰納法」と称しているにもかかわらず，その論理展開は,「演繹的」なものであると述べると，数学で現れた「帰納」という語句が，一般にいう「帰納」との扱いに差があるように感じ，混乱する生徒も多い。

「数学的帰納法」が「演繹的推論」であることを説明するには，数の概念の出発点になる自然数を定義した「ペアノの公準（公理）」を持ち出すことになる。

すなわち，

ⅰ）　1は自然数である

ⅱ）　nが自然数ならば，その直後の自然数n'が存在する

ⅲ）　1を直後とする自然数はない

ⅳ）　$n'=m'$ならば，$n=m$である

ⅴ）　Mが自然数の集合でつぎの1),2）が同時に成立するならば，Mは全ての自然数を含む

1）Mは1を含む

2）Mがnを含むならば，Mはn'を含む

公準ⅴ）は，「数学的帰納法」の推論と同じ内容をもつものであり，これら公準をもとに，自然数の加法や減法が定義されていく過程をみれば，先にあげたユークリッド幾何の推論過程と同様であることが説明できる。

（[注］ペアノの公理は，ⅰ）～ⅴ）のように表記されている場合が多いが，他の表記をする場合もある）

授業では，これらの議論は略して，少し？大雑把な説明だと思いながらも，「演繹」は［一般的定義から特殊なものへ］の考え方であり，「帰納」は［特殊な事象から一般的なものへ］の推論の構造であると簡単に説明した上で，これから学ぶ「漸化式」や「数学的帰納法」は,「帰納的」に与えられた命題から，一般的な解法や証明を「演繹的」に考える分野であることとして説明してきた。

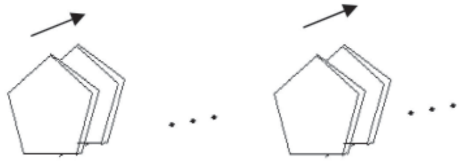
「数学的帰納法」は「帰納的な推論である」という誤解を避ける観点からも，「数学的帰納法」を指導する際には，単に「帰納法」ではなく,「数学的帰納法（mathematical induction）と省略しないで扱いたい。

2　数学的帰納法

「数学的帰納法」の論法に違和感を感ずる生徒も多いことを踏まえ，授業においては，まず，「将棋（ドミノ）倒し」の仕組みを考えさせることが効果的である。

すなわち，将棋倒しの仕組みは，コマとコマの間隔に注意して，k番目のコマが倒れたならば，必ず$k+1$番目のコマが倒れるようにおいている。これにより，1番目のコマを倒すことによって，コマが並べてある限りすべて倒れる

ことになる。



k番目が倒れると $k+1$番目が倒れるように並べる　　1番目を実際に倒す

将棋倒しのコマに自然数nの命題を適用すれば「数学的帰納法」の論理展開になる。

すなわち，$n=k$のときの成立したとき（コマが倒れたなら），$n=k+1$のときの成立（次のコマも倒れるように並べられていることを確認）を示して，実際に，$n=1$のときの成立（スタートを確認）を示すことにより，すべてのnについて成り立つことが証明される。

この証明の手順を整理して，

【1】（ｉ）$n=1$のときの成立を示す

（ⅱ）$n=k$のときの成立を仮定して，$n=k+1$のときの成立を示す

（ｉ）（ⅱ）により，すべての自然数nについての命題が成り立つ。

として「数学的帰納法」の基本的な証明の手続きを説明することができる。

数学的帰納法は教科書で扱う基本形以外に，前の二つのコマが倒れたとき，その次のコマが倒れるようにセットにすれば，

【2】（ｉ）$n=1,2$のときの成立を示す

（ⅱ）$n=k,\,k+1$のときの成立を仮定して，$n=k+2$のときの成立を示す

【2】をさらに拡張して，

【3】（ｉ）$n=1$のときの成立を示す

（ⅱ）$n\le k$を満たす全ての自然数nに対して成立を仮定して，$n=k+1$のときの成立を示す

さらに，$n=1$からのスタートではなく，逆方向からの推論にすれば，

【4】後ろ向き帰納法（無限降下法）

$n=k$のときの成立を仮定して$n=k-1$の成立を示す。（背理法との併用が多い）

なども，状況に応じて有効な証明方法であることを紹介することができる。

これら以外に，多変数の自然数のペアに適用する方法もあるが，高等学校の授業では，上記4つの場合を扱うことが多い。

3　数学的帰納法の指導例

「数学的帰納法」の論理展開を理解させるために，教科書では，既習の数列の和や，整数の倍数に関するもの，二項定理が背景にある不等式の証明などを例題として取り上げている場合が多い。

ここで，やや発展的なものもあるが，代表的な例題とその指導ポイントをあげてみよう。

［問1］次の等式を証明せよ。$(n=1,2,3,\cdots)$

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$$

（学習院大）

指導ポイント　$n=k+1$のときの

右辺は，$2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)(2k+1)$，左辺は

$(k+1+1)(k+1+2)(k+1+3)\cdots(k+1+k)(k+1+k+1)$

$=(k+2)(k+3)(k+4)\cdots(2k+1)(2k+2)$

$=2(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k+1)$ となる

［問2］絶対値が1より小さい実数

$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ $(n\ge2)$ について，次の不等式を証明せよ。

$$1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<a_1a_2a_3\cdots a_n+n$$

（愛知教育大）

指導ポイント　$n=2$では，

$|a_1|<1,|a_2|<1$より $a_1-1<0$，$a_2-1<0$

右辺－左辺

$=(a_1a_2+2)-(1+a_1+a_2)$

$= a_1a_2 - a_1 - a_2 + 1 = (a_1 - 1)(a_2 - 1) > 0$

さらに，$n = k$ の仮定

$1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k < a_1 a_2 a_3 \cdots a_k + k$

から，$n = k + 1$ の不等式,

$1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1} < a_1a_2a_3 \cdots a_{k+1} + k + 1$

を導くために，$a_1a_2a_3 \cdots a_k = b_k$ などとおき，$|a_1| < 1, \cdots, |a_k| < 1$ から，$|b_k| < 1$ となることから，$n = 2$ の場合と同様になる。絶対値の処理に慣れさせたい

［問 3］ n が正の整数のとき，$\cos n\theta$ は $\cos\theta$ の整式であることを証明せよ。

指導ポイント　加法定理が必要となるだろうということには気づくが，$\cos n\theta$ とともに，$\sin n\theta \cos\theta$ も $\cos\theta$ の整式であることも同時に証明が必要となることに着眼させたい。

［問 4］ n を自然数とするとき，$3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 で割り切れることを証明せよ。

（名古屋市大）

指導ポイント　$n = k$ のときの仮定，

$3^{k+1} + 4^{2k-1} = 13m$（m は整数）から，

$n = k + 1$ のとき，

$$3^{k+2} + 4^{2k+1} = 3(3^{k+1}) + 4^2 4^{2k-1}$$
$$= 3(13m - 4^{2k-1}) + (16)4^{2k-1}$$
$$= 3 \cdot 13m + (16 - 3)4^{2k-1}$$

とする指数計算に注意させたい。

［問 5］ 正の整数の数列 $\{a_n\}$ が次の不等式を満たす。

$na_{n+1}{}^2 + (n+2)a_n{}^2 < 2(n+1)a_n a_{n+1}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$a_2 = 2$ とするとき，a_n を推測して証明せよ。

（広島県立大 - 改）

指導ポイント　$n = 1$ のとき，不等式

$3a_1{}^2 - 8a_1 + 4 < 0$ の解は，$\dfrac{2}{3} < a_1 < 2$ であり，

a_n が整数であるから $a_1 = 1$，以下，$a_3, a_4, \cdots$ から，$a_n = n$ を推測し，漸化式から $a_{k+1} = k + 1$ となることを証明する。

［問 6］ $x = t + \dfrac{1}{t}$ とし，$P_n = t^n + \dfrac{1}{t^n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，P_n は x の n 次の整式であることを証明せよ。

指導ポイント　2 段階の仮定を要する。

$$P_1 = t^1 + \frac{1}{t^1} = x$$

$$P_2 = t^2 + \frac{1}{t^2} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2t \cdot \frac{1}{t} = x^2 - 2$$

P_k，P_{k+1} がそれぞれ，x の k 次，$k + 1$ 次の整式と仮定，

$$P_{k+2} = t^{k+2} + \frac{1}{t^{k+2}}$$
$$= \left(t^{k+1} + \frac{1}{t^{k+1}}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(t^k + \frac{1}{t^k}\right)$$ と変形

［蛇足になるが･･･］$n = 2$ の確認を怠ると，次のようなおかしな命題が出てくることにも注意させたい。

「$x^n + y^n$（n は整数）は，$x + y$ の倍数である」

「【誤った証明】$n = 1$ のときは, 明らかである。$n = k$，$k + 1$ のとき，$x^n + y^n$ が $x + y$ の倍数と仮定すると，

$$x^{k+2} + y^{k+2} = (x + y)(x^{k+1} + y^{k+1}) - xv(x^k + y^k)$$

であるから，仮定から，右辺の第一項，第二項ともに $x + y$ の倍数である。従って $x^n + y^n$（n は整数）は，$x + y$ の倍数である･･･？？」

［問 7］ $n = 1, 2, 3, \cdots$ とするとき，

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$ は整数であることを証明せよ。

（フィボナッチの数列 漸化式問 15(3)）

指導ポイント　$a_1 = 1$，$a_2 = 1$ となることの確認，

$$a_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

において，第1項は，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$から，$a_{k+1}$である。第2項，第3項の変形は，

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(-\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(-\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right\}=a_k$$

のように，無理数の計算に注意させたい。

［問8］ $a_n>0\ (n=1,2,3,\cdots)$，
$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\ldots+a_n{}^3$ のとき，
$a_n=n$であることを証明せよ。

（山口大）

$\boxed{\text{指導ポイント}}$ $1\le n\le k$のとき，
$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$\cdots$，$a_k=k$の仮定から，

$$(1+2+3+\cdots+k+a_{k+1})^2$$
$$=1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+a_{k+1}{}^3$$

で，自然数の和，３乗和の公式により

$$\left\{\frac{k(k+1)}{2}+a_{k+1}\right\}^2=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+a_{k+1}{}^3$$

から，$k(k+1)+a_{k+1}=a_{k+1}{}^2$より，$a_{k+1}=k+1$

を導く

［問9］ nが3以上の整数のとき，
$x^n+2y^n=4z^n$を満たす整数x，y，zは
$x=y=z=0$以外に存在しないことを証明せよ。

（千葉大）

$\boxed{\text{指導ポイント}}$ どこから手をつけたらよいかが難しいが，［背理法を併用して］
$(x,y,z)=(0,0,0)$以外に，
与式 $x^n+2y^n=4z^n\cdots$①を満たすものがあると仮定すると，$2y^n$，$4z^n$は偶数だから，x^nも偶数となるから，$x=2x_1$（x_1は整数）とおける。これを①に代入すると，
$(2x_1)^n+2y^n=4z^n$より
$2^{n-1}x_1{}^n+y^n=2z^n\cdots$②
同様に，yも偶数となり$y=2y_1$（y_1は整数）とおけるから②に代入すると，
$2^{n-1}x_1{}^n+(2y_1)^n=2z^n$より
$2^{n-2}x_1{}^n+2^{n-1}y_1{}^n=z^n\cdots$③
③より，zも偶数となるから，$z=2z_1$（z_1は整数）とおけるから③に代入すると
$2^{n-2}x_1{}^n+2^{n-1}y_1{}^n=(2z_1)^n$より
$x_1{}^n+2y_1{}^n=4z_1{}^n$となり，$(x_1,y_1,z_1)$も①を満たすことになり，これを繰り返すことにより
(x_k,y_k,z_k)も①を満たすことになる。
すなわち，$x=2^kx_k,y=2^ky_k,z=2^kz_k$
$(k=1,2,3,\cdots)$より，$x_k=\frac{x}{2^k}$，$y_k=\frac{y}{2^k}$
$z_k=\frac{z}{2^k}$が整数でなくなるkが存在することになり，最初の仮定が間違っていたことになる

いずれの問題も「数学的帰納法」を抜きにしては容易に解決できない問題であり，「数学的帰納法」が自然数nに関する命題の証明法であることを示す例として，生徒の理解度に応じて紹介したい例題である。

4 漸化式の基本形の指導例

「漸化式」は，初期条件と，隣接二項間や三項間など「帰納的に与えられた条件」から，その一般項を「演繹的」に求めていくことが主題になるが，その論理体系は，「数学的帰納法」のそのものである。

「漸化式」は，数列の表現の一つとして重要な項目であるにもかかわらず，苦手とする生徒が多い。その要因の一つには，教科書では代表的な例題を学ぶだけで，漸化式に慣れる機会が少ないことがあげられる。

高等学校で体系的に学んでおきたい漸化式に

ついて，基本の形から確認しておこう。

すべて，$n=1,2,3,\cdots$とする，

【1】等差数列と等比数列}

（1）$a_1=a$，$a_{n+1}=a_n+d$

⇒初項a，公差dの等差数列

（2）$a_1=a$，$a_{n+1}=ra_n$

⇒初項a，公比rの等比数列

［問 1］（1）$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3$

（2）$a_1=3a_{n+1}=2a_n$

$\boxed{答}$（1）$a_n=3n-1$　（2）$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

【2】 $a_{n+1}=a_n+f(n)$（階差型）

⇒ 数列$\{a_n\}$の階差数列の第n項が$f(n)$であるから，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$　$(n\geq 2)$を利用

［問 2］（1）$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+n+1$

（2）$a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+3n^2+n$

$\boxed{答}$（1）$a_n=\dfrac{1}{2}\left(n^2+n+4\right)$

（2）$a_n=n^2\left(n-1\right)$

【3】 $a_{n+1}=f(n)a_n$の型

⇒ $n=1,2,3,\cdots$ を順次代入して，辺々掛けていくと $a_n=f(1)f(2)\cdots f(n-1)a_1$

となることを利用

［問 3］（1）$a_1=1$，$a_{n+1}=na_n$

（2）$a_1=1$，$(n+2)a_{n+1}=na_n$

$\boxed{答}$（1）$a_n=\left(n-1\right)!$　（2）$a_n=\dfrac{2}{n\left(n+1\right)}$

【4】 $a_{n+1}=pa_n+q$（等差×等比型の型）

⇒(解1) 与式から，$a_{n+2}=pa_{n+1}+q$ をつくり，与式と辺々引いて $a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$ と変形し，階差数列の公式を利用

⇒（解2）$\alpha=p\alpha+q$ を満たすαを用いて，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$と変形し，数列$\{a_n-\alpha\}$が，初項$a_1-\alpha$公比$p$の等比数列であることを利用

など

［問 4］ $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2$

$\boxed{答}$ $a_n=2\cdot 3^{n-1}+1$

【5】 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$の型

⇒ 両辺をp^{n+1}で割って，$\dfrac{a_n}{p^n}=b_n$とおき，

階差数列を利用

⇒ $f(n)$がnのk次式のとき，

$$a_n+c_kn^k+c_{k-1}n^{k-1}+\cdots+c_1n+c_0=b_n$$

として，係数$c_0,c_1,\cdots,c_n$を求め，数列$\{b_n\}$が，公比pの等比数列であることを利用

［問 5］（1）$a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+2^n$

（2）$a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+2n+1$

（3）$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+n^2+n$

$\boxed{答}$（1）$a_n=3^n-2^n$　（2）$a_n=3^n-n-1$

（3）$a_n=9\cdot 2^{n-1}-n^2-3n-4$

【6】 $f(n)a_{n+1}=f(n+1)a_n+q$とその類似型

⇒ 特定の式で両辺を割ると,既知の形になることを利用

［問 6］（1）$a_1=2,\ na_{n+1}=(n+1)a_n+1$

（2）$a_1=2,\ na_{n+1}=(n+2)a_n+1$

（3）$a_1=2,\ a_{n+1}=(n+1)a_n+n$

$\boxed{答}$（1）$a_n=3n-1$(両辺を$n(n+1)$で割る)

（2）$a_n=\dfrac{5n^2+5n-2}{4}$

（両辺を$n(n+1)(n+2)$で割る）

（3）$a_n=2\cdot n!-1$（両辺を$(n+1)!$で割る。$\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$を利用）

【7】 $a_{n+1}=q(a_n)^p$の型

⇒　$a_n>0$，$q>0$のとき,両辺の常用対数などをとると，$\log_{10}a_{n+1}=p\log_{10}a_n+\log_{10}q$

と変形できるから，$\log_{10}a_n=b_n$と置くと

【4】の形に帰着する

［問7］ $a_1=1$, $a_{n+1}=8\sqrt[4]{a_n}$

$\boxed{答}$ $a_n=2^{4-4^{1-n}}$（底2の対数をとる）

【8】 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{pa_n+q}$ の型

⇒ $a_n\neq 0$（正しくは，数学的帰納法などで証明して）から，両辺の逆数をとると，

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=p+\dfrac{q}{a_n}$ と変形できるから，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ と置くと【4】の形に帰着する

［問8］ $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}$

$\boxed{答}$ $a_n=\dfrac{2}{3^n-1}$

【9】 $a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ の型

⇒ $x=\dfrac{rx+s}{px+q}$ の解を，$x=\alpha$, β とすると，

与式は，$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\dfrac{r-p\alpha}{r-p\beta}\left(\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right)$ と変形できる。したがって，数列 $\left\{\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right\}$ は，

公比 $\left(\dfrac{r-p\alpha}{r-p\beta}\right)$ の等比数列となる。

（注：このことを確かめさせることも教材として利用したい）

なお，この程度になると,置き換えの指示があったり，推定法により数学的帰納法との併用が多い。

［問9］ $a_1=3$, $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-2}$

$\boxed{答}$ $a_n=\dfrac{4(-2)^n-1}{(-2)^n-1}$

【10】 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\,(p+q=1)$ の型}

⇒ $p+q=1$ から $p=1-q$,

$a_{n+2}=(1-q)a_{n+1}+qa_n$ よって，

$a_{n+2}-a_{n+1}=-q(a_{n+1}-a_n)$ となり，数列 $\{a_n\}$ の階差数列が，公比 $-q$ の等比数列となることを利用。

［問10］ $a_1=2$, $a_2=4$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$

$\boxed{答}$ $a_n=2^n$

【11】 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\,(p+q\neq 1)$ の型

⇒ $x^2-px-q=0$ の解を α, β とすると，

$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=-q$ であるから，

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ は

$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$ となり，

$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$ と変形できるから，

これより，数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$, $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は，それぞれ，公比 β, α の等比数列となるから，それぞれの第 n 項を求めて，a_{n+1} を消去すると，a_n が求められる。

特に $\alpha=\beta$ のときは,【5】の型に帰着される。

［問11］（1） $a_1=1$, $a_2=4$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$

（2） $a_1=1$, $a_2=4$, $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$

（3） $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

（フィボナッチ（1170 ? -1250 ?）数列）

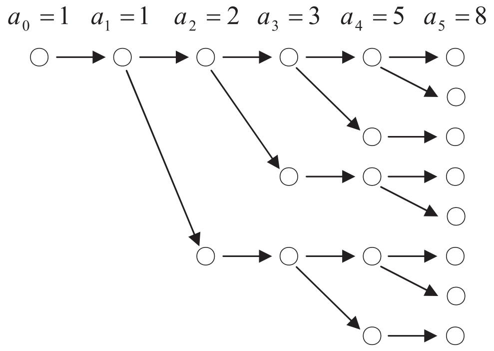
$\boxed{答}$（1） $a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}$ （2） $a_n=n\cdot 2^{n-1}$

（3） $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

イタリアの数学者フィボナッチは，その書である「算盤の書」の中で有名な「ウサギのつがいの問題」でこの数列について触れている。「ウサギのつがいの問題」というのは，

「生まれたばかりの１つがいのウサギは２ケ月目から１つがいのウサギを産むとする。すべてのウサギがこの規則に従い，死ぬということはないとするとき，１年後に何つがいのウサギ

になるか」というものである。nケ月目のつがいの数をa_nとし，この様子を図示すると，



となるから，つがいの数は１ケ月前のつがいの数と２ケ月前のつがいの数の和になるという規則性を示している。この「各項が１つ手前の項と２つ手前の項の和」という規則性は「現世代は２世代前からの影響がある」と最も単純なモデルであり，樹木の枝分かれや細胞分裂の現象などにも表れるという。

その他，初期条件は異なるが，階段の登り方の数の問題，すなわち「階段を１度に１段または２段登ることにしてn段を登る仕方の数」もフィボナッチ数列と同様に考えることができ，授業の話題として，生徒の興味・関心を高めることができる題材である。

なお，一般項にでてくる $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1.61803\cdots$

を黄金数といい，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ の値（黄金比）であり，

これは，方程式 $\alpha^2-\alpha-1=0$ の正の解である。黄金比は，図形的に最も均整のとれた数値であるという話題や正五角形の対角線の長さなどにも言及したい教材である。

【12】 $a_{n+2}=a_{n+1}^{p}\cdot a_n^{q}$ の型

⇒両辺の常用対数などをとると，

$\log_{10}a_{n+2}=p\log_{10}a_{n+1}+qa_n$ から，

$\log_{10}a_n=b_n$とおくと，$b_{n+2}=pb_{n+1}+qb_n$ となり，**【9】**または，**【10】**の型に帰着される。

［問12］　$a_1=2$，$a_2=1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_{n+2}a_n}$

$\boxed{答}$　$a_n=2^{2-n}$

【13】 $\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\end{cases}$ の型（連立型）

⇒第１式からb_nを，a_{n+1}，a_nを用いて表し，第２式に代入，a_{n+2}，a_{n+1}，a_nの漸化式を導いて，**【10】【11】**の型に帰着し，a_nを求めることも出来るが，一般には，$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$の形に変形，数列 $\{a_n+\alpha b_n\}$ が，公比βの等比数列になることを利用，なお，対称型$p=s$，$q=r$の場合は，数列$\{a_n\pm b_n\}$が等比数列になる。

［問13］（1）　$a_1=1$，$b_1=0$

$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$

（2）　$a_1=1$，$b_1=-2$

$a_{n+1}=-2a_n+6b_n$，$b_{n+1}=a_n-b_n$

$\boxed{答}$（1）　$a_n=\dfrac{1}{2}\left(3^{n-1}+1\right)$，$b_n=\dfrac{1}{2}\left(3^{n-1}-1\right)$

（2）　$a_n=3(-4)^{n-1}-2$，$b_n=-(-4)^{n-1}-1$

【14】 $a_{n+2}=f(a_n)$ の型（一つとびの漸化式）

⇒奇数項と偶数項が別系列，場合分けする．

［問14］　$a_1=2$，$a_2=3$，$a_{n+2}=5a_n+4$

$\boxed{答}$　$a_n=\begin{cases}3\cdot 5^{\frac{n-1}{2}}-1 & (n:odd)\\ 4\cdot 5^{\frac{n-2}{2}}-1 & (n:even)\end{cases}$

【15】一般項を求めない極限

⇒ 漸化式から一般項を求めないで，極限を調べる

［問15］　$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$ で表される数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ

$\boxed{答}$　$a_n-3=\sqrt{a_{n-1}+6}-3=\dfrac{a_{n-1}-3}{\sqrt{a_{n-1}+6}+3}$ から

$$|a_n-3|<\frac{1}{3}|a_{n-1}-3|<\cdots<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}|a_1-3|$$

などにより，$\lim_{n\to\infty}a_n=3$ を導く

【漸化式指導のまとめとして】

教科書では，漸化式の有効性を示す例として，直線や円による平面分割の問題等が多く扱われているが，ここでは良く知られている二つの例を取り上げてみよう。

［例1］「ハノイの塔」

３つの場所A，B，Cがあり，Aにn枚の円板が積まれていて，円板は上のものほど小さくなっている。これらのn枚の円板を次の規則にしたがって移動させ，BまたはCのいずれか１か所に積み直すことを考える。

（ⅰ）円板を移動させることができる場所はA，B，Cの３か所だけである。

（ⅱ）一度に１枚の円板だけ動かすことができる。ただし，円板が重なっている場合は一番上のもの以外は動かせない。

（ⅲ）１か所に２枚以上の円板をおくときはかならず積み重ねる。その際，大きい円板を小さい円板の上におくことは出来ない。

いま，Aのn枚の円板をBまたはCのいずれか１か所に積み直すに要する最小の手順をa_nとすると，a_nを求めよ。

［解］まずAの（上方）の$n-1$枚の円板をBの上に移すのにa_{n-1}回かかる。次にAの１番下の円板をCに移すのに１回かかる。次にBの$n-1$枚の円板をCへ移すのにa_{n-1}回かかる。これがちょうどa_n回に等しい。（Aの円板が全部Cに移った）から，

$a_n=a_{n-1}+1+a_{n-1}$　∴ $a_n=2a_{n-1}+1$となり，あきらかに$a_1=1$であるから，【４】の解法にしたがって，$a_n=2^n-1$を得る。

［例2］「完全順列(撹乱順列)」

$1,2,3,\cdots,n$のn個の数を並び替えてできる順列のうち，全ての$i=1,2,3,\cdots$，nに対してi番目がiでない個数a_nを求めよ。（この問題は，たとえばクリスマスパーティーで，各人が持ち寄ったプレゼントを無作為に自由交換するとき，すべての人が自分以外のプレゼントを受け取る場合の数を求めよ。という問題となる。）

［解］１の移動先をiとして２通りの場合を考える。$n\geq 3$として，

（ⅰ）iの移動先が１となる場合。このとき，iの選び方が$n-1$通りあり，１とi以外の$n-2$個の完全順列の数だけあるので，全部で$(n-1)a_{n-2}$通り。

（ⅱ）iの移動先が１以外となる場合。このとき，iの選び方が$n-1$通りで，それぞれに対して１以外の$n-1$個の完全順列の数だけあるので，全部で$(n-1)a_{n-1}$通り。

したがって，$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$

このとき，$a_1=0$，$a_2=1$であることは，あきらかである。この漸化式は，式の形から【6】の(3)の考え方を用いて，漸化式の両辺を$n!$で割ると，

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{n-1}{n!}a_{n-1}+\frac{n-1}{n!}a_{n-2}$$

$$=\frac{n-1}{n}\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n}\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}$$

$\frac{a_n}{n!}=b_n$ とおくと，

$b_n=\frac{n-1}{n}b_{n-1}+\frac{1}{n}b_{n-2}$ より

$$nb_n=(n-1)b_{n-1}+b_{n-2}$$

$$n(b_n-b_{n-1})=(-1)(b_{n-1}-b_{n-2})$$

$$\therefore b_n-b_{n-1}=(\frac{-1}{n})(b_{n-1}-b_{n-2})$$

$b_{n+1}-b_n=c_n$ とおくと，$c_n=\frac{-1}{n+1}c_{n-1}$

ここで，$c_1=b_2-b_1=\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

であるから【3】の（1）の考え方により。

$$c_n=\left(\frac{-1}{n+1}\right)\left(\frac{-1}{n}\right)\cdots\cdots\left(\frac{-1}{3}\right)c_1$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)!}=b_{n+1}-b_n \text{より，}$$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{(k+1)!}\quad(n\geq 2)$$

$$=0+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k!}$$

したがって，$a_n=n!\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k!}\quad(n\geq 2)$

これらの例のように，先に示した漸化式の基本形のもと，様々な現象を漸化式で表し，それを解くことによって現象を捉えることができるという指導価値の高い例は多い。

5　終わりに

「数学的帰納法」や「漸化式」は，数学のいろいろな命題を解決するだけでなく，自然現象や社会現象を説明する上でも重要なテーマでありながら，論理展開の難解性や，その指導に時間がかかることなどから，高等学校で敬遠される分野である。

しかし，その導入から定義や用語を丁寧に指導し，基礎から系統立てて指導することで，生徒にとって理解し難い分野ではなくなる。

数学の論理体系の「美しさ」を紹介できる教材の例として「数学的帰納法」や「漸化式」を数学指導に活かしたい。

［参考文献］

・岩波書店「広辞苑第６版」
・岩波新書　長尾真著「分かるとは何か」
・岩波文庫　バース著「連続性の哲学」
・青林書院　矢野健太郎著「代数学と幾何学」
・岩波書店　松坂和夫著「代数系入門」
・数研出版「チャート式　基礎解析」
・数研出版　教科書「数学Ｂ」
・旺文社「大学入試正解」
・旺文社「高校数学解法事典」