

高等学校「確率」の「排反と独立」の指導 についての考察

榎本 里志

1. はじめに

現行の高等学校では、確率は「数学A」の「場合の数と確率」で、

(ア) 確率とその基本的な法則

(イ) 独立な試行と確率

(ウ) 条件付き確率

を扱い、「数学B」で、「確率分布と統計的な推測」を扱っている。

確率の指導において、「試行、事象、排反、独立」などの定義を理解させることは不可欠なことである。しかし、この中で「排反と独立」については、生徒の理解度が低く、これらを混同している例が多い。

教科書では、「事象」という確率の用語を学んだのち、ベン図を用いて視覚的な解説のもと、「排反事象」や「余事象」などを学ぶ。

その後、「2つの試行が互いに他方に影響を及ぼさないとき、これらの試行は独立である」という「試行の独立」を学び、続いて、独立な試行の代表例として、同じ試行を繰り返す「反復試行の確率」を学ぶ構成になっている。

そして、「条件付き確率」を学び、ここで乗法定理を学ぶことになる。

平成11年告示の学習指導要領では、「数学A」の「場合の数と確率」で「独立な試行と確率」まで扱い、「条件付き確率」は「数学C」の「確立分布」の「確率の計算」の中で扱うことになってた上に、「数学A」の学習指導要領には、「内容の取り扱いの中」で「ただし、事象の独立・

従属は扱わない」として記載されていたこともあり、「試行の独立」と「事象の独立」の両方を学ぶ生徒は限られていた。これに対して、現行の学習指導要領では、「数学A」で「条件付き確率」を学ぶことから、ここで「事象の独立」まで扱う可能性もあり、改めてその指導法について振り返ってみた。

2. 「排反」と「独立」

● 反省

「排反」と「独立」の理解度を低くする要因の一つに、それらの説明を「2つの事象が同時に起こらないのが排反で、2つの事象がお互いに影響を与えないのが独立」と簡単に解説をしてしまうことにあったということを、これまでの指導の場面をふりかえって反省している。

実際、この解説では、「同時に起こらないということはお互いに影響を与えないことだから、事象の排反と事象の独立は同じもの」との誤解を生徒が招いてしまったことがある。

しかも、このような安直な説明でも「試行の独立」までなら、とくに支障もなかったことで、生徒は理解できていると思ってしまったことが問題であった。

数学の定義を、できるだけ理解しやすいようにと、日常会話の感覚で表現して解説すると思われ誤解を招くことになった苦い経験である。

数学の定義を如何に正確に理解させるかの重要性は、指導者の力量が問われる部分である。

この「排反と独立」について、あらためて、その定義から振り返ってみる。

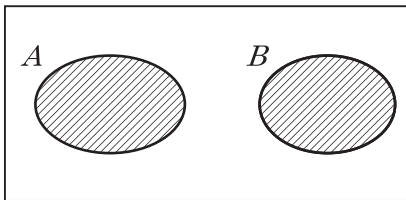
● 定義の確認

「事象の排反」は、「ある試行において一方の事象が起こったときに他方の事象は決して起こらない」ことであり、「試行の独立」は、「2つの試行が互いに影響を及ぼさない」ことであり、「ある試行が他の試行とお互い影響しない」ということである。

これに対して「事象の独立」は「試行の結果として、起こりうる事象がお互いの起こり方が他方に影響を与えないということで、どちらも起こっている」ことが前提になっている背景を説明することが指導のポイントになる。

このような背景を説明しても、「事象の排反と事象の独立」を混同している生徒は多いことから、再度確認してみよう。

「事象 A と B が排反である」ということは、図のようにベン図で説明することができる。



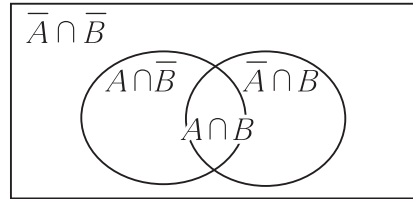
これら位置関係、すなわち、 $A \cap B = \phi$ であることは理解させることは容易である。

これに対して「事象の独立」がこのような位置関係でなく、 $A \cap B \neq \phi$ であることが前提となっていることから説明する必要がある。

「事象の独立」を説明するためには「条件付き確率」から定義しなくてはならない。

すなわち、事象 A が起こったときの事象 B が起こる確率を条件付き確率といい、 $P_A(B)$ で表す。(専門書では、 $P(B|A)$ と表す場合が多いが、高等学校では、事象 A, B の関係に混乱しないように教科書では $P_A(B)$ と表しているの、この拙文でもその記法にしたがう。)

$P_A(B)$ の表す意味を考えてみるため、次のような図を利用する。



ここで、各事象に含まれる個数について、 $n(A \cap \bar{B}) = a$, $n(\bar{A} \cap B) = b$, $n(A \cap B) = c$, $n(\bar{A} \cap \bar{B}) = d$ とすると、 $P_A(B) = \frac{c}{a+c}$ である。

このとき、 $P(A) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$ であり、

$P(A \cap B) = \frac{c}{a+b+c+d}$ であるから、

$$P_A(B) = \frac{c}{a+c} = \frac{\frac{c}{a+b+c+d}}{\frac{a+c}{a+b+c+d}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

すなわち、乗法定理 $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ が成り立つことを示すことができる。

さらに、事象 A と B が独立であるとは、事象 A の起こり方に関係なく事象 B が起こることであり、 $P_A(B) = P(B)$ が成り立つ場合である。すなわち、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ となる場合である。このとき

$$\frac{c}{a+b+c+d} = \frac{a+c}{a+b+c+d} \cdot \frac{b+c}{a+b+c+d}$$

であるから、

$$c(a+b+c+d) = (a+c)(b+c) \text{ より、}$$

$$ca + cb + c^2 + cd = ab + ac + cb + c^2$$

すなわち、 $cd = ab$ が成り立つ。

ここで、 $c=0$ とすると、 $a=0$ または $b=0$ となって、事象 A か B のどちらかが存在しないことになる。

したがって、 $c \neq 0$ すなわち、 $A \cap B \neq \phi$ であることが確認できる。

事象 A と B が独立でないとき、事象 A と B は従属であるという。

「2つの事象 A, B が互いに独立ならば、それら余事象 \bar{A}, \bar{B} も独立である」このことは次のようにして示すことができる。

事象 A, B が互いに独立であるから

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ が成り立つ。}$$

このとき、確率の加法定理

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ により、

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= (1 - P(A))(1 - P(B))$$

$= P(\overline{A})P(\overline{B})$ となり、事象 \overline{A} , \overline{B} も独立であることが証明される。

この証明には、確率の加法定理や、

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

余事象の確率 $P(\overline{C}) = 1 - P(C)$

の性質などを用いており、確率や集合の性質を再確認させる上でも有用ではなかろうか。

● 試行の独立と事象の独立

独立な試行 T_1 , T_2 を続けて行うとき、試行 T_1 で事象 A が起こり、試行 T_2 で事象 B が起こる確率 $P(A \cap B)$ は、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ で得られる。これは事象 A と B が独立であることを意味する。

事象の独立・従属について[例]を通して確認してみよう。

[例1] ジョーカーを除いた52枚のトランプから、1枚のカードを引くとき、

事象 A を、エースを引く

事象 B を、絵札を引く

事象 C を、ハートのカードを引く

事象 D を、赤色のカードを引く

とすると、それぞれの事象同士の独立、従属を調べてみると、 $A \cap B = \phi$ であるから、事象 A , B は独立とはならない。本来、二つの事象の独立・従属を考えるには、それらが排反でない場合をもとにするので、独立・従属の区別をすることは適当ではないと思われるが、あえて、区別するなら事象 A と B は従属となる。

事象 A と C , A と D , B と C , B と D , C と D については、 $A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$, $B \cap D \neq \phi$, $C \cap D \neq \phi$ であるから、これらは独立となる可能性がある。

$$P(A) = \frac{4}{52}, P(B) = \frac{12}{52}, P(C) = \frac{13}{52}, P(D) = \frac{26}{52}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{52}, P(A \cap D) = \frac{2}{52}, P(B \cap C) = \frac{3}{52}$$

$$P(B \cap D) = \frac{6}{52}, P(C \cap D) = \frac{13}{52} \text{ であるから,}$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{52}$$

$$P(A \cap D) = P(A)P(D) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{3}{52}$$

$$P(B \cap D) = P(B)P(D) = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$$

$$P(C \cap D) = \frac{1}{4}, P(C)P(D) = \frac{1}{8} \text{ より.}$$

$P(C \cap D) \neq P(C)P(D)$ となるから、

事象 A と C , A と D , B と C , B と D は独立であり、事象 C と D は従属であることが確認することができる。

ところで、事象 A と B が独立であるとき、事象 $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ に含まれる要素の個数 a, b, c, d には、 $cd = ab$ すなわち、 $\frac{c}{b} = \frac{a}{d}$ の関係があるから、下の図（カルノー図という）で示した四つの部分 $A \cap B$ と $\overline{A} \cap \overline{B}$ の面積比が $A \cap B$ と $\overline{A} \cap \overline{B}$ の面積比に等しいときであるということが出来る。

	B	\overline{B}
A	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$
\overline{A}	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

3つ以上の事象の独立性に関しても、「試行の結果として、起こりうる事象がお互いの起こり方が他方に影響を与えないという」定義は同様である。

たとえば、3つの事象 A , B , C が互いに独立であるとは、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(C \cap A) = P(C)P(A)$$

$$\text{及び, } P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

の4つの関係が成り立つ場合である。

とくに、最後の式があれば、前者3式は不要、あるいは、前者3つの式があれば最後の式は不要のような錯覚に陥るが、次のような例をみれ

ば、これらの4つの式の意味が理解できる。

[例2] 1から4までの番号が書いてあるカードが入っている袋から1枚のカードを引くとき、

事象 A を1または2が出るという事象

事象 B を2または3が出るという事象

事象 C を1または3が出るという事象

とすると、 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ であり、

$$P(A \cap B)=P(B \cap C)=P(C \cap A)=\frac{1}{4}$$

であるから、前者3式は成り立つ。しかし、

$$P(A \cap B \cap C)=0, P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$$

となり、第4式は成り立たない。すなわち、この例では、事象 A, B, C は独立でない。

[例3] 1枚の硬貨を3回投げて、表・裏を考える。

事象 A を1回目表である、事象 B を2回目表、事象 C を3回目表であるという事象とする。このとき、例えば、1回目表、2回目裏、3回目表の場合を(H, T, H)のように表すと、

$$A=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$$

$$B=\{(H,H,H), (H,H,T), (T,H,H), (T,H,T)\}$$

$$C=\{(H,H,H), (T,H,H), (H,T,H), (T,T,H)\}$$

$$A \cap B=\{(H,H,H), (H,H,T)\}$$

$$B \cap C=\{(H,H,H), (T,H,H)\}$$

$$C \cap A=\{(H,H,H), (H,T,H)\}$$

$$A \cap B \cap C=\{(H,H,H)\} \text{ となるから、}$$

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B)=P(B \cap C)=P(C \cap A)=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B \cap C)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8} \text{ であり、4式が全て成り立ち、}$$

事象 A, B, C が独立であることが確認される。

なお、一般に、事象 A_1, A_2, \dots, A_n が独立であることの定義は、その任意の有限部分系列 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ に対して、

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n})=P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_n})$$

が成り立つ場合になる。

3 条件付き確率からベイズの定理へ

高等学校で学んだ「条件付き確率」は、確率論では「ベイズの定理」に発展していく。

すなわち、事象 B は、互いに排反な事象 A_1, A_2, \dots, A_n のどれかが起こったときに、初めて起こるものとする。ただし、 $\sum_{k=1}^n P(A_k)=1$ とする。

このとき、 $P(A_k \cap B)=P(A_k)P_{A_k}(B)$ であり、 $P(B)=P(A_1 \cap B)+P(A_2 \cap B)+\dots+P(A_n \cap B)$ であるから、

$$P(B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\dots+P(A_n)P_{A_n}(B)$$

したがって、

$$\begin{aligned} P_B(A_k) &= \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\dots+P(A_n)P_{A_n}(B)} \end{aligned}$$

が導かれる。

ベイズの定理を例を通して確認してみよう。

[例4] 機械 A, B, C がそれぞれ製品全体の25%, 35%, 40%を生産する。また、 A, B, C の各機械から生産される製品のうち、それぞれ、5%, 4%, 2%の割合で不良品であることが経験的に知られている。いま製品全体の中から無作為に1個取り出したとき、それが不良品であった。これが、 A の機械から生産されたものである確率を求めてみる。

取り出した1個が A, B, C の各機械で作られたものであるという事象をそれぞれ、 F, G, H で表すとし、この取り出したものが不良品であるという事象を E で表わせば、

$$P(F)=0.25, P(G)=0.35, P(H)=0.40$$

$$P_F(E)=0.05, P_G(E)=0.04, P_H(E)=0.02$$

であると考えられ、事象 F, G, H は排反で、 $F \cup G \cup H = \text{全事象}$ であるから、ベイズの定理より、

$$P_E(F) = \frac{P(F)P_F(E)}{P(F)P_F(E) + P(G)P_G(E) + P(H)P_H(E)}$$

$$= \frac{0.25 \times 0.05}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02}$$

$$= \frac{0.0125}{0.0345} = \frac{25}{69} \text{ となる。}$$

同様に、 B , C の機械から生産されたものである確率は、それぞれ $\frac{28}{69}$, $\frac{16}{69}$ となる。

4. 「条件付き確率」代表的な問題

条件付き確率に関して、授業で扱ったいくつかの代表的な問題について触れておこう。

[問1] コインを投げて表がでるか、裏がでるかを観測する試行を行う。コインを1回投げて表がでる確率を p , 裏がでる確率を $1-p$ ($0 < p < 1$) とする。この試行を3回行うとき、事象 A , B を

$A = \{3\text{回のうち}2\text{回以上裏がでる}\}$

$B = \{3\text{回の観測結果がすべて同じである}\}$

と定める。

- (1) 事象 A , B の確率 $P(A)$, $P(B)$ を求めよ。
- (2) $A \cap B$ はどんな事象か。また $A \cap B$ の確率 $P(A \cap B)$ を求めよ。
- (3) 事象 A と事象 B が独立になるのは、 p がどんな値のときか。(弘前大)

[問2] ある町の住人を任意に3人選んで1, 2, 3と番号をつけ、それぞれの人の生まれた曜日を調べる。ただし、町の人口は十分多く、その中でどの曜日に生まれた人も同じ割合でいるとする。3人のうち少なくとも2人が同じ曜日生まれであるという事象を A , 1番の人が日曜日生まれであるという事象を B , また3人全員が同じ曜日生まれであるという事象を C とする。

- (1) 事象 A 確率を求めよ。
- (2) 事象 A と B とは独立であることを示せ。

(3) 事象 C が起こらないことがあらかじめわかったときの事象 A の条件つき確率を求めよ。(筑波大)

[問3] 5回に1回の割合で帽子を忘れるくせのある K 君が、正月に A , B , C 3軒を順に年始回りをして家に帰ったとき、帽子を忘れてきたことに気がついた。2軒目の家 B に忘れてきた確率を求めよ。(早大)

[問4] ジョーカーを除いたトランプ52枚の中から1枚のカードを抜き出し、表を見ないで箱の中にしまった。

そして、残りのカードをよく切ってから3枚抜き出したところ、3枚ともがダイヤであった。このとき、箱の中のカードがダイヤである確率はいくらか。

[問5] (3囚人問題) ある監獄に3人の囚人 X , Y , Z がいて、皆同じ日に処刑される予定だった。ところがある日、3人の内1人だけに恩赦が出て、その囚人は処刑を免れることになった。ただし、自分の運命を確定できる情報を囚人自身に与えてはいけない、という決まりである。

そこで囚人 X は、恩赦は誰なのかを知っている看守に頼んだ。「誰が恩赦されようとも、俺以外の2人の内少なくとも1人は処刑されるはずだ。だから、その1人でいいから教えてくれ。そうしたって、俺がどうなるか、確実なところが俺に分かってしまう訳でもなかろう？」すると看守は「 Y は処刑される」と教えてくれた。囚人 X は「これで助かる確率が $\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{2}$ に上がった」と喜んだのだが、

囚人 X が助かる確率は本当に上がったのだろうか？

[問6] (モンテ・ホールの問題) 3つのドアがあり、1つには景品が入っているが、2つはハ

ズレである。あなたは、ドアの向こうに何かあるかわからないが、景品のドアを引き当てるとその景品がもらえるが、ハズレだと何ももらえない。あなたが、ドアを選んだ後、ドアの向こうに何かあるのか分かる司会者が残り2つのドアのうちハズレのドアを1つ開けた。そして、「今あなたは自分で選んだドアと残っている開けられていないドアを交換しても良い」と言われました。あなたは交換すべきでしょうか。

【略解】[問1] (1)

$$P(A) = {}_3C_2(1-p)^2p + (1-p)^3 \\ = (1-p)^2(2p+1)$$

$$P(B) = p^3 + (1-p)^3 = 1 - 3p + 3p^2$$

(2) 事象 $A \cap B$ は3回とも裏という事象だから、 $P(A \cap B) = (1-p)^3$

(3) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ より、
 $(1-p)^3 = (1-p)^2(2p+1) \cdot (1-3p+3p^2)$

$$0 < p < 1 \text{ より、これを解いて、} p = \frac{1}{2}$$

[問2] (1) 3人が異なる誕生日となる事象の余

$$\text{事象であるから、} P(A) = 1 - \frac{{}_7P_3}{7^3} = \frac{19}{49}$$

(2) 事象 $A \cap B$ は、

(i) 2, 3とも日曜生まれ、

(ii) 2か3が日曜生まれ、

(iii) 2と3が日曜以外の同じ曜日生まれの場合があるから、

$$P(A \cap B) = \frac{1 + 2 \times 6 + 6}{7^3} = \frac{19}{7^3}$$

また、 $P(B) = \frac{1}{7}$ であるから。

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ が成り立つ。}$$

したがって、事象 A と B は独立である。

(3) $P_{\bar{C}}(A)$ を求めることになる。

$$P(\bar{C}) = 1 - \frac{7}{7^3} = \frac{48}{49}$$

事象 $\bar{C} \cap A$ は、3人全員が同じ曜日生まれ

でなく、2人が同じ曜日生まれの場合であるから、

$$P(\bar{C} \cap A) = \frac{{}_3C_2 \times 7 \times 6}{7^3} = \frac{18}{49}$$

$$\text{したがって、} P_{\bar{C}}(A) = \frac{P(\bar{C} \cap A)}{P(\bar{C})} = \frac{\frac{18}{49}}{\frac{48}{49}} = \frac{3}{8}$$

[問3] 帽子を忘れるという事象を E 、

2軒目の家に忘れるという事象を F とすると、

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}}{\frac{20}{61}} = \frac{20}{61}$$

[補足] この問題は、次のような一般的な問題としてよく授業で利用させて戴いた。

「 n 個の生産過程があるラインで、不良品を出す確率がすべて p ($0 < p < 1$) であるとする。ある製品が不良品であることがわかったとき、どの生産過程からチェックするのが合理的であるか」

[問3]の解答と同様に、

不良品が出るという事象を E

k 番目の過程で不良品が出るという事象を F_k とすると、

$$\begin{aligned} P_E(E \cap F_k) &= \frac{P(E \cap F_k)}{P(E)} \\ &= \frac{(1-p)^{k-1}p}{p + (1-p)p + (1-p)^2p + \cdots + (1-p)^{k-1}p} \\ &= \frac{(1-p)^{k-1}}{1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^{k-1}} \\ &= \frac{(1-p)^{k-1}}{\frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)}} = \frac{(1-p)^{k-1}p}{1 - (1-p)^n} \end{aligned}$$

となる。ここで、分母の $1 - (1-p)^n$ は一定、分子 $(1-p)^{k-1}p$ は、 k についての減少関数である。したがって、不良品の出る確率は過程を経ることに少なくなることから、最初の過程から調べることが合理的である。

忘れ物を探すとき、捜査がつまったときの行動のヒントとして、どう行動したら良いかを数

学的に示すことで生徒の確率への興味・関心を育てる例題として、[問3]は教科書の例題で扱ってもよい良問ではないかと思う。

[問4] 3枚ともがダイヤであるという事象を E ，箱の中のカードがダイヤであるという事象を F とすると、

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} C_3}{\frac{39}{52} \times \frac{13}{51} C_3 + \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} C_3} = \frac{10}{49}$$

[問5] 囚人 X が恩赦となる事象を E_1 ，囚人 Y が恩赦となる事象を E_2 ，囚人 Z が恩赦となる事象を E_3 とし、囚人 X が聞いたとき「囚人 Y が死刑になると看守が述べる」という事象を F とすると、ベイズの定理より、

$$\begin{aligned} P_F(E_1) &= \frac{P(F \cap E_1)}{P(F)} \\ &= \frac{P(E_1)P_{E_1}(F)}{P(E_1)P_{E_1}(F) + P(E_2)P_{E_2}(F) + P(E_3)P_{E_3}(F)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

したがって、囚人 X が恩赦される確率は変わらない。

[問6] 3つのドアを A ， B ， C とする。

ここで、回答者が A のドアを引いたときこれが当たりである確率を $P(A)$ とすると

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

司会者が B のドアを開ける確率を $P(B)$ ， C のドアが当たりの確率を $P(C)$ とする。

A のドアが当たりの場合に司会者が B のドアを開ける確率 $P_A(B)$ は、 $P_A(B) = \frac{1}{2}$

C のドアが当たりの場合に司会者が B のドアを開ける確率 $P_C(B)$ は、必ずはずれの場合であるから、 $P_C(B) = 1$

司会者が B のドアを開けたときに C のドア

が当たり（回答者がドアを選び直すとした場合）の確率を $P_B(C)$ は、ベイズの定理から

$$\begin{aligned} P_B(C) &= \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{P_C(B)P(C)}{P_A(B)P(A) + P_C(B)P(C)} \\ &= \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となるから、選び直した方が確率は2倍になる。

[補足] この問題は、次のように簡単に説明もできる。

回答者が選んだ扉を A ，司会者が開けた扉を B として、もう一つの扉を C とする。

扉 A が当たりの確率は $\frac{1}{3}$ である。司会者が

扉 B を開けたのだから、扉 B が当たりである確率は0である。扉 A ， B ， C のどれかが当たりなのだから、扉 C 当たりである確率は、

$1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$ となり、選び直した方が確率は2倍になる。

[注] この問題は、アメリカのクイズ番組の司会者モンテホールの番組中のやりとりによって由来するもののようです。

5 終わりに

高等学校の数学教材の中で「確率」は、生徒の得手・不得手にも他の分野と異なる傾向があり、解析系や幾何系の分野とは異なった感覚に新鮮さを感じる生徒も多い。

日常生活との関連も深く、興味ある話題の提供や生徒が納得できる解説により、生徒の興味・関心を育てるとともに、数学という学問の専門分野の一つとしての指導に心がけたい。

多分野と同様に、その分野のスタートとなる「定義」を、天下り式に、形式的な指導とならないよう、「どうしてそうすると合理的であるか」等、生徒の素直な疑問に対し、「定義する」ことの必然性も大切に指導しなくてはならない。

数学という学問の合理性，発展性，ときには
神秘性をどう指導するか，数学科教員の楽しみ
は尽きない。

【参考文献】

- ・平成11年3月告示高等学校学習指導要領
- ・平成21年3月告示高等学校学習指導要領
- ・初等確率論（国沢，羽鳥共著：培風館）
- ・確率と統計解析（遠藤著：槇書店）
- ・数学A，数学B：数研出版（平成24年検定）
- ・数学C：旺文社（平成15年検定）