高等学校学習指導要領と大学受験指導

榎本　里志

1．はじめに

平成11年（1999年）告示の高等学校学習指導要領では，数学Ⅰの学習項目の一つである三角比では，「三角形の面積をヘロンの公式で求めるなどの深入りしないものとする」と明示されており，教科書には記載されていなかった。

ところが，平成21年（2009年）告示，24年度（2012年）から実施されている現行の学習指導要領では，この足かせが外れ，多くの高校生が学ぶようになった。

大学入試において，ヘロンの公式のように，一時的に，学習指導要領から外されたり，制約がなくなったりするようなものでは，その公式を用いて解答しても特に問題ないと思われるが，あきらかに学習指導要領の範囲を超える定理や性質を使って解答することは，少なからず議論のおこる問題である。

大学入試では，学習指導要領の範囲を超える定理や性質を用いて解答すると比較的容易に解答できる問題もあり，受験生にとっては常識とされているいくつかの公式とその指導上の問題点について考えてみた。

2．ヘロンの公式とブラーマグプタの公式

前述したように，

［ヘロンの公式］三辺の長さがa, b, cの三角形ABCの面積Sは，$2s=a+b+c$とすると，

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

を用いないと，続く設問への対応に苦労することも多く，受験生にとっては必須の公式である。実際の出題例をみてみよう。

（2013年南山大学より）

［例1］　3辺の長さがそれぞれ，$1, x, 2\text{-}x$ $\left(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right)$の三角形がある。この三角形の面積$S$を$x$で表すと，$S=\square$であり，$S\geqq\frac{\sqrt{2}}{4}$となる$x$の値の範囲を求めると，□である。

［解答例］$2s=1+x+2-x$より，$s=\frac{3}{2}$であるから，ヘロンの公式により，

$$S=\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-x\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{-4x^2+8x-3}$$

また，$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{-4x^2+8x-3}\geqq\frac{\sqrt{2}}{4}$となるとき，

$3(-4x^2+8x-3)\geqq 2$より，これを解いて，

$$\frac{6-\sqrt{3}}{6}\leqq x\leqq\frac{6+\sqrt{3}}{6}$$

（これは，三角形ができるための条件$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

を満たしている）

この例のように，面積Sを，ヘロンの公式を用いないと，続く設問への対応に苦慮するだろうが，2013年に受験した生徒の多くは，ヘロンの公式を学んでいない可能性が高い。実際に，この設問の正答率は知るよしもないが，学習指導要領に沿った授業をうけてきた生徒には，厳しい問題であったと思われる。

ヘロンの公式を受験生の必須公式とせず，余弦定理から，角Aの余弦（cos）の値を求めさせてから，三角形の面積を求めるよう誘導になっている場合も多い。

（2013年金沢工業大学より）

［例2］　△ABCにおいてAB＝4，BC＝9，CA＝7であるとき，cos$A$＝□である。また，△ABCの面積は□である。

［解答例］余弦定理より，

$$\cos A = \frac{7^2+4^2-9^2}{2\cdot 7\cdot 4} = -\frac{2}{7}$$

$\sin A > 0$であるから，$\sin A = \sqrt{1-\left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

したがって，△ABCの面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 4\cdot \frac{3\sqrt{5}}{7} = 6\sqrt{5}$$

［例2］のように，その年度に受験する生徒の状況を踏まえた出題がされる場合は問題ないが，受験というシビアな場面におかれた生徒に対して，高等学校の指導のあり方を考えさせられる二つの例である。

ヘロンの公式は，その公式を適用して面積を求めるだけのものとしてだけでなく，その公式を導く過程で，次のような関係式も得られ，受験に必須な定理の指導に終わることなく，式の美しさを紹介する上でも，無駄なことではないと思う。

三辺の長さがa, b, cの三角形ABCの面積Sは，
$2s = a+b+c$とすると，

$$16S^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 2\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

円に内接する四角形の面積を求める問題にも同様な定理があることを指導する学校も多い。

［例3］　円に内接する四角形ABCDの各辺の長さが，AB＝5，BC＝3，CD＝2，DA＝3のとき，四角形ABCDの面積を求めよ。

という問題で，

［ブラーマグプタの公式］　円に内接する四角形ABCDの各辺の長さがa，b，c，dであるとき，四角形ABCDの面積Sは，
$2s = a+b+c+d$ とすると，

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

を用いると，

［解答例］$s = 5+3+2+3$ より，$s = \frac{13}{2}$であるから，四角形ABCDの面積は，

$$\sqrt{\left(\frac{13}{2}-5\right)\left(\frac{13}{2}-3\right)\left(\frac{13}{2}-2\right)\left(\frac{13}{2}-3\right)} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

ということになるが，この種の問題は，大学入学センター試験等にもよく出題されており，解法が誘導される場合が多い。大学入試センター試験2011年度数学ⅠAの第三問では次のように出題された。

［例4］点Oを中心とする円Oの円周上に4点A,B,C,Dがこの順にある。四角形ABCDの辺の長さは，それぞれ
AB＝$\sqrt{7}$，BC＝$2\sqrt{7}$，CD＝$\sqrt{3}$，DA＝$2\sqrt{3}$
であるとする。

（1）∠ABC＝θ,AC＝xとおくと，△ABCに着目して，$x^2 = \boxed{アイ} - 28\cos\theta$　となる。
また，△ACDに着目して
$x^2 = 15 + \boxed{ウエ}\cos\theta$　となる。
よって，$\cos\theta = \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$x = \sqrt{\boxed{キク}}$ であり，

円Oの半径は$\boxed{\sqrt{ケ}}$である。

また，四角形ABCDの面積は$\boxed{コ\sqrt{サ}}$である。

誘導に従って解答することになる。
[解答例] 円に内接する四角形で，∠ABC＝θ，AC＝xとおくと，∠CDA＝180°－θであるから，

$\cos\angle ABC=\cos\theta$

$\cos\angle CDA=\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

△ABCと△ACDに余弦定理使って

$x^2=BC^2+AB^2-2BC\cdot AB\cos\theta$ …①

すなわち，$x^2=28+7-28\cos\theta$

$x^2=CD^2+DA^2-2CD\cdot DA(-\cos\theta)$

すなわち，$x^2=3+12-12(-\cos\theta)$ …②

①，②より，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$x=\sqrt{21}$

さらに，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$より$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であるから，円Oの半径を$R$とすると，正弦定理により，

$\dfrac{AC}{\sin\theta}=2R$ より，$R=\dfrac{AC}{2\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}=\sqrt{7}$

さらに，$\sin\angle ABC=\sin\theta$

$\sin\angle CDA=\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ であるから，四角形ABCDの面積は，

△ABCと△ADCの面積の和より，

$\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC+\dfrac{1}{2}AD\cdot DC\sin\angle ADC$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

本問では，最後の設問に対して，ブラーマグプタの公式の利用が考えられるが，[例4]のように，円に内接する四角形の面積だけを求めさせるような出題例は少ないと思う。

大学入試ではないが，2013年度の神奈川県教員採用試験には，次のような出題例がある。

> 円に内接する四角形ABCDがある。
> AB=$\sqrt{6}$，BC=1，CD=3，DA=$\sqrt{6}$のとき，
> 四角形ABCDの面積は[　]である。
> ① $2\sqrt{2}$　② $3\sqrt{2}$　③ $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$　④ $2\sqrt{5}$
> ⑤ $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$　⑥ $3\sqrt{6}$

公式を知っていれば数秒で④の$2\sqrt{5}$を得られる問題であるが，先生を目ざす人はどう解答しただろうか。そして出題の意図は，

学習指導要領の範囲外の公式であるが，ヘロンの公式が，ブラーマグプタの公式の特別な場合として得ることができることを紹介することは，生徒に興味関心を引き出す上でも格好の例ではある。

なお，ブラーマグプタの公式を一般化して，

> [ブレートシュナイダーの公式]
> 四角形ABCDの各辺の長さをa，b，c，dとし，∠BAD+∠BCD＝θ，$2s=a+b+c+d$とすると，四角形ABCDの面積Sは，
> $$S=\frac{1}{2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

であることなどを紹介するだけの時間的な余裕を生み出すことは，高等学校では難しいことと思う。

三角形や四角形の面積には，他にも

> 三辺の長さがa,b,cの三角形ABCの外接円の半径の長さをR，内接円の半径の長さをr
> $2s=a+b+c$面積をSとすると，
> $$S=\frac{abc}{4R}=rs$$

や，

> 座標平面上の点O（0,0），A（x_1,y_1），B(x_2, y_2)を頂点とする三角形OABの面積Sは
> $$S=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$$

ベクトルや複素数では，

> $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，三角形OAB面積$S$は，
> $$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

> 複素数α,βに対する点A（α），B（β）と原点Oでつくられる三角形OABの面積Sは

$$S=\frac{1}{4}\left|\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta\right|=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\alpha\overline{\beta}\right)\right|$$

（Imz は，複素数 z の虚部を表す）

さらに，

二本の対角線の長さが a,b で，それらがなす角を θ とするとき，四角形の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

など，三角形や四角形にまつわる面積公式は様々なものがあり，教科書でも紹介されているものも多い。

これら公式の証明や関係を導くことは，面積を求めるという目的の上にたって数学の様々な関連性を示す上で貴重な題材である。

3．曲線によって囲まれた部分の面積

次に，定積分の面積の応用としてよく出題される例題をみてみよう。

［例5］　直線 $y=kx$ が，放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれる図形の面積を二等分するように定数kの値を求めよ。

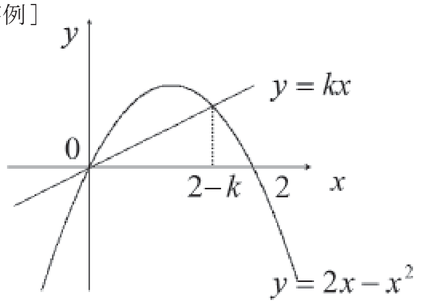
という問題の解法で，

［放物線と直線とで囲まれた部分の面積］
放物線$y=ax^2+bx+c$と直線$y=mx+n$との交点の座標をα,βとすると，放物線と直線によって囲まれた部分の面積は，

$$\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を使って，

［解答例］



直線$y=kx$と，放物線$y=2x-x^2$との交点のx座標は，$kx=2x-x^2$より，$x=0,2-k$

題意から，$0<k<2$のもとで，

$2\int_0^{2-k}\left(2x-x^2-kx\right)dx=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$より，

$$2\times\frac{1}{6}(2-k)^3=\frac{1}{6}\times 2^3$$

これより，$2-k=\sqrt[3]{4}$　ゆえに，$k=2-\sqrt[3]{4}$

この解法では前述した面積公式を効果的に適用することにより結果を得ているが，公式を用いないで積分計算したら，果たしてスムーズに正解が得られるかは疑問であり，公式の扱い方が問題になる。

2つの放物線によって囲まれた部分の面積については，

放物線$y=ax^2+bx+c$と$y=dx^2+ex+f$との交点のx座標をα,βとすると，2つの放物線によって囲まれた部分の面積は，

$$\frac{|a-d|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ということになり，

［例6］　二つの放物線，$y=2x^2-3x-2$と，$y=2x-x^2$とによって囲まれる図形の面積Sを求めよ。

［解答例］二つの放物線の交点のx座標は，

$2x^2-3x-2=2x-x^2$より，$3x^2-5x-2=0$

これを解いて，$x=-\dfrac{1}{3},2$であるから求める面積Sは，$S=\left|\dfrac{2-(-1)}{6}\right|\left\{2-\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right\}^3=\dfrac{343}{54}$

三次関数についても，

3次関数$y=ax^3+bx^2+cx+d$と直線$y=mx+n$とが，x座標がαの点で接し，x座標がβの点で交わるとすると，3次関数と接線によって囲まれた部分の面積は，$\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$

により，

[例7]　曲線$y=x^3-2x-3$上の点（-1,-2）における接線と，この曲線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

[解答例] $y'=3x^2-2$より，点（-1,-2）における接線の方程式は，$y+2=1\cdot(x+1)$より，
$y=x-1$　これと，曲線との交点のx座標を求めると，$x^3-2x-3=x-1$より，
$(x+1)^2(x-2)=0$　ゆえに，$x=-1,2$
したがって，求める面積は，

$$S=\frac{1}{12}\{2-(-1)\}^2=\frac{27}{4}$$

となってきて，積分計算しないで解答する生徒も出てくることで，積分と面積との関係が，単なる公式の適用と化してしまう恐れもある。

しかし，実際に大学入試で出題される場合は，面積を求めさせてから，その最大値や最小値，極限などとの融合的な問題となる場合も多く，面積公式の効率的な適用が不可欠である。

実際に出題された問題をみてみよう。
（2013年一橋大学より）

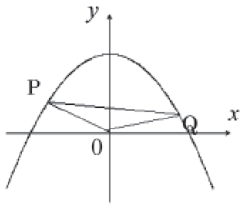
[例8]　原点をOとするxy平面上に，放物線C：$y=1-x^2$がある。C上に2点P（$p,1-p^2$），Q（$q,1-q^2$）を$p<q$となるようにとる。
（1）　2つの線分OP，OQと放物線Cで囲まれた部分の面積Sを，pとqの式で表せ。
（2）　$q=p+1$であるときSの最小値を求めよ。
（3）　$pq=-1$であるときSの最小値を求めよ。

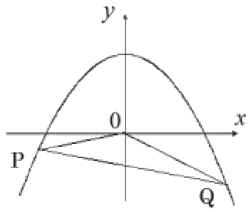
[解答例]（1）直線PQの方程式は，$p\neq q$より，

$$y-(1-p^2)=\frac{(1-q^2)-(1-p^2)}{q-p}(x-p)$$

すなわち，$y=-(p+q)x+pq+1$であるから，題意の面積はy切片$pq+1$の符号により，次の2つの場合がある。

（ｉ）$pq+1\geq 0$　　　（ⅱ）$pq+1\leq 0$





（ｉ）$pq+1\geq 0$のとき，

$$S=\int_p^q\{(1-x^2)-(-(p+q)x+pq+1)\}dx+\frac{1}{2}\left|p(1-q^2)-q(1-p^2)\right|,$$
$$=\frac{(q-p)^3}{6}+\frac{1}{2}\left|(q-p)(pq+1)\right|$$
$$=\frac{1}{6}(q-p)(p^2+q^2+pq+3)$$

（ⅱ）$pq+1\leq 0$のとき，

$$S=\int_p^q\{(1-x^2)-(-(p+q)x+pq+1)\}dx-\frac{1}{2}\left|p(1-q^2)-q(1-p^2)\right|$$
$$=\frac{(q-p)^3}{6}-\frac{1}{2}\left|(q-p)(pq+1)\right|$$
$$=\frac{1}{6}(q-p)(p^2+q^2+pq+3)$$

（ｉ）（ⅱ）より，

$$S=\frac{1}{6}(q-p)(p^2+q^2+pq+3)$$

（2）　$q=p+1$を（1）の結果に代入すると，

$$S=\frac{1}{6}(p+1-p)(p^2+2p+1+p^2+p^2+p+3)$$
$$=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{24}$$

したがって，

$p=-\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$のとき，Sの最小値は$\frac{13}{24}$

（3）　$pq=-1$のとき，$p<q$より，$p<0<q$であるから，$p=-\frac{1}{q}$を（1）の結果に代入すると，

$$S=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(q^2+\frac{1}{q^2}-1+3\right)=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)^3$$

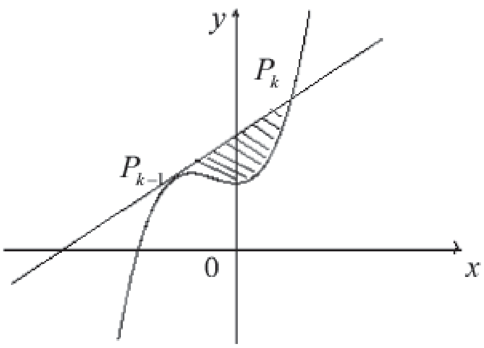
ここで，$q+\dfrac{1}{q}\geq 2\sqrt{q\cdot\dfrac{1}{q}}=2$ 等号は$q=1$のとき成り立つから，

$p=-1, q=1$のとき，Sの最小値は$\dfrac{8}{6}$

三次関数と接線に関する問題では，
（2014年東京工業大学より）

> ［例9］ xy平面上の曲線C：$y=x^3+x^2+1$を考え，C上の点（1, 3）をP_0とする。
> $k=1,2,3,\cdots$に対して点$\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$におけるCの接線とCの交点のうちで$\mathrm{P}_{k-1}$と異なる点を$\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$とする。このとき，$\mathrm{P}_{k-1}$と$\mathrm{P}_k$を結ぶ線分とCによって囲まれた部分の面積を$S_k$とする。
> （1）　S_1を求めよ。
> （2）　x_kをkを用いて表せ。
> （3）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$を求めよ

［解答例］　　　　　　　　$y=x^3+x^2+1$



（1）曲線Cの方程式を$y=f(x)$とする。
C上の点（x_k，$x_k^3+x_k^2+1$）($k=0,1,2,\cdots$)での接線の方程式は，$y'=3x^2+2x$より，

$y-\left(x_k^3+x_k^2+1\right)=\left(3x_k^2+2x_k\right)\left(x-x_k\right)$

ゆえに，$y=\left(3x_k^2+2x_k\right)x-\left(2x_k^3+x_k^2-1\right)$

この接線の方程式を$y=g_k(x)$とし，曲線Cとの交点のx座標を求めると，

$x^3+x^2+1=\left(3x_k^2+2x_k\right)x-\left(2x_k^3+x_k^2-1\right)$より，

$\left(x-x_k\right)^2\left(x+2x_k+1\right)=0$　題意から，

$$x_{k+1}=-2x_k-1$$

$k=0$とすると　$x_1=-2x_0-1=-3$

したがって，

$S_1=\displaystyle\int_{-3}^{1}\left|f(x)-g_0(x)\right|dx=\frac{1}{12}\{1-(-3)\}^4=\frac{64}{3}$

（2）（1）より，$x_{k+1}+\dfrac{1}{3}=-2\left(x_k+\dfrac{1}{3}\right)$

ゆえに，$x_k+\dfrac{1}{3}=(-2)^k\left(x_0+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3}(-2)^k$

したがって，　$x_k=\dfrac{4(-2)^k-1}{3}$

（3）（1）より

$$S_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left|f(x)-g_{k-1}(x)\right|dx=\frac{1}{12}(x_k-x_{k-1})^4$$
$$=\frac{1}{12}\left\{\frac{4(-2)^k-1}{3}-\frac{4(-2)^{k-1}-1}{3}\right\}^4$$
$$=\frac{64(16)^{k-1}}{3}$$

ゆえに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{64}\left(\frac{1}{16}\right)^{k-1}=\frac{\frac{3}{64}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{20}$

［例8］や［例9］のように，積分計算が主体でなく，題意を正しく捉え，それぞれの条件下での最小値を求めたり，漸化式や級数のなどの融合問題において，面積を正しく求めなくてはいけないことを考えると，面積公式の利用は自然なことであり，受験生にとっては必須の公式ともいえる。

さらに，これらの公式は，整関数とその接線とで囲まれた部分の面積公式として拡張でき，

> ［4次関数と接線］
> 4次関数$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$と直線$y=mx+n$とが，x座標がαとβの点で接していると，4次関数と接線によって囲まれた部分の面積は，$\dfrac{|a|}{30}(\beta-\alpha)^5$

となるが，それらが，大学で学ぶベータ関数が

背景にあることを述べたくなる。

> [ベータ関数]
>
> $$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$
>
> これと同値なものが，
>
> $$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

　これらの証明は，置換積分や部分積分を学んだ高校生が理解することは十分可能であるが，そこまで踏み込んで指導できる学校はそう多くはないと思う。ただ，面積公式が，受験に必須の公式として終わってしまうような指導では残念な気がする。

4．両方に垂直なベクトルと外積

　現行の数学Bでも，ベクトルの学習では，和，差，実数倍（スカラー倍）に続いて，内積を学ぶ。そこで，内積の定義や性質，ベクトルのなす角などを学習すると多くの生徒から「内積があるなら，外積もあるのでは」との質問を受けた教員も多いと思う。現行の学習指導要領もこれまでもベクトルの単元で外積が導入された例はない。ところが，殆どの教科書では，次のような例題がある。

> [例10]　二つのベクトル$\vec{a}=(0,2,1)$，$\vec{b}=(2,-2,1)$の両方に垂直で大きさ3のベクトルを求めよ。

[解答例]　求めるベクトルを$\vec{p}=(x,y,z)$とすると，

$$\vec{a}\cdot\vec{p}=0x+2y+1z=0 \quad \cdots ①$$
$$\vec{b}\cdot\vec{p}=2x+(-2)y+1z=0 \quad \cdots ②$$
$$|\vec{p}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3 \quad \cdots ③$$

①〜③を連立させて解いて，

$x=\pm2$，$y=\pm1$，$z=\mp2$　（複号同順）

ゆえに，求めるベクトルは，$\pm(2,1,-2)$

　あらためて述べるまでないが，この例題が空間ベクトルの外積を意図した問題であり，ここで外積を紹介する教員も多い。

> [ベクトルの外積]　二つのベクトル，$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$に対して，$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$を$\vec{a}$，$\vec{b}$の外積といい，$\vec{a}\times\vec{b}$で表す。これは，大きさが$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$（$\vec{a}$，$\vec{b}$を隣り合う二辺とする平行四辺形の面積）で，$\vec{a}$と$\vec{b}$の両方に垂直なベクトルで，向きは，$\vec{a}$から$\vec{b}$へ方向の右ねじの進む方向である。

　[例10]の解を，次のようにした場合，その採点には悩むのではなかろうか。

[解答例] $\vec{a}$，$\vec{b}$の両方に垂直なベクトルの一つは，(4, 2, −4) より，(2, 1, −2) をとると，この大きさが3より，逆方向も考えると，

求めるベクトルは，±(2, 1, −2)

　垂直なベクトルの一つとして (4, 2, −4) を挙げるのは，外積を用いていなければ難しいと思うが，一概に外積を用いて求めたとは断定しがたい。これは，順列や組合せの問題で，公式を使わず，すべての場合をつくして解答しても，誤答と言えないことと同様ではなかろうか。

　実際に出題された例をみてみよう。

（2011年九州大学より）

> [例11]　空間の4点
> O (0, 0, 0)，A (0, 2, 3)，B (1, 0, 3)，C (1, 2, 0) を考える。このとき，次の問いに答えよ。
>
> (1)　4点O，A，B，Cを通る球面の中心Dの座標を求めよ。
>
> (2)　3点A，B，Cを通る平面に点Dから垂線を引き，交点をFとする。線分DFの長さを求めよ。
>
> (3)　四面体ABCDの体積を求めよ。

[解答例] (1)　球面Dの中心の座標を (x,y,z) とすると，$OD^2=AD^2=BD^2=CD^2$より，

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=x^2+(y-2)^2+(z-3)^2\\&=(x-1)^2+y^2+(z-3)^2\\&=(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\end{aligned}$$

これを解いて，$x=\dfrac{1}{2},\ y=1,\ z=\dfrac{3}{2}$

よって点Dの座標は，$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

（2）$\overrightarrow{AB}$＝（1.−2, 0），$\overrightarrow{AC}$＝（1.0, −3）より，3点A, B, Cを通る平面の方程式の法線ベクトル$\vec{n}$は，$\vec{n}=(6, 3, 2)$であるから，平面の方程式は，$6x+3y+2z+d=0$とおけ，点$A(0, 2, 3)$を通ることから，d＝−12となる。

したがって，この平面と点Dとの距離が線分DFの長さになるから，

$$\mathrm{DF}=\frac{\left|6\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 1+2\cdot\frac{3}{2}-12\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{3}{7}$$

（3）四面体ABCDは，底面が三角形ABC，高さがDFであるから，

三角形ABCの面積は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 10-1}=\frac{7}{2}$$

であるから，求める体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{2}$$

解答例では，(1)は標準的な解答であるが，(2)ついては，平面上の二つのベクトルに垂直なベクトルをあげている際に，外積を用いていると思われることが微妙な点であることと，平面の方程式を求めて，点と平面の距離の公式を用いて線分DFの長さを求めていることも議論になる。空間における直線や平面の方程式に関連した問題には，二つのベクトルの両方に垂直なベクトルを求めなくてはいけないものが多く，それを正確に求めなくては，先の議論が進まないことを考えると外積の利用は仕方ないことと感じる。解答の中で，平面の方程式については，これまでの学習指導要領で扱っていた時代もあるので高等学校の範囲内と判断しても良いと思う。これを使わないなら，内積を用いて，

$\mathrm{DF}=\dfrac{\left|\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$として求めることになるだろう。

（3）については，(2)のヒントがあることから，三角形ABCの面積を求めればよいので，ここでベクトルで与えられた三角形の面積公式を用いることは，この公式は，教科書でも扱っているので問題ないだろう。

なお，平行六面体や四面体の体積については，外積の定義により，次の公式が容易に得られる。

［平行六面体・四面体の体積］　始点が同じの互いに独立な三つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で作られる平行六面体の体積は，$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=$等

四面体の体積は，$\frac{1}{6}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=$等

ここまで扱うことは内積の概念と比べて，それほど難しいものではないと思うが，学習指導要領の範囲外である。

ただ，［例11］の（3）のような問題には検算として利用できる。

$\overrightarrow{AB}$＝(1.−2,0)，$\overrightarrow{AC}$＝(1. 0,−3）より，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(6, 3, 2)\quad \overrightarrow{AD}=(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2})$

であるから，

$$\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\left(6\cdot\frac{1}{2}+3\cdot(-1)+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

ベクトルの演算を指導する中で，和・差・実数倍がベクトルなのに，内積が実数（スカラー）となることに納得がいかない生徒もいて，指導に苦心した経験をもつ教員も多いのではないか。

ベクトルの演算を扱う中で，実数となる内積をスカラー積として，その幾何学的な性質もきちんと説明し，さらに，外積をベクトル積として，ともに高等学校で指導することは自然な展開であり，決して難しいことではないと思うが，学習指導要領から除外されていることが残念である。

5．不定形の極限とロピタルの定理

関数の極限が$\dfrac{0}{0}$や$\dfrac{\infty}{\infty}$の形となる，いわゆる不定形の極限を求める場合に，必ず話題になるのがロピタルの定理の問題である。

多くの大学では，不定形の極限の問題を出題した場合，途中経過を記入しなくてはいけないものであれば，採点から除外したり，大幅に減点する場合が多いようだが，この定理の指導について検証してみたい。

［ロピタルの定理］　関数$f(x)$，$g(x)$が$x=a$の近傍で微分可能で，$x\neq a$では$g(x)\neq 0$，$g'(x)\neq 0$とする。$x\to a$のとき
$f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha$とすると
$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$が成立。この定理は，$\alpha\to\pm\infty$
$x\to\pm\infty$や，$f(x)\to\infty$，$g(x)\to\infty$も同様

［例12］　次の関数の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$

通常は，つぎのような解答になる。

［解答例］(1) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

(2) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-1^3}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}$$

(3) $f(x)=e^x-(1+x+\dfrac{x^2}{2})$とすると，$f(0)=0$
$f'(x)=e^x-(1+x)$，$f''(x)=e^x-1$，$f'(0)=0$
より，$x>0$では，$f''(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)>0$
であるから，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$　したがって，
$x>0$のとき，$0<\dfrac{x}{e^x}<\dfrac{x}{1+x+\dfrac{x^2}{2}}$　ここで
$x\to\infty$のとき，$\dfrac{x}{1+x+\dfrac{x^2}{2}}\to 0$であるから，
与式＝0

(4) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{a^{x+0}-a^0}{x-0}$であるから，関数$a^x$の$x=0$における微分係数に等しい。ゆえに，
$(a^x)'=a^x\log a$より，$a^0\log a=\log a$

(5) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$であり，
$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$であるから，与式$=\log e=1$

これらの問題はいずれも不定形の極限を求めるものであり，ロピタルの定理により，

(1) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$

(2) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}}{1}=\frac{1}{3}$

(3) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$

(4) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a}{1}=\log a$

(5) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$

などと簡単に処理でき，通常の解答では必須の(1)，(2)のような変形や，(3)のような二次のマクローリン展開が背景にある不等式を用いた処理も不要になる。
なお，(4)については，式で書けば，
与式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{a^{x+0}-a^0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}a^x$のことだから，

事実上，定理を用いたともいえるのだが，高等学校段階では，定理は紹介程度に留めておく方が良いようである。ただ，極限そのものを求めるものでなく，たとえば，次のような問題を目にする。

> [例13] 方程式 $x\log x = k$ の実数解の個数を定数 k の値によって分類せよ。

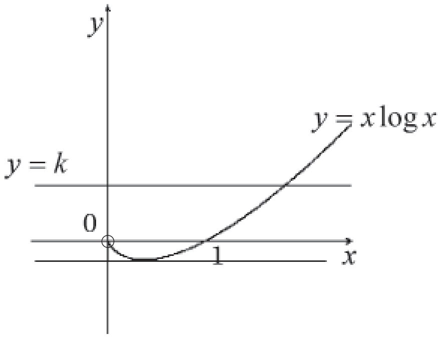
[解答例] $y = x\log x$ のグラフと $y = k$ のグラフの交点の数を $x > 0$ の範囲で分類する。
$y = x\log x$ を微分すると $y = \log x + 1$ より，$y = x\log x$ の増減は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
y'	×	−	0	+
y	×	↘	$-e^{-1}$	↗

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log x = +\infty$ であり，

$$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to+0} -x = 0$$

であるから，



$$\begin{cases} k < -e^{-1} \text{ のとき，0個} \\ k = -e^{-1} \text{ のとき，1個} \\ -e^{-1} < k < 0 \text{ のとき，2個} \\ 0 \leq k \text{ のとき，1個} \end{cases}$$

となる。

この解答例では，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ の極限を求める際に，ロピタルの定理を用いているが，これを用いないと，この極限は容易ではない。この場合，

$\log x = -t$ とおき，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^t}$ とすれば，

前述の[例12]の（3）の形になるが，極限そのものを求める問題ではないので，ロピタルの定理を用いることは許されるだろう。

[例13]の場合 $y = \log x$ のグラフと $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフの交点の数で分類することも可能であるが，$y = \log x$ のグラフと $y = k$ のグラフの交点の数を分類した方がはるかに簡単である。

ロピタルの定理の利用は，その利用方法によっては，大きな力を発揮するものであるが，いつも容易になるばかりではない。最近の出題例をみてみよう。

（2013年北見工業大学，2014愛媛大学より）

> [例14]（1）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos 2x}$　（2）$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^3}{\tan\theta-\sin\theta}$

[解答例]（1）与式 $\displaystyle =\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}$$

（2）与式 $\displaystyle =\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^3}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta}$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^3\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)} = \lim_{\theta\to0}\frac{\theta^3\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^3\cos\theta(1+\cos\theta) = 2$$

となるが，これらをロピタルの定理を使うと，

（1）では，与式 $\displaystyle =\lim_{x\to0}\frac{2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sin 2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{\cos^2 x\cdot 4\sin x\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos^3 x} = \frac{1}{2}$$

（2）では，与式 $\displaystyle =\lim_{\theta\to0}\frac{3\theta^2}{\frac{1}{\cos^2\theta}-\cos\theta}$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{3\theta^2\cos^2\theta}{1-\cos^3\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{6\theta\cos^2\theta - 6\theta^2\cos\theta\sin\theta}{3\cos^2\theta\sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left\{2\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right) - \frac{2\theta^2}{\cos\theta}\right\} = 2$$

として求めることができるが，[解答例]の方が簡単である。

さらに，次のような振動する関数の極限を調べるものでは，定理の誤った利用をさせない注意も必要である。

［例15］ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x}$ を求めよ。

[解答例] $\displaystyle\left|\frac{x-1}{x}\right| \le \left|\frac{x-\cos x}{x}\right| \le \left|\frac{x+1}{x}\right|$ であり，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x-1}{x}\right| = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{x+1}{x}\right| = 1$ であるから，与式 $=1$

ロピタルの定理を用いれば，直ちに結果を得ることができるような入試問題が出題される可能性も低く，基本的な式変形や，公式を，きちんと指導しておくことが高等学校において重要であり，まして，ロルの定理から，平均値の定理を拡張し，コーシーの平均値の定理や，ロピタルの定理まできちんと指導できるような環境を高等学校で構築することは難しいと思う。

ただ，関数のグラフの極限の検証など，関数概念を深める上で，ロピタルの定理や，マクローリン展開などの紹介は，無駄なことではないが，その指導には十分な配慮をしたい。

6. 複素数の累乗とド・モアブルの定理，オイラーの定理

次のような問題をよく目にする。

［例16］ $\displaystyle\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12}$ を計算せよ。

[解答例] $\displaystyle\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12} = \frac{\left\{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3\right\}^4}{\left\{\left(1+i\right)^2\right\}^6} = \frac{(-8)^4}{(2i)^6}$

$$= \frac{2^{12}}{2^6\left(i^2\right)^3} = -2^6$$

複素数の定義による計算の基礎しか学んでいない場合は上記のような解答になるが，平成24年度からの学習指導要領では数学Ⅲの複素数平面でド・モアブルの定理やその性質を学ぶことになって，次のような解答も指導できる。

［ド・モアブルの定理］

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

[ド・モアブルの定理による解答例]

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12} = \left\{\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right\}^{12}$$

$$= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right\}^{12} = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$= -2^6$$

ド・モアブルの定理に関連して，発展的に，オイラーの公式に触れたくなると思う。

［オイラーの公式］

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

[オイラーの公式による解答例]

与式 $\displaystyle\left(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^{12} = 2^6e^{\pi i} = -2^6$

基本的に複素数の極形式を用いる点では，ド・モアブルの定理の同様であるが，ド・モアブルの定理の偏角を用いた計算が，オイラーの公式では，指数が虚数の場合にも指数法則が適用できる点を示す上でも，興味を抱くのではないだろうか。

実際に出題された例をみてみよう。

（2013年鳥取大学より）

［例17］2次方程式 $x^2+\sqrt{2}x+1=0$ について，次の問いに答えよ。
(1) この2次方程式の解を求めよ。
(2) (1) で求めた解のうち，虚部が正のものを α，負のものを β とする。このとき，以下の値を求めよ。
（ア）α^4 （イ）α^8 （ウ）$\alpha\beta$ （エ）α^{1010}
（オ）$\alpha^{2017}\beta^{2013}$

［解答例］ (1) 解の公式により，

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$$

(2) (1) より，

$$\alpha=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2},\quad \beta=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$$

（ア）$\alpha^2=\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2=\dfrac{2-4i-2}{4}=-i$

したがって，$\alpha^4=\left(\alpha^2\right)^2=(-i)^2=-1$

（イ）$\alpha^8=\left(\alpha^4\right)^2=(-1)^2=1$

（ウ）解と係数の関係より，$\alpha\beta=1$

（エ）$\alpha^{1010}=\left(\alpha^8\right)^{126}\alpha^2=-i$

（オ）$\alpha^{2017}\beta^{2013}=(\alpha\beta)^{2013}\alpha^4=-1$

［例17］では，$\alpha=\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$，

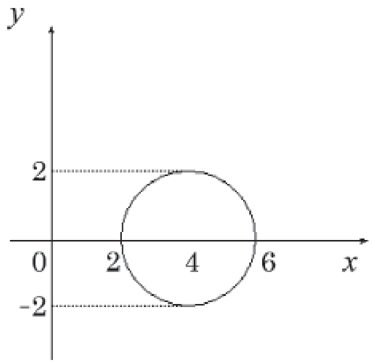
$\beta=\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)$となり，これを用いることもできるが，かえって複雑になる。

複素数の計算では，深い背景があるものの，現実の問題では，題意にしたがって計算していく方が得策である場合が多いが，複素数の神秘性を生徒にどう伝えるか，指導の楽しみもある。

7．回転体の体積に関連した公式

教科書には必ず載っている問題を例にしてみる。

［例18］方程式 $(x-4)^2+y^2=4$ で表された図形を，y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。



多くの教科書の解答は，概ね次のようである。

［解答例］$(x-4)^2=4-y^2$ より，

$x-4=\pm\sqrt{4-y^2}$

ゆえに，$x=4\pm\sqrt{4-y^2}$

したがって，求める図形の体積は

$$\pi\int_{-2}^{2}\left(4+\sqrt{4-y^2}\right)^2dy-\pi\int_{-2}^{2}\left(4-\sqrt{4-y^2}\right)^2dy$$

$$=32\pi\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy=32\pi\times\frac{1}{4}\times4\pi=32\pi^2$$

（ここで，定積分 $\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy$ が，半径2の円の面積の$\dfrac{1}{4}$であることを用いることは，高校での指導上でも必ず触れている内容である。）

この例題を示した後，多くの教員は次の定理を紹介する。

［パップス・ギュルダンの定理］
面積が S の平面図形 D を，直線 l のまわりに一回転してできる回転体の体積 V は
$V=2\pi g_x S$（g_x は D の重心と回転軸 l との距離）すなわち，V は重心の移動距離と S の積

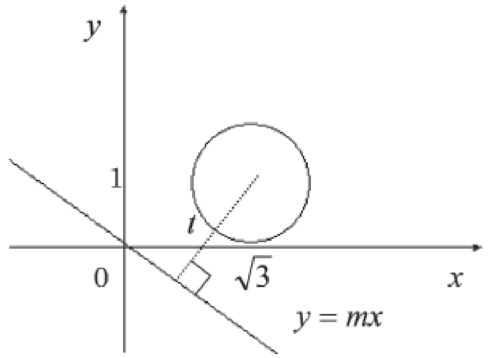
この定理によると，この円の重心の座標が点 $(4, 0)$，囲まれた図形の面積が，4π であることから，求める回転体の体積は，

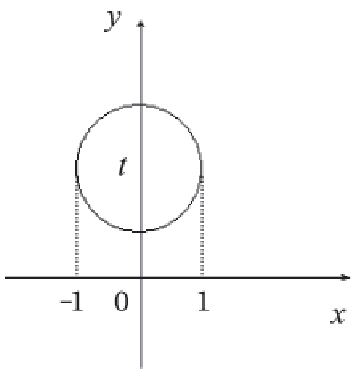
$4\pi\times8\pi=32\pi^2$と求めることができる。

大学入試では，この定理を，そのまま使える問題は多くはないと思われるが，かつては次のような出題例もある。
（1991年 お茶の水女子大学より）

> [例19] 点（$\sqrt{3}$, 1）を中心とする半径1の円Cを原点を通る直線$y=mx$のまわりに1回転させてできる立体の体積を$V(m)$とする。mが負の範囲で変わるとき，$V(m)$の最大値を求めよ。

[解答例]　円はx軸と接するので，mが負の直線$y=mx$は，円と交わらない。円の中心と直線との距離をtとすれば，回転体は点（0, t）を中心とする半径1の円$x^2+(y-t)^2=1$をx軸のまわりに回転した立体の体積と同じである。





$(y-t)^2=1-x^2$より，$y-t=\pm\sqrt{1-y^2}$
ゆえに，$y=t\pm\sqrt{1-y^2}$であるから，求める図形の体積は

$$\pi\int_{-1}^{1}\left(t+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}\left(t-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$$
$$=8\pi t\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=8\pi\times\frac{1}{4}\times\pi\times1^2=2\pi^2t$$

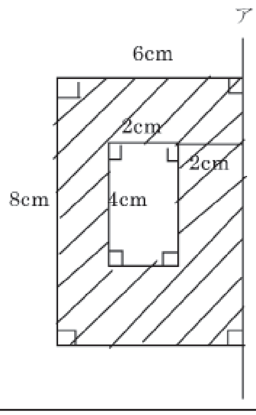
ゆえに，体積は，tが最大のとき最大である。題意の円と原点とを結ぶ直線の傾きは，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$であるから，$m=-\sqrt{3}$のときtは最大となる。

このとき，$t=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$となるから，

$V(m)$の最大値は，$4\pi^2$となる。

[例19]では，求める回転体の体積は，パップス・ギュルダンの定理によれば，円の重心が円の中心であるから，体積が最大となるのは，直線と円の中心が最も離れたときであることは明らかである。したがって，直線$y=mx$と原点と円の中心とを結ぶ直線の傾きが直交するときを求めると，直線と円の中心との距離の最大値は$\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$であり，$V(m)$の最大値は，$2\pi\times2\times\pi\times1^2=4\pi$として解答した受験生も少なからずいたのではないかいと思うが，この解答をどう評価されたかは不明である。

中学受験の際には，かなり有効となる場合もある。次は，実際にある中学校の入学試験で出題された問題である。
（2006年駒場東邦中学より）

> [例20] 右の図のような２つの長方形で作られる斜線部分を直線アを軸としてそのまわりに１回転してできる立体の体積は何㎤ですか
>
> 
>

本来ならば，次のような解答になると思う。
[解] 半径$6cm$，高さ$8cm$の円柱全体から，半径$4cm$，高さ$4cm$の円柱を引き，さらに，半径$2cm$，高さ$4cm$の円柱を加えれば良いから，
$6\times 6\times \pi\times 8-4\times 4\times \pi\times 4+2\times 2\times \pi\times 4$
$=(288-64+16)\times \pi = 240\pi$（㎤）

実際の問題では，円周率を3.14として計算させるものであったが，何かの機会でパップス・ギュルダンの定理を知っていた児童は，次のような計算をしてすばやく結果を導いたのではないか。

すなわち，この図形の重心は長方形の対角線の交点になり，長方形の面積が，$48-8=40$（㎠）であることから，

$$40\times 6\pi = 240\pi \text{（㎤）}$$

記述式の問題では，証明せずにこの定理を用いての解答は正解を期待することは難しいが，平面図形の重心の軌跡と回転体の体積とが関連している性質を紹介することは無為なことではない。

回転体の体積にまつわる問題として，かつて次のような問題が出題されたときには，「学習指導要領の範囲外ではないか」との議論で沸いたこともあった。1989年の東京大学理科系の入試問題である。

> [例21] $f(x)=\pi x^2\sin \pi x^2$とする。$y=f(x)$のグラフの$0\le x\le 1$の部分とx軸で囲まれた図形をy軸のまわりに回転させてできる図形の体積Vは，$V=2\pi\int_0^1 xf(x)dx$で与えられることを示し，この値を求めよ。

いわゆるバームクーヘン分割公式そのものの証明とその適用問題である。前半の公式の証明がどの程度厳密にすべきなのか正解が公表されていないので不明ではあるが，高等学校の範囲では，次のような概念的な証明でも許されたのではないかと思う。

後半は，前半で示した式を用いて簡単な置換積分と部分積分で処理できる。

[解－前半]　$f(x)\ge 0$であるから，題意の図形のうち，$x=t$，$x=t+\Delta t$で囲まれた部分をy軸のまわりに回転した立体を考えると，Δtが小さいとき，この立体は「半径$t+\Delta t$で高さ$f(t)$の円柱」から「半径tで高さ$f(t)$の円柱を除いたものとみることができる。その体積は，

$$\pi(t+\Delta t)^2 f(t)-\pi t^2 f(t)=2\pi t\Delta t f(t)+\pi\Delta t^2 f(t)$$

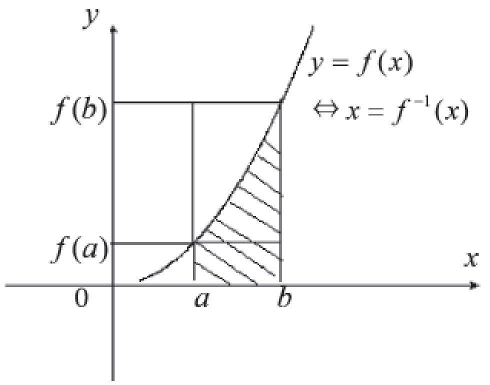
となるが，Δtが十分小さいときΔt^2がある部分は無視できるので，微小部分の体積は，$2\pi t\Delta t f(t)$となり，これを$0\le x\le 1$の範囲で定積分して，もとめる体積Vは，$V=2\pi\int_0^1 xf(x)dx$で与えられる。

[解－後半] $V=2\pi^2\int_0^1 x^3\sin \pi x^2 dx$であるから，$\pi x^2=t$とおくと，$V=\int_0^\pi t\sin t dt$となるから，

$$V=[t(-\cos t)]_0^\pi+\int_0^\pi \cos t dt=\pi$$

なお，前半の証明については次のような解答も考えられる。

[前半の別解]　$f(x)$が単調増加の場合を示す。



図の斜線部分をy軸の周りに回転してできる立体の体積Vは，

$$V=\pi b^2 f(b)-\pi\int_{f(a)}^{f(b)}\{f^{-1}(x)\}^2 dy-\pi a^2 f(a)$$
$$=\pi b^2 f(b)-\pi\int_a^b x^2 f'(x)dx-\pi a^2 f(a)$$
$$=\pi b^2 f(b)-\pi[x^2 f(x)]_a^b+\pi\int_a^b 2xf(x)dx-\pi a^2 f(a)$$
$$=\pi b^2 f(b)-\pi b^2 f(b)+\pi a^2 f(a)+\pi\int_a^b 2xf(x)dx-\pi a^2 f(a)$$

$=2\pi\int_a^b xf(x)dx$となり，単調減少も同様に示すことが出来るから，関数$y=f(x)$のグラフの$0\le x\le 1$の部分をx軸で囲まれた図形をy軸のまわりに回転させてできる図形の体積Vは，$V=2\pi\int_0^1 xf(x)dx$となる。

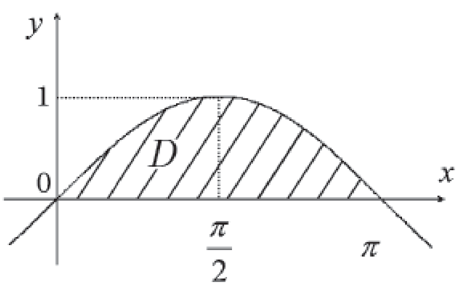
［例21］が高等学校の学習指導要領の範囲内であるかどうかは別としてパップス・ギュルダンの定理やバームクーヘン分割公式など回転体にまつわる公式を紹介することは生徒の学習意欲を育てるものと思う。

パップス・ギュルダンの定理に関連し，余談的に，次のような問題と関連させることも考えられる。

> ［例22］関数$y=\sin x\left(0\le x\le \pi\right)$と$x$軸で囲まれた部分を$D$とするとき，$D$を$x$軸の周りに，1回転した立体の体積$V_x$を求めよ。また，$D$を$y$軸の周りに1回転した体積$V_y$を求めよ。さらに，$D$の重心の座標を求めよ。

領域Dの面積は，簡単に定積分で求められるが，V_xを定理を使って求めようとしても，重心のy座標が自明でないので，素直に積分するしかない。逆に，V_yを素直に求めようとすると，逆三角関数の知識が必要になり，容易には求めることができないが，重心のx座標が自明なので定理が効力を発揮する。さらに，V_xが求めてあることで，重心の座標は定理によって求めることができる。

［解答例］



$V_x=\pi\int_0^\pi(\sin x)^2dx=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{2}$

領域Dの面積Sは，$S=\int_0^\pi \sin x dx=2$であり，

領域Dの重心は，直線$x=\frac{\pi}{2}$上にあるから，

パップス・ギュルダンの定理により，

$$V_y=\frac{\pi}{2}\times 2\times\pi\times S=2\pi^2$$

さらに，重心の体積y座標は，体積V_xを用いて，

$V_x=2\times y\times\pi\times S$より，$\frac{\pi^2}{2}=4\pi y$

ゆえに，$y=\frac{\pi}{8}$より，重心の座標は$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{8}\right)$

この問題で，生徒によっては，V_xを重心の座標を求めてから定理を使う方法はないかとか，V_xを定理を使わずに計算できないかとかの疑問を抱くのではないか。

そこで，重積分や逆三角関数の積分の話に発展していくことは，余力のある生徒に，さらなる学習意欲や知的好奇心を育てるのに有効であろう。

体積に関しては，他にも，ガヴァリエルの原理「切り口の面積が常に等しい2つの立体の体積は等しい」なども紹介しておきたい。

この原理は，平成21年度からの学習指導要領では，中学校へ移行された「球の体積の公式」を説明する際にも用いたと思うが，あらためて触れておいても良いと思う。

8.おわりに

限られた時間の中で，より多くの問題の正解を導かなくてはならない入学試験を突破するために，少しでも受験生の負担をなくすために高等学校では，様々な指導に工夫がされている。

高等学校では扱わない様々な公式や性質は，その背景を熟知した指導者の観点に立つと，その指導につい熱がはいってしまうものである。

しかし，生徒の側に立つと，せっかく知った便利な道具は使わない選択はなく，その背景や注意など考える余裕もなく，単なる受験テクニックとする危険性がある。

指導者は，生徒の実情と背景をもとに，余力のある生徒の興味や学習意欲の育成を育てていく工夫をしていきながら，応用力をつけるために，しっかりとした基礎を築く指導をしていかなくてはならない。

受験指導という観点にたって，いくつかの公式や性質について考えてみたが，平常の教科指導の場面でも，考えさせられる場面に出会う。

限りない可能性を秘めた生徒の指導にあっては，指導者自身が様々な状況を想定しながら，数学の教科指導という場を活かしていくことが肝要である。