計算機を用いた確率論の応用と教育支援法について

加藤　憲一

1．はじめに

本稿は2016年夏季に神奈川大学で実施した教員免許更新講習における著者の講習の概要をまとめたものである。神奈川大学は主に数学教科の免許所持者を対象として「教具，教材，ＰＣ，アニメを使って，数学から数楽へ～数学教育を考える～」と題した教員免許更新講習を2016年8月18日から20日にかけて実施した。著者は本講習において2コマ分を担当した。講習は確率論の応用として乱数を用いた実験をテーマとし，乱数の検定，待ち行列モデルのシミュレーション，モンテカルロ法による円周率の推定を扱った。講習は計算機演習室で実施し，受講者は資料としてテキストに加えマイクロソフト社のエクセルで作成した教材を配布し，各自演習をおこなっていただくよう工夫した。本稿では講習の概要として第2節で乱数の検定，第3節で待ち行列モデル，第4節でモンテカルロ法について概要を紹介する。また第5節では講習の後に行ったアンケートの集計結果を示し若干の考察を行う。

2．エクセル上での乱数の生成とランダムネスの検定

講習のはじめに乱数の概念について説明し，計算機上で擬似的に乱数を生成する方法を紹介した。具体的にはエクセルに実装されている関数 RAND（）を用いて一様分布に従う擬似乱数（以後，乱数と呼ぶ）を生成する。これを用いて一般的な確率分布関数Fに従う乱数の生成方法を紹介した。ここでは分布を離散的な値をとるものに限定し，具体的には$(0,1)$一様乱数uが与えられたときにさいころを1回ふるときの確率分布関数$F(x)=[x]/6,\ 0\le x\le 1$に対応する擬似乱数を逆関数$F^{-1}(u)$によって生成する方法を紹介した。ところで高等学校の教科書では乱数表について「0から9までの数字を不規則に並べた表」（東京書籍，『数学B』）といった説明がされている。乱数表の不規則性（ランダム性）には異なる項の間での独立性を含むのであるが，しばしば10種類の数が出現する頻度の問題のみに単純化してとらえがちである。そこで講習では乱数の性質を理解するために，数が出現する頻度に加え，隣り合う項の数の独立性の問題を扱った。はじめに以下に示す4つの数の系列

系列1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, …
系列2: 6, 1, 2, 6, 6, 3, 3, 6, 5, 1, 1, 1, 4, 6, …
系列3: 1, 1, 3, 6, 1, 3, 5, 6, 5, 6, 1, 6, 2, 2, …
系列4: 2, 1, 5, 3, 6, 4, 5, 4, 2, 1, 3, 6, 6, 4, …

について考える。上の例では最初の14項を抜き出したが，受講者には各系列とも1200項の数列をエクセル上で提示し，乱数と呼ばれるための条件について各自考えていただいた。ここでは乱数と呼ばれるための条件として(i)ある項に出現する数は他の項に出現する数とは独立

であり，(ii)各項に出現する数の確率分布は同一であること，と定める。その上で(ii)の条件を(ii)′各項の数の確率分布は(1, 6)離散一様分布に従うことと設定して，先に示した系列1, 2, 3, 4が乱数と言えるかどうか統計的検定手法を用いて分析する演習を行った。検定法としてここでは適合度検定および独立性検定による二つの方法を紹介した [2, 3]。上記(i)，(ii)の定義によらずとも，直感的には系列1は乱数とは考えにくいが，適合度検定では棄却されないことに注意する。系列2, 3, 4は上に示した範囲では判別できないが，そのうちのひとつは系列1の6区間毎をランダムに並べ替えたものであり，他の一つは一様性を満たさない分布による乱数系列であり，二つの検定によって(i)および(ii)′のいずれかが棄却されることで判別できる。乱数性の検定は用途に応じてより多面的に検討すべき問題であるが，講習では等確率性と隣り合う数の独立性という最も基本的な性質に関する検定手法を紹介した。

3．リンドレーの等式を用いた待ち行列モデルのシミュレーション

はじめに以下のようなモデルを紹介する。ある店舗に1台設置されているATMコーナーの人の出入りを観察する。このとき客の振る舞いとして以下を仮定する。

1．客は一定の間隔で2単位時間に1人来店する
2．客がATMで処理する時間（サービス時間）は確率2/3で1単位時間，確率1/3で3単位時間を要する
3．先に来た客がまだATMでサービス中のときは待ち行列に並んで待つ

上記のようにサービスや処理を特定の場所（ATM）で一定の順番で行う際に発生する“待ち”をモデル化したものを**待ち行列モデル**と呼ぶ。待ち行列モデルはATMの例に限らず，交通システム，情報通信システムなどの分野で多くの応用例がある。待ち行列モデルは確率モデルの中では題材に身近な事例が想定できるため，教育現場での活用もしやすいと考えて講習の題材に取り上げた。

待ち行列モデルの解析では系内客数やシステムの内部状態等を状態としたマルコフ連鎖を用いて表現するものが多い。本講習ではリンドレーの等式を用いて，マルコフ連鎖の知識を前提とせずに待ち行列の動作が直感的に理解できるように工夫した。ここで①客をサービスする窓口が一つであり，②客は到着した順番にサービスを受けるものとする。また最初の客が到着した時点で他の客はいないと仮定する。これらの仮定の下でn番目に到着した客の待ち時間をW_nとおく。n番目の客と$n+1$番目の客の到着間隔をT_n，n番目の客のサービスに要する時間をS_nとすると客の待ち時間列 $\{W_n, n = 1, 2, \cdots\}$ は漸化式

$$W_{n+1} = max[W_n+S_n-T_n, 0],\ n = 1, 2, \cdots,$$
$$W_1 = 0 \qquad (1)$$

を満たす。ここで$max[a, b]$はa，bのうち大きい数を返す関数とする。式(1)を**リンドレーの等式**と呼ぶ**[1]**。リンドレーの等式は横軸に時間軸をとり，客の到着時点列とサービス時間を適当に設定してグラフを描くことでその成立が容易に理解できる。

演習では式(1)を用いて待ち時間のシミュレーションを行った。客の到着間隔を2単位時間（$T_n = 2$, $n = 1, 2, \cdots$）と固定して，サービス時間をケース1, 2の二つの設定で比較する。ケース1ではサービス時間は確率2/3で1単位時間，確率1/3で3単位時間かかるものとする。ケース2では1単位時間，1単位時間，3単位時間，1単位時間と1, 1, 3, 1, 1, 3, 1, 1, 3, …の順で規則的に並んでいるものとする。後者のケースでは到着間隔，サービス時間ともにランダムネスを持たないため待ち時間列も確定的な数列となる。待ち時間列はリンドレーの等式から容易

に計算することができる。50人の客の待ち時間をシミュレーションした結果を図1に示す。横軸にn，縦軸に待ち時間W_nを折れ線でつないだ。ケース1では実験毎に異なる振る舞いをするので2本のサンプルパス（標本1, 標本2）を示している。

ケース1, 2とも1人の客のサービスに要する時間の期待値（平均サービス時間）は5/3で等しい。到着率（単位時間あたりの到着人数）をサービス率（平均サービス時間の逆数）で除算した値をトラフィック密度と呼ぶが，ケース1, 2のトラフィック密度は5/6で同じ値となる。従ってシステムにかかる平均的な負荷はケース1, 2で同じ条件である。しかし，ケース2の方が待ち時間が小さくなるのは，客の到着に規則性を仮定したためにある種の「ばらつき」（不規則性）が抑制されて平均待ち時間を減少させることによる。一般に客の到着間隔やサービス時間に不規則性が加わると客全体での待ち時間の総和は大きくなり，待ち時間の平均値も大きくなる。従って不規則性は待ち行列の性能を低下させる。この教材から待ち行列のこのような一般的性質が理解できる。

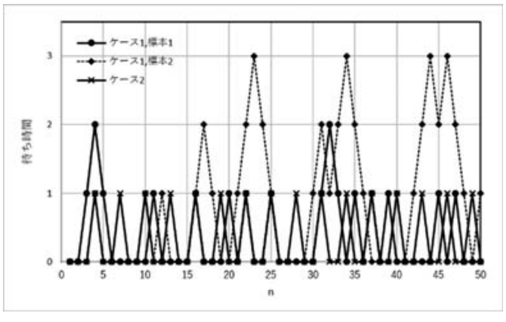

図1. リンドレーの等式による待ち時間のシミュレーション.

サービス施設としての待ち行列モデルの評価尺度は待ち時間だけではない。講習ではシステムの公平性についてもあわせて考察した。例えばケース2ではサービスに3単位時間要する客の直後に到着した客は必ず1単位時間待つことになり，逆に3単位時間を要する客は常に待ち時間が0となる。従ってケース2ではより多くのサービス時間を要求する客が待ち時間を少なくできるシステムであり，不公平と考えることもできる。リンドレーの等式は単一窓口，先着順などの制約を行うものの，待ち時間の具体的な計算手順を与える点でもっと知られて良い公式であると考える。

4．モンテカルロ法を用いた円周率の推定

乱数を用いる教材の一例としてモンテカルロ法を紹介した。2次元平面上の領域Sが領域Dに包含されるとき，領域Dに一様に分布するランダムな点をn個生成する。点が領域Sの内部にある個数を確率変数Xとするとき期待値は

$$\mathrm{E}[X] = n|S|/|D| \qquad (2)$$

となる。ここで$|S|,|D|$はそれぞれ領域S, Dの面積を表す。いま領域Sの面積が未知であるとする。このとき領域Dを領域Sを包含する矩形領域$D = (a, b) \times (c, d)$とすれば大数の法則から領域Sの面積を推定することができる。また領域上の一様に分布する点は2個の$(0, 1)$一様乱数u_1, u_2を用いて

$$((b-a)\ u_1+a,\ (d-c)\ u_2+c)$$

とすることで容易に生成できる。このような方法で面積を推定する方法を**モンテカルロ法**と呼ぶ。

講習では領域$D = (0, 1) \times (0, 1)$とし，推定する領域として半径1の1/4円の内部領域

$$S_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1,\ x, y > 0\}$$

を用いた。この領域の面積は$\pi/4$である。そこでこの問題は式(2)を変形した

$$\pi = 4\mathrm{E}\,[X]\,/n$$

を用いることで円周率を推定する実験に用いることができる。さらに比較のため2つの領域

$$S_2 = S_1 \cap R_{1,1}$$

$$S_3 = S_1 \cap R_{1,1} \cap R_{0,1} \cap R_{1,0}$$

を考えて推定精度を比較した。ここで$\mathrm{R}_{a,b}$は点(a, b)を中心とした半径1の円の内部領域とす

る。このとき領域S_2, S_3の面積はそれぞれ$\pi/2-1$, $1-\sqrt{3}+\pi/3$となるので，同様にこの面積をモンテカルロ法で推定することで円周率を推定できる。図2，図3に領域S_1, S_2を示した。モンテカルロ法で円周率を推定する実験を$n = 1000$まで行い推定値の変化を観察した。領域S_1を用いた実験の5本のサンプルを比較したものを図4に示す。

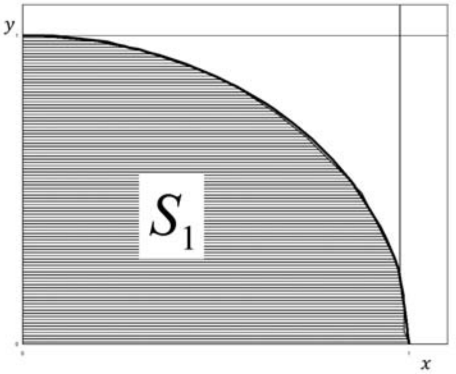

図2. 領域S_1.

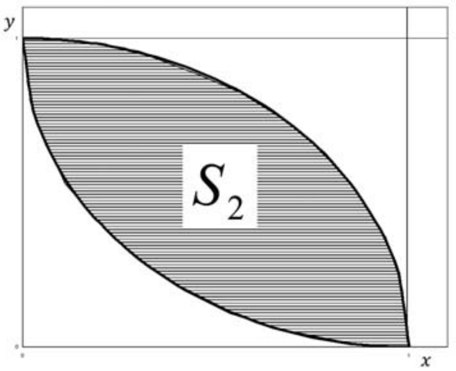

図3. 領域S_2.

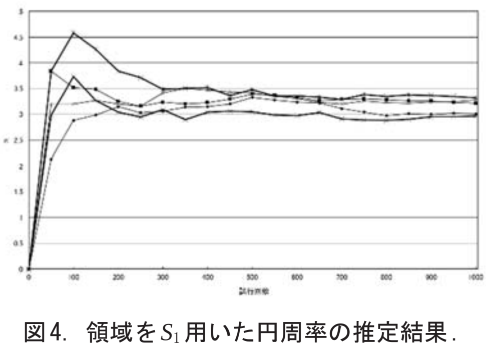

図4. 領域をS_1用いた円周率の推定結果.

5．まとめ

講習の最後にアンケートを実施した。受講者は30名であり，所属の内訳は小学校2名，中学校12名，高等学校15名，不明が１名である。アンケートの回収率は97%であった。アンケートは4つの設問と感想を記述していただく形式をとった。

質問1. エクセルの日常的な使用について
　回答：ある25, ない3 その他1
質問2. 乱数の検定について
　回答：知っていた3, はじめて知った 26
質問3. 待ち行列モデルについて
　回答：知っていた7, はじめて知った22
質問4. 授業で乱数を用いた教材の使用経験
　回答：ある4, ない25

8割を超える受講者がエクセルを日常的に使用している。今回はエクセルの操作法について特に時間を割り当てなかったが概ね講習の受講に支障はなかったと思われる。一方で不慣れな受講者もいたと考えられるので，今後は補助要員を確保するなどの対策が必要となるだろう。乱数および待ち行列については相当数の受講者にとって新しい内容を扱ったものとなっている。待ち行列モデルについてあらかじめ知っていた受講者がやや多いが，情報系の学科出身の受講者がおられたことも影響していると思われる。中学・高等学校の教科に関連しつつ，比較的馴染みのないテーマを扱うという講習の目的はある程度達成されたものと考えられる。ただ自由記述では講習の内容については難しいという意見が多く見られたので，限られた時間であるがより理解しやすいように改善することが今後の課題である。

謝辞

アンケート記入にご協力いただいた受講者の方々，講習の実施にあたりご支援いただきました神奈川大学教職員の皆様に謝意を表します。

【参考文献】

1 大野勝久，逆瀬川浩孝，中出康一，『 Excel で学ぶオペ レーションズ・リサーチ』，2014 年，近代科学社.
2 薩摩順吉，『確率・統計』，1989 年，岩波書店.
3 平岡和幸ほか，『プログラミングのための確率・統計』，2009 年，オーム社.