

## 角正方形切断正方形平面回路の固有モードの計算 —モード対応多線条伝送線路等価回路に基づいて—

平岡 隆晴      田部井 康      許 瑞邦

神奈川県工学部電気工学科

〒221-8686 横浜市神奈川区六角橋3-27-1

TEL : 045(481)5661      FAX : 045(491)7915

E-mail : hiraoka@kamome.cc.kanagawa-u.ac.jp

あらまし      ストリップ線/マイクロストリップ線直角曲がりを精度良くかつ合理的に解析する手法として、曲がり部を入出力平面導波路部と平面接合回路部に分割して、前者より多線条伝送線路等価回路が、後者よりフォスタ型等価回路が得られることが知られている。フォスタ型等価回路を求めるには、平面接合部の固有モード（固有値，固有関数）を計算する必要がある。ここでは、正方形平面回路の角を正方形にカットした角正方形切断正方形平面回路を取り上げ、この平面回路を幅広・幅狭の導波路の結合と考えると、多線条伝送線路表示の多開口理想変圧器を介した等価回路が得られる。この等価回路に基づいて固有モードを計算したので、その結果を示す。

キーワード      ストリップ線直角曲がり，固有モード展開法，フォスタ型等価回路，多線条伝送線路

### Calculation of eigenmode for square-shaped planar circuit with corner square-cut - Based on multi-mode transmission line equivalent network -

Takaharu Hiraoka      Yasushi Tabei      Hsu, Jui-Pang

Department of Electrical Engineering, Kanagawa University

3-27-1 Rokkakubashi Kanagawa-ku Yokohama 221 Japan

TEL : 045(481)5661      FAX : 045(491)7915

E-mail : hiraoka@kamome.cc.kanagawa-u.ac.jp

Abstract      In order to analyze stripline/microstrip line right-angle bend with arbitrary shape accurately and systematically, the corresponding right-angle bend section is divided into planar junction part and planar waveguide part. Equivalent network for each part can be given by modal analysis; multi-transmission line network for the former and Foster-type equivalent network for the latter. In order to calculate circuit parameters of Foster-type equivalent network, eigenmode for planar junction part must be calculated. In this report, stripline right-angle bend with square-cut at the corner is investigated. The corresponding junction part can be understood as a connection of narrow and wide stripline, and then the equivalent network for this structure can be represented by multi-transmission line and multi-port ideal transformer. Based on this equivalent network representation, the corresponding matrix type eigenvalue problem is formulated and solved.

key words      Stripline right-angle bend , Eigenmode expansion method, Foster-type equivalent network, Multi-transmission line

1.はじめに

図1に示す各種のストリップ線/マイクロストリップ線直角曲がり、マイクロ波・ミリ波集積回路でしばしば利用されている。その特性計算や最適化問題は、1950年代以降多くの研究者により理論的または実験的に研究されている。従来の解析手法および計算結果は個別的で一般的ではなく、また、励振モード、周波数などといった入力条件が変わる毎に回路全体を初めから再計算しなければならないといった欠点がある。それ故、曲がりの異なる形状での特性比較や最適形状の決定といった問題は未だ完全に解決されていない。したがって、これらの問題を解決し、どのような曲がり形状でも取り扱うことができる一般的かつ系統的な手法を確立しておくことが必要であると考えられる。

本報告では、上記の要請に応じるために、ストリップ線直角曲がりを次のような方法で解析する。

1. 本来、この問題は3次元電磁界問題であるが、ストリップ線路を実効幅近似することにより側面が磁気壁の2次元平面回路としてモデル化する。
2. この2次元平面回路モデルを図1斜線で示す平面接合回路部と入出力平面導波路部に分割する。
3. 平面導波路部および平面接合回路部に固有モード展開法を適用し、前者より多線条等価回路を、後者より図2に示すフォスタ型等価回路を得る。
4. 本等価回路で多線条等価回路は容易に求まるが、図2のフォスタ型等価回路を求めるには、表1に示す平面接合部の固有モードを計算する必要がある。

ここでは、図1(a)に示す直角曲がりを取り挙げ、その広帯域周波数特性を本手法で計算するための準備として、斜線を施した平面接合部(角正方形切断正方形平面回路)の表1に対応する固有モードを次の考え方に基いて求める。

- a. 角正方形切断正方形回路は、線路幅の異なるストリップ線不連続問題として取り扱う。
- b. 各々の領域の無限個の高次モードに対応した多線条伝送線路表示の多開口理想変圧器を介した等価回路で取り扱い、固有モード(固有値, 固有関数)を計算する(図5参照)。

以下で具体的に計算法および計算結果を説明する。

2. 角正方形切断正方形平面回路の等価回路の導出

2-1. ストリップ線直角曲がりの領域分割

2次元平面回路モデルのストリップ線直角曲がりは、に平面回路接合部(角正方形切断正方形平面回路)と平面導波路部(入出力伝送線路)に分割され、それぞれ前者はx-y座標系、後者はl-s座標系をとる。さらに、平面回路接合部には、正方形平面回路の一角をカット率  $C=cla$  で正方形切断した形状を適用し、幅広の伝送線路(#A)と幅狭の伝送線路(#B)に分けて取り扱う。各領域分割したストリップ線路は、実効幅近似を施すことにより、平行平板線路の平面回路モデルを導入する。この時の電磁界分布は高さ一定で励振が常にTEMの場合、回路内の電界は常に高さ方向、磁界は平行板に平行となる。つまり、 $E=(0, E_z), H=(H_x, 0)$  となり、平面回路電圧  $V=-E_z d$ 、平面回路電流  $J=H_x \times k$  を定義すると、Maxwellの方程式は次式に示すTM<sub>0</sub>モードに関する平面

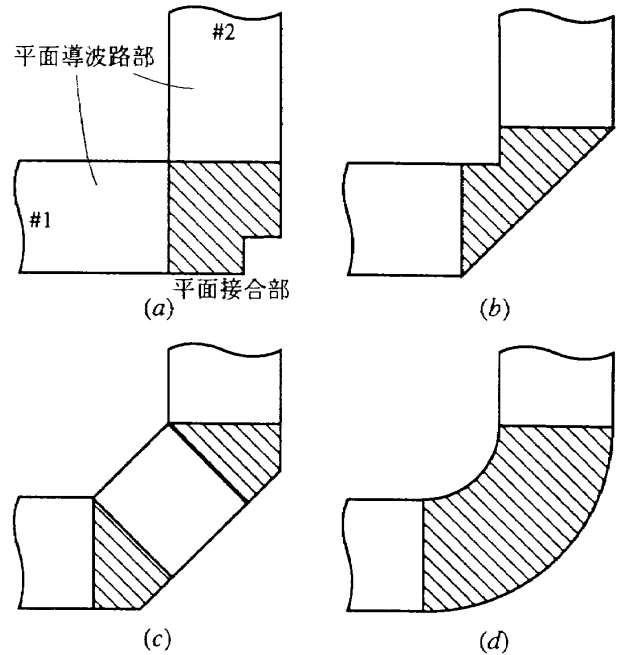


図1 ストリップ/マイクロストリップ線直角曲がり(平面接合部(斜線)と平面導波路部への分割)

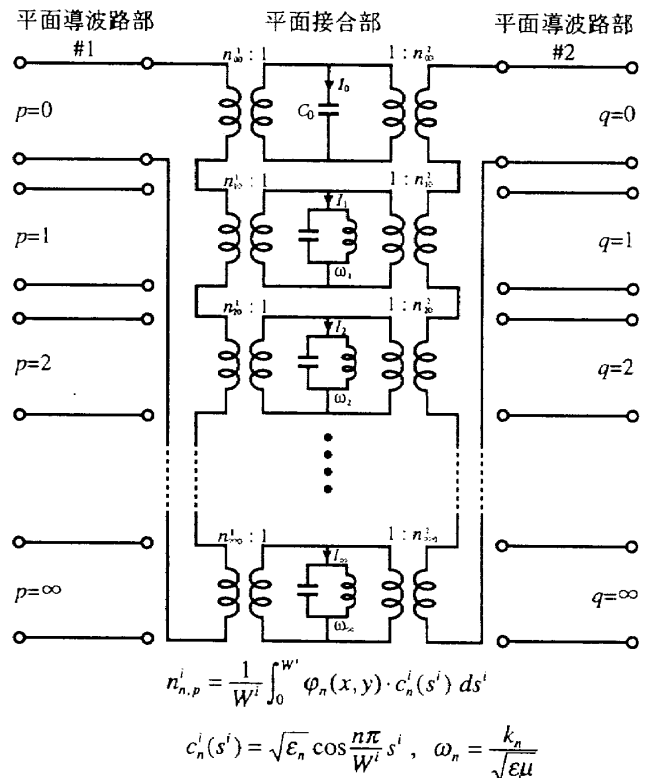


図2 平面接合回路のフォスタ型等価回路

表1 平面回路の固有関数系

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} + k_n^2 \varphi_n(x,y) = 0$$

但し、 $\nabla_t \varphi_n \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0$  (開放境界)

$$k_0 = 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots$$

$$\frac{1}{S} \iint_S \varphi_n(x,y) \cdot \varphi_m(x,y) dx dy = \delta_{nm} \quad (\text{正規直交系})$$

回路方程式となる。

$$\begin{cases} \text{grad}V = -j\omega\mu\mathbf{J} \\ \text{div}\mathbf{J} = -j\frac{\omega\epsilon}{d}V \end{cases} \quad (1)$$

したがって、平面回路接合部である角正方形切断正方形平面回路の解は、式(1)の平面回路方程式を所定の境界条件および励振条件下で解くことになる。

### 2.2. 伝送線路の等価多線条伝送線路表示

幅  $W$ 、高さ  $d$ 、媒質の誘電率  $\epsilon$ 、透磁率  $\mu$  の平行板線路では、TEM基本伝送モード以外に線路幅に対して  $p$  山ある  $p$  次の伝送モードが存在し、この  $p$  次の幅固有モード関数は、次式となる。

$$c_p(s) = \sqrt{\epsilon_p} \cos \frac{p\pi}{W} s, \quad s_p(s) = \sqrt{\epsilon_p} \sin \frac{p\pi}{W} s$$

$$\epsilon_p = \begin{cases} 1 & (p=0) \\ 2 & (p \geq 1) \end{cases} \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

この時の電圧・電流分布は式(3)で与えられる。

$$\begin{cases} V(\ell, s) = \sum_{p=0}^{\infty} V_p(\ell) \cdot c_p(s) \\ J_t(\ell, s) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{I_p(\ell)}{W} \cdot c_p(s) \\ J_s(\ell, s) = -\frac{1}{j\omega\mu d} \sum_{p=0}^{\infty} V_p(\ell) \cdot s_p(s) \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $V_p(\ell)$ 、 $I_p(\ell)$  は  $p$  次の伝送モードのモード電圧・モード電流であり、式(4)の伝送線路方程式を満たす。

$$\begin{cases} \frac{dV_p(\ell)}{d\ell} = -j\omega\mu \frac{d}{W} I_p(\ell) \\ \frac{dI_p(\ell)}{d\ell} = -j \frac{\beta_p^2 W}{\omega\mu} V_p(\ell) \end{cases} \quad (4)$$

但し、 $\beta_p^2 = k^2 - (p\pi/W)^2$ 、 $k^2 = \omega^2\epsilon\mu$   
 この伝送線路方程式より、 $p$  次の伝送モードのモード伝搬定数  $\gamma_p$ 、モード特性インピーダンス  $Z_{c_p}$  は図3中の式(5)で与えられる。したがって、平行板線路の等価回路は、図3に示すように各伝送モードに対応した多線条伝送線路が得られる。

### 2.3. ストリップ線不連続の取り扱い

角正方形切断正方形回路は、図4(a)に示すように線路幅の広いストリップ線路の領域を #A、線路幅の狭い領域 #B とした線路幅の異なるストリップ線不連続問題と

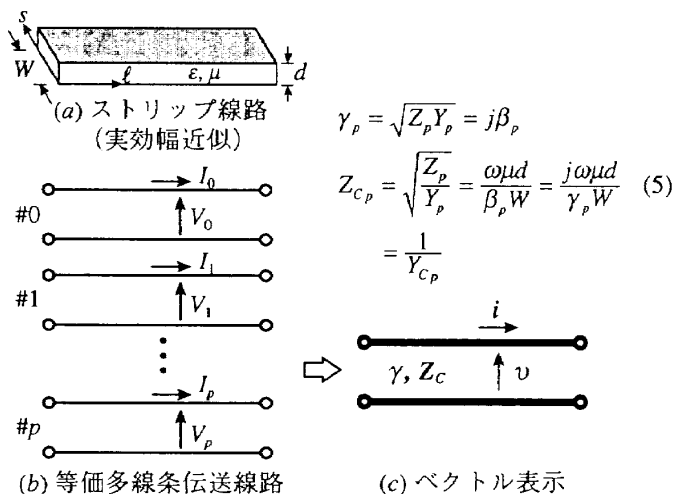


図3 等価多線条伝送線路表示

して取り扱う。その等価回路は同図(b)のようになり不連続部前後の  $a$ - $a'$  間および  $b$ - $b'$  間の電圧分布・電流密度分布は、等価回路の端子モード電圧  $V_p^A(\ell_0^A)$ 、端子モード電流  $\bar{I}_p^A(\ell_0^A)$  とすると、次式で与えられる。

$$\begin{cases} V^A(\ell_0^A, s^A) = \sum_{p=0}^{\infty} V_p^A(\ell_0^A) \cdot c_p^A(s^A) \\ \bar{J}_t^A(\ell_0^A, s^A) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\bar{I}_p^A(\ell_0^A)}{W^A} \cdot c_p^A(s^A) \end{cases} \quad (6)$$

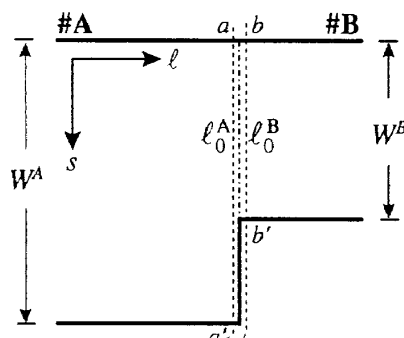
$$\begin{cases} V^B(\ell_0^B, s^B) = \sum_{q=0}^{\infty} V_q^B(\ell_0^B) \cdot c_q^B(s^B) \\ \bar{J}_t^B(\ell_0^B, s^B) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\bar{I}_q^B(\ell_0^B)}{W^B} \cdot c_q^B(s^B) \end{cases} \quad (7)$$

図4(a)に示す不連続部では、 $0 < s < W^B$  で電圧・電流が連続で、 $W^B < s < W^A$  では開放境界となっているため、次の関係を満たす。

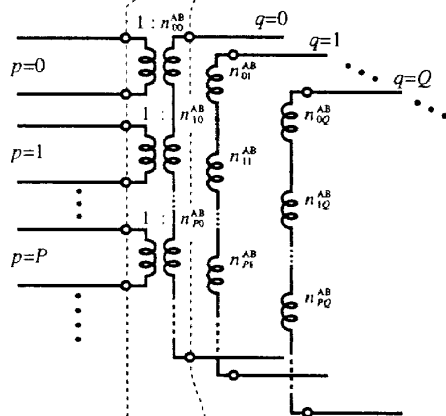
$$\bar{J}_t^A(\ell_0^A, s^A) = \begin{cases} \bar{J}_t^B(\ell_0^B, s^B) & (0 < s < W^B) \\ 0 & (W^B < s < W^A) \end{cases} \quad (8)$$

$$V^A(\ell_0^A, s^A) = \begin{cases} V^B(\ell_0^B, s^B) & (0 < s < W^B) \\ ? & (W^B < s < W^A) \end{cases} \quad (9)$$

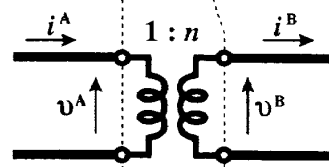
この連続性に式(6)、(7)の関係式を代入し幅固有モード関数の直交性を適用すると、次の関係式を得る。



(a) ステップ型不連続



(b) 多開口理想変圧器による等価回路表現



(c) 多開口の行列表示

図4 ストリップ線不連続部

$$\begin{aligned} \bar{I}_p^A &= \sum_{q=0}^{\infty} n_{pq}^{AB} \bar{I}_q^B \\ V_q^B &= \sum_{p=0}^{\infty} n_{pq}^{AB} V_p^A \end{aligned} \quad (10)$$

但し、
$$n_{pq}^{AB} = \frac{1}{W^B} \int_0^{W^B} c_p^A(s^A) \cdot c_q^B(s^B) ds \quad (11)$$

式(10)の関係より不連続部の等価回路は、図3(b)に示すように線路#Aと線路#Bの伝送モードが理想変圧器で結合された形となりこの時の変圧比は式(11)で与えられる。不連続部端子のモード電圧・モード電流縦行列を次のように定義すると、

$$\begin{cases} v^A = (V_0^A, \dots, V_p^A, \dots, V_\infty^A) \\ i^A = (I_0^A, \dots, I_p^A, \dots, I_\infty^A) \end{cases} \quad \begin{cases} v^B = (V_0^B, \dots, V_q^B, \dots, V_\infty^B) \\ i^B = (I_0^B, \dots, I_q^B, \dots, I_\infty^B) \end{cases} \quad (12)$$

$v^A, i^A, v^B, i^B$ 間の関係は、式(13)の行列式で表される。

$$\begin{cases} \bar{i}^A = n^{AB} \cdot \bar{i}^B \\ v^B = (n^{AB})^t \cdot v^A \end{cases} \quad (13)$$

$$n^{AB} = n_{pq}^{AB} = \begin{bmatrix} n_{00}^{AB} & \dots & n_{0q}^{AB} & \dots & n_{0\infty}^{AB} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{p0}^{AB} & \dots & n_{pq}^{AB} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{\infty 0}^{AB} & \dots & n_{\infty q}^{AB} & \dots & n_{\infty \infty}^{AB} \end{bmatrix} \quad (14)$$

### 3. 角正方形切断正方形平面回路の固有モードの計算

#### 3-1. 固有値の計算

角正方形切断正方形平面回路の固有モードを導出するためには、表1の固有関数系で示すように、平面回路Sの全周囲を開放としたときの平面回路方程式を解けばよい。平面回路内に存在する不連続部は、#A、#Bの多線条伝送線路が多開口変圧器で結合された等価回路で表されることが2-3節で示されたので、式(15)の関係となる。

$$\begin{cases} \bar{i}^{A2} = n^{AB} \bar{i}^{B1} \\ v^{B1} = (n^{AB})^t v^{A2} \end{cases} \quad (15.a) \quad (15.b)$$

$$n_{pq}^{AB} = \frac{1}{W^B} \int_0^{W^B} c_p^A(s^A) \cdot c_q^B(s^B) ds$$

また、図5で領域#Aの端子A1と領域#Bの端子B2を開放条件とした場合、端子電流 $\bar{i}^{A1} = 0, \bar{i}^{B2} = 0$ なので、伝送線路の性質より次の関係がある。

$$\begin{cases} \bar{i}^{A2} = (Y_C^A \tanh \gamma^A \ell^A) v^{A2} \\ \bar{i}^{B1} = (Y_C^B \tanh \gamma^B \ell^B) v^{B1} \end{cases} \quad (16)$$

式(15.b)に式(16)を代入することにより、

$$(Z_C^B \coth \gamma^B \ell^B) \bar{i}^{B1} = (n^{AB})^t (Z_C^A \coth \gamma^A \ell^A) \bar{i}^{A2}$$

さらに、式(15.b)を代入すると

$$\begin{aligned} (Z_C^B \coth \gamma^B \ell^B) \bar{i}^{B1} &= (n^{BA})^t (Z_C^A \coth \gamma^A \ell^A) n^{AB} \bar{i}^{B1} \\ [Z_C^B \coth \gamma^B \ell^B + (n^{BA})^t (Z_C^A \coth \gamma^A \ell^A) n^{AB}] \bar{i}^{B1} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

または、式(15.a)に式(16)を代入して、

$$\begin{aligned} (Y_C^A \tanh \gamma^A \ell^A) v^{A2} &= n^{AB} (Y_C^B \tanh \gamma^B \ell^B) v^{B1} \\ (Y_C^A \tanh \gamma^A \ell^A) v^{A2} &= -n^{AB} (Y_C^B \tanh \gamma^B \ell^B) (n^{AB})^t v^{A2} \\ [Y_C^A \tanh \gamma^A \ell^A + n^{AB} (Y_C^B \tanh \gamma^B \ell^B) (n^{AB})^t] v^{A2} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

式(17)、(18)のどちらを解いても固有値は計算できるが、ここでは、式(17)の固有値問題を解くことにより、カッ

ト率 $C=cla$ をパラメータとして、固有値を求めた。この結果を表2に示し、固有値の推移の結果を図6に示す。ここで、 $C=0.0$ はカットなしの正方形平面回路、 $C=1.0$ は、長さ $2a$ の伝送線路の固有値を示す。図7に領域#Aの線路の考慮モード次数に対する固有値の収束性を示し、この時、領域#Bの線路の考慮モード次数は、#Aの線路幅との比で決定される。計算した表2、図6の固有値は、領域#Aの線路の考慮モード次数はすべて $P=20$

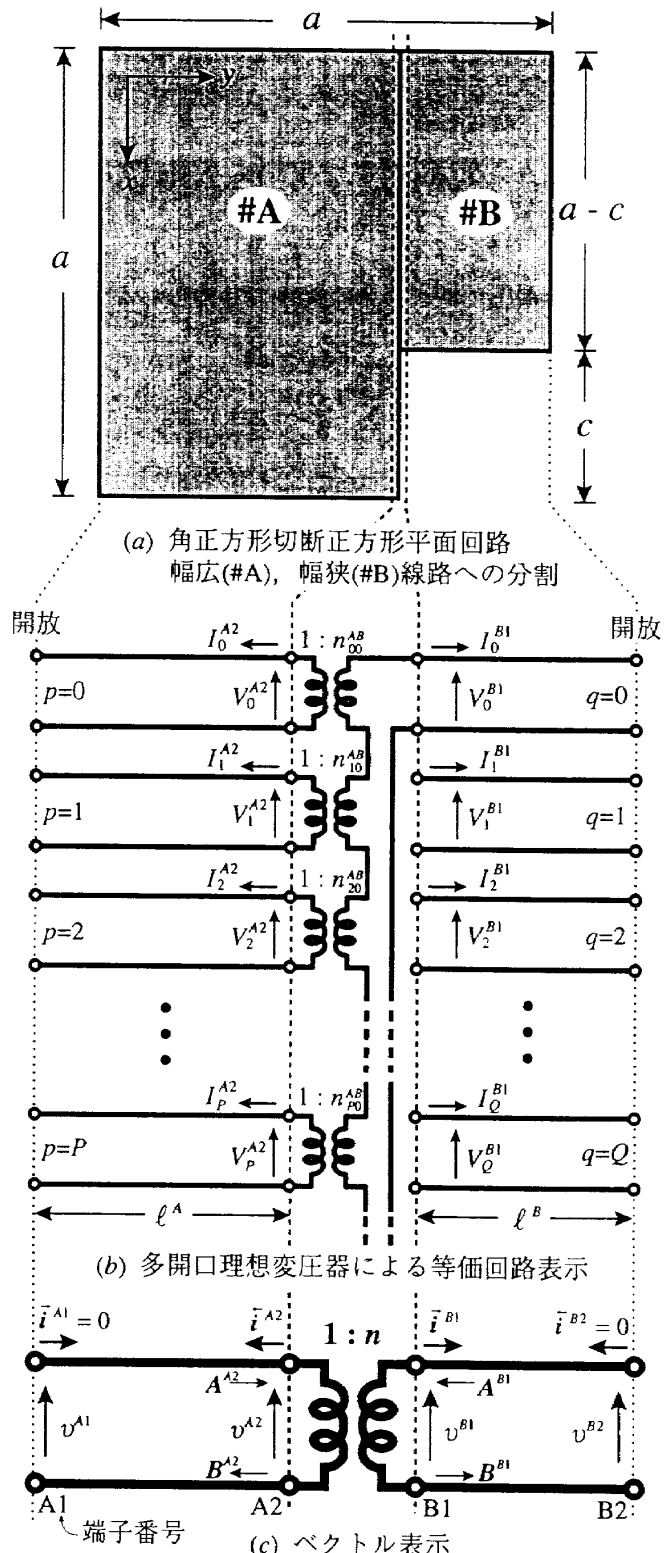


図5 角正方形切断正方形平面回路の幅広、幅狭線路接続による固有モードの計算

で、カット率  $C=0.55$  の場合、領域 #B の考慮モード次数は  $Q=9$  となる。

### 3-2. 固有モードの電圧分布の計算

計算した固有値を用いると、式(17)で求めた  $\bar{i}^{B1}$  より  $\bar{i}^{A2}$  が式(15)より求まり、また、 $\bar{i}^{A2}$ 、 $\bar{i}^{B1}$  を用いて式(16)より  $v^{A2}$ 、 $v^{B1}$  が求まることにより、各端子電圧・電流が計算できるので、角正方形切断正方形平面回路の固有モードの電圧分布は次式で求めることができる。

$$\begin{aligned} \varphi^A(x, y) &= \sum_{p=0}^P \left( A_p^{A2} e^{\gamma_p^{A2}(t^A - y)} + B_p^{A2} e^{-\gamma_p^{A2}(t^A - y)} \right) \cdot c_p^A(x) \\ \varphi^B(x, y) &= \sum_{q=0}^Q \left( A_q^{B1} e^{\gamma_q^{B1}(y - t^A)} + B_q^{B1} e^{-\gamma_q^{B1}(y - t^A)} \right) \cdot c_q^B(x) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A_p^{A2} &= \frac{1}{2} \left( V_p^{A2} + Z_{C_p} \bar{I}_p^{A2} \right), \quad B_p^{A2} = \frac{1}{2} \left( V_p^{A2} - Z_{C_p} \bar{I}_p^{A2} \right) \\ \text{但し、} \quad A_q^{B1} &= \frac{1}{2} \left( V_q^{B1} + Z_{C_q} \bar{I}_q^{B1} \right), \quad B_q^{B1} = \frac{1}{2} \left( V_q^{B1} - Z_{C_q} \bar{I}_q^{B1} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

式(17)、(18)の固有モード縦行列を決定するとき、任意定数倍の自由度があったが、表1の正規系となるように式(19)の固有関数を正規化することで、この任意定数も一意的に決定される。

計算した固有モードの電圧分布をカット率ごとに図10で示す。図8は領域 #A の線路の考慮モード次数に対する電圧分布の不連続部での連続性を示す。 $a-a'$  は領域 #A の断面、 $b-b'$  は領域 #B の断面である。同図(a)は考慮モード次数  $P=2$  で両者に差異が見受けられるが、同図(b)のモード次数  $P=20$  を考慮すると両者は一致している。

### 4. むすび

ストリップ線直角曲がりを平面導波路部と平面接合回路部に分割して取り扱い、その接合回路部である角正方形切断正方形平面回路の固有モード(固有値、固有モード)を多線条伝送線路等価回路に基づいて計算した。この等価回路で考慮伝送モード次数に対する固有値の収束性や不連続部の電圧分布の連続性を検討した。

今後は、斜め切断等他形状や任意角度の接合平面回路の固有モードを計算する予定である。

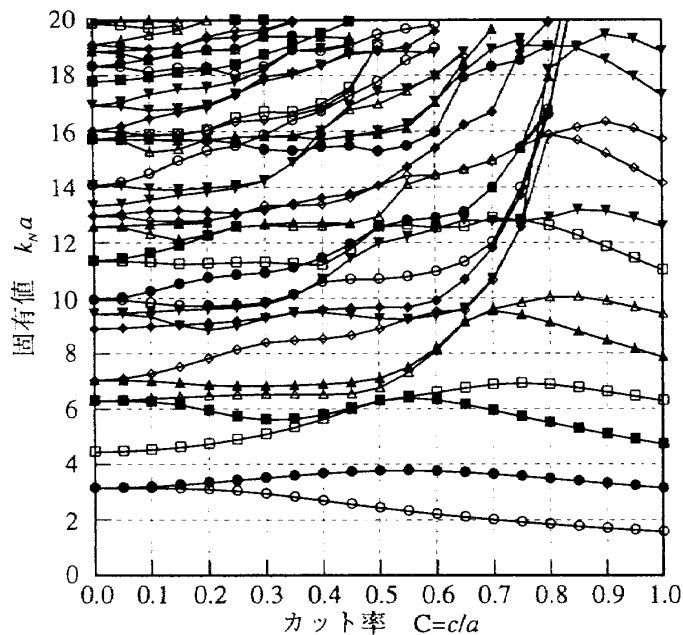


図6 各カット率ごとの固有値の推移

### 参考文献

- [1] 許, 平岡 「ストリップ線ステップ型不連続の等価回路表示 - 多線条伝送線路, 多開口理想変圧器による -」 信学技報 MW98-82
- [2] 許, 穴田 「マイクロ波平面回路の計算機解析」 信学技報 MW73-7
- [3] Reinmut K. Hoffmann, "Handbook of microwave integrated circuit" pp267-309 Artech House (1987)
- [4] Arthur A. Oliner "Equivalent circuits for discontinuities in balanced strip transmission line" pp134-143 IEEE MTT vol. (1954)
- [5] P. Silverster, P. Benedek, "Microstrip discontinuity capacitances for right-angle bends, T-junctions and crossings" IEEE MTT vol.21 No.5 pp341-346 (1973)
- [6] Neale, B.N, Gopinath A, "Microstrip discontinuity inductance" IEEE MTT vol.26 No.10 pp827-831(1978)

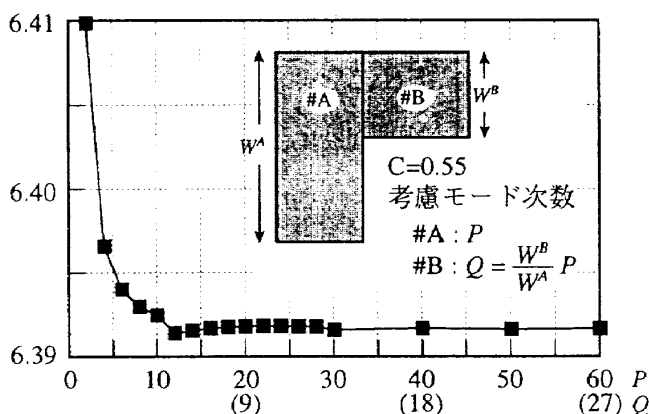


図7 領域 #A の伝送線路の考慮モード数に対する固有値の収束性 (例:  $N=4$  番目のモード)

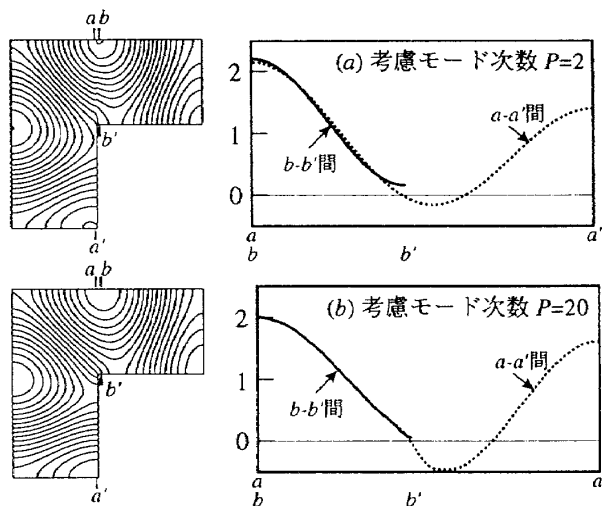


図8 電圧分布の不連続部での連続性 (例:  $C=0.55$ ,  $N=4$  番目のモード)

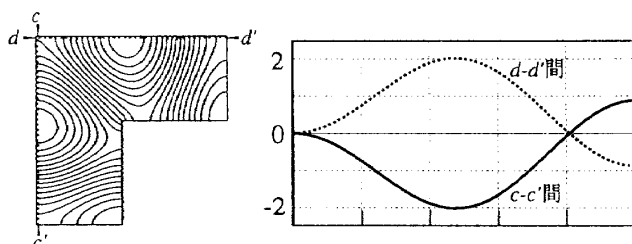


図9 電圧分布の対称性

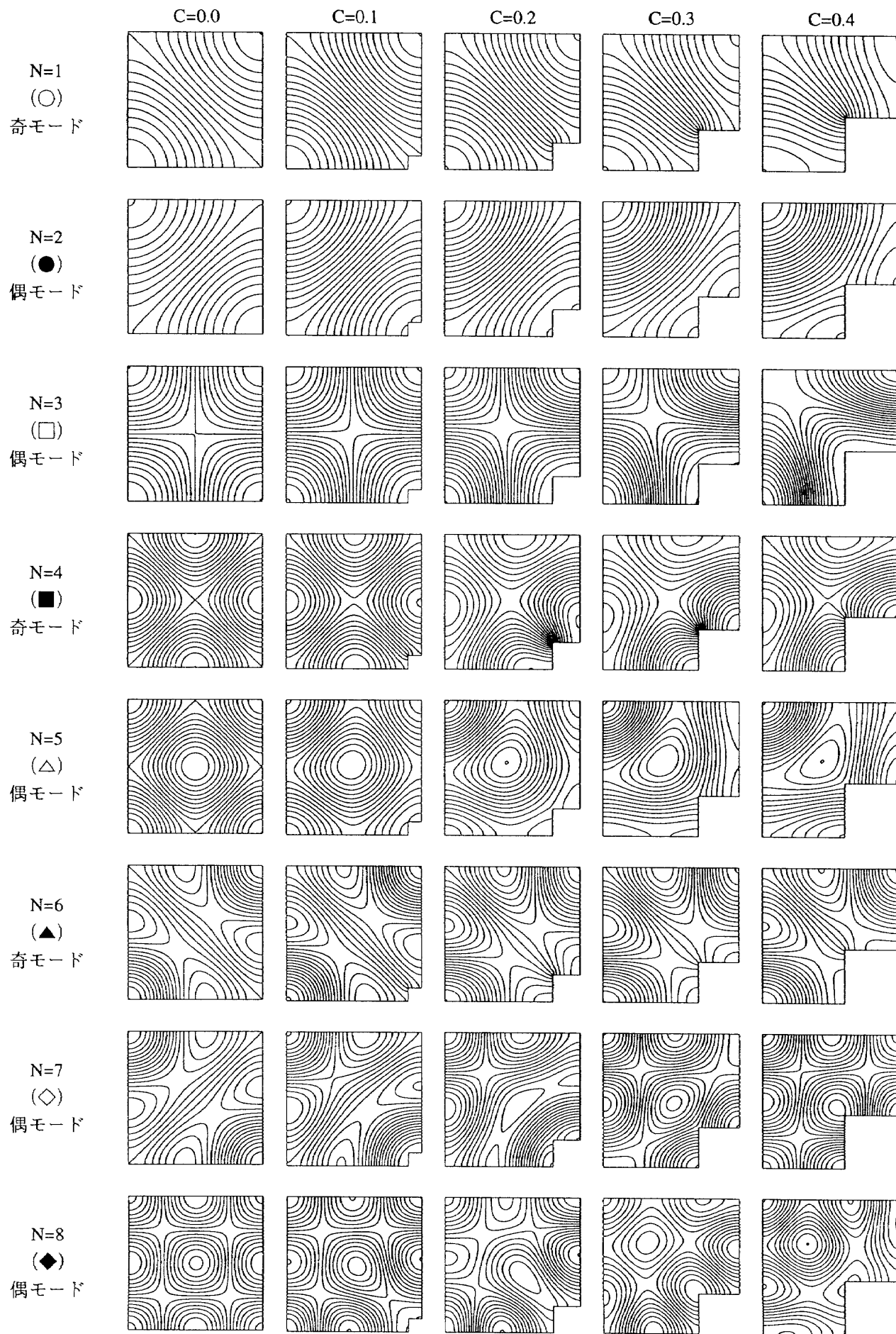


図10 角正方形切断正方形平面回路の固有モードの電圧分布(1) (N=1~8, C=0.1~0.4)

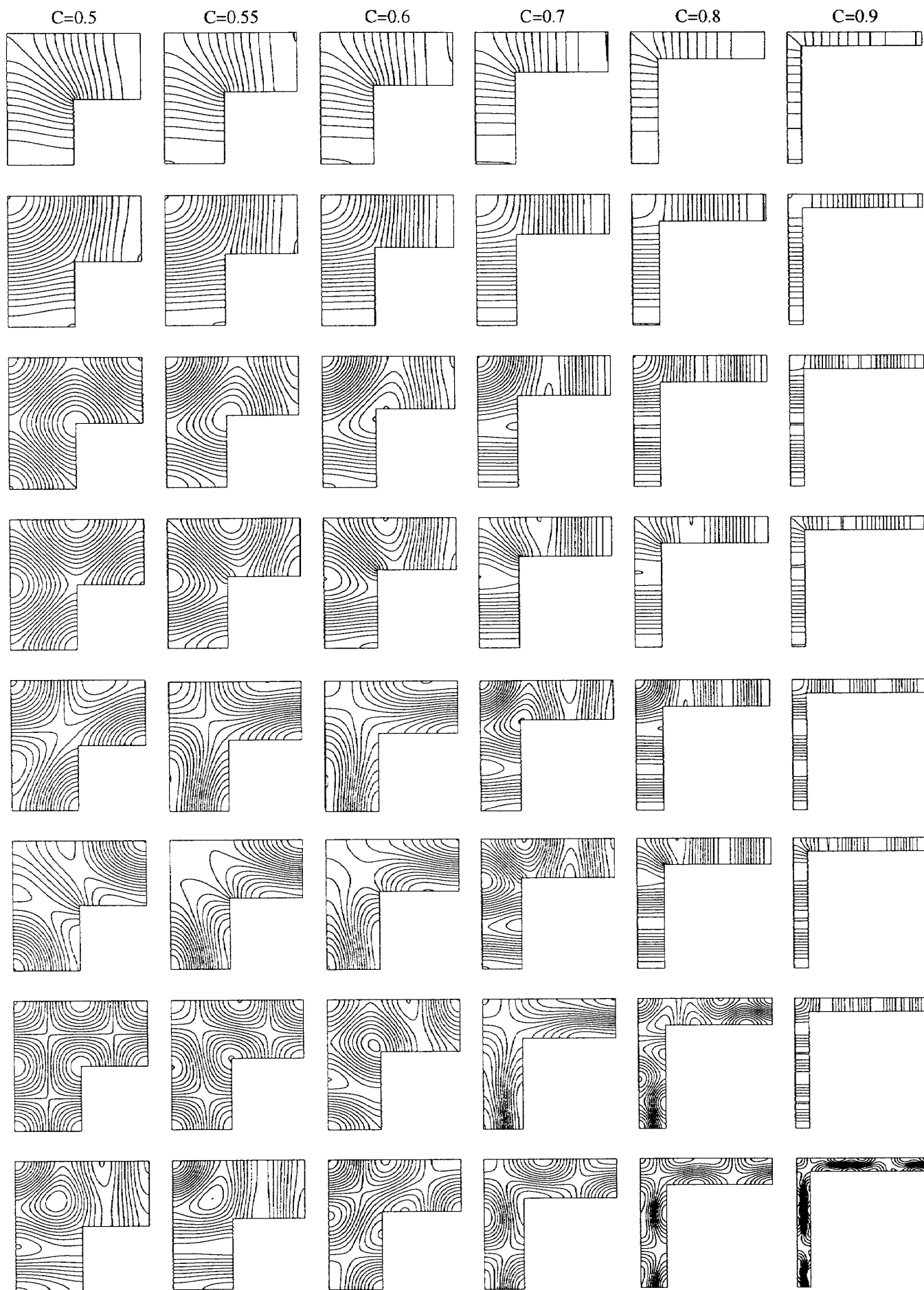


図10 角正方形切断正方形平面回路の固有モードの電圧分布(2) (N=1-8, C=0.4-0.9)

表2 角正方形切断(カットc) 正方形平面回路(一辺a)の固有値表 ( $K_N = k_{NA}$ )

モード 数	カット率 $C=c/a$																													
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95											
1	3.141393	3.138450	3.125890	3.093518	3.031773	2.938141	2.819960	2.689488	2.557295	2.429803	2.310020	2.198917	2.096455	2.002156	1.915384	1.835478	1.761812	1.693852	1.631316											
2	3.156754	3.198454	3.260263	3.336098	3.420266	3.507145	3.590941	3.665456	3.723973	3.759804	3.768028	3.747634	3.702077	3.637586	3.560815	3.477365	3.391366	3.305637	3.222002											
3	4.464007	4.521704	4.610481	4.730099	4.884389	5.080042	5.325417	5.627996	5.980996	6.283185	6.391786	6.319593	6.150327	5.93285	5.715548	5.493791	5.281030	5.080452	4.893833											
4	6.281591	6.257679	6.155031	5.939904	5.719065	5.607968	5.634301	5.784139	6.026702	6.283185	6.437435	6.580086	6.737099	6.864500	6.910383	6.863413	6.750482	6.603159	6.443128											
5	6.309993	6.364317	6.418746	6.464498	6.499077	6.518767	6.520397	6.512810	6.538616	6.749662	7.295944	8.088125	9.120593	9.542042	9.388140	9.106069	8.785635	8.463597	8.156000											
6	7.023215	7.000529	6.927035	6.847437	6.816969	6.821289	6.843927	6.880900	6.942734	7.091849	7.485782	8.185433	9.147567	9.595547	9.824222	10.020896	10.031799	9.882870	9.662459											
7	7.089290	7.259184	7.510421	7.819619	8.142751	8.381478	8.470484	8.523542	8.649307	8.885766	9.235914	9.370948	9.562341	10.639397	12.769618	12.602393	12.260209	11.840469	11.417572											
8	8.919819	8.978085	9.011766	8.847899	8.980833	9.262969	9.471006	9.485840	9.381832	9.238032	9.503820	9.503820	9.620665	10.689965	12.811198	12.894751	13.169059	13.131627	12.878989											
9	9.419327	9.327425	9.034671	9.092505	9.164611	9.299661	9.478785	9.584825	9.640678	9.663202	9.665767	9.906729	10.664080	11.806019	13.699977	15.864621	15.675972	15.207318	14.678284											
10	9.460796	9.519933	9.569126	9.610063	9.658669	9.765633	10.072038	10.578437	10.671858	10.675936	10.766234	10.949156	11.298066	12.005445	13.970953	15.887532	16.128292	16.330975	16.091570											
11	9.926603	9.833400	9.726446	9.714519	9.744412	9.835740	10.125750	10.661710	11.411606	11.979762	12.206222	12.486577	12.560420	12.771645	15.389157	16.593427	18.967613	18.558680	17.937843											
12	10.021872	10.237086	10.505558	10.728795	10.836454	10.909074	11.095638	11.190970	11.752669	12.566371	12.632264	12.538749	12.804084	12.883400	15.445781	16.756826	19.031840	19.458208	19.298853											
13	11.324389	11.284601	11.220500	11.239975	11.279212	11.291899	11.231485	11.443212	11.941196	12.566371	12.799135	12.892109	13.091906	13.969412	15.958562	17.941481	21.010257	21.885911	21.195915											
14	11.416757	11.610160	11.882717	12.249183	12.924037	12.627534	12.584004	12.584701	12.681490	12.883432	14.091368	14.415035	14.626326	14.950104	16.469549	18.181610	21.018198	22.499484	22.499217											
15	12.552907	12.308094	12.084615	12.287921	12.988732	12.668289	12.710779	12.710951	12.689369	12.898676	14.099265	15.399786	15.702999	15.805597	18.537944	19.034010	21.511264	25.174180	24.452109											
16	12.603966	12.645664	12.674521	12.707850	13.072072	13.175984	13.340626	13.370670	13.611610	14.021374	14.412670	15.965128	15.759582	15.921886	19.076139	19.046813	21.558230	25.479065	25.690692											
17	12.931953	12.789904	12.760925	12.799122	13.956654	13.329594	13.411978	13.617471	13.754815	14.022271	14.724402	15.984235	16.219502	16.682970	19.290947	19.918564	22.032208	28.394965	27.705959											
18	13.043110	13.145682	13.170664	13.113841	14.052887	13.452612	13.867226	14.186073	14.573471	15.076801	15.474977	17.024408	17.908828	18.300561	20.487718	20.694077	22.054617	28.460689	28.870888											
19	13.389027	13.548987	13.712125	13.830916	15.479482	14.244414	14.872455	15.439327	15.477429	15.296373	15.664933	17.046006	18.029328	18.908440	21.956982	21.927355	22.668069	31.487947	30.956893											
20	14.036871	13.924654	13.905473	13.972730	15.93741	14.224900	14.874286	16.006774	15.832230	15.900509	16.101799	17.955102	18.114842	18.920444	22.122440	22.229957	22.898644	31.492276	32.036975											
21	14.164366	14.468185	14.942482	15.307036	15.797293	15.349848	15.304189	16.043623	15.843445	15.988530	16.237826	17.994587	18.445015	19.639784	22.180288	23.479895	24.065055	31.833811	34.204197											
22	15.674668	15.264732	15.358879	15.691853	15.800740	15.819277	15.819673	16.706348	16.761454	16.942960	17.423261	18.802671	18.760458	21.025660	23.368683	24.778683	24.342057	31.867914	35.185785											
23	15.707944	15.704667	15.667403	16.036583	16.340253	15.825471	15.850305	16.820490	16.908487	17.374845	17.504222	18.977112	18.830162	21.031686	25.137777	25.082764	25.242370	32.500553	37.446958											
24	15.816339	15.863302	15.707381	16.039598	16.464502	15.857553	16.387234	16.978187	17.266522	17.737023	18.525627	19.588055	19.367288	21.430147	25.226269	25.380582	25.294560	32.588961	38.314211											
25	15.977506	15.876511	15.879246	16.875444	17.296268	16.410299	16.574152	18.359949	17.428478	18.801316	18.851667	19.821857	20.635322	21.549185	25.284529	26.343984	25.964993	33.461341	40.683978											
26	16.171179	16.468297	15.908124	16.942578	17.331448	16.684027	16.680135	18.363477	17.542995	18.801405	19.022791	20.885029	20.689184	21.759793	25.338618	27.561135	26.654807	33.598017	41.420073											
27	16.886746	16.756199	16.675603	17.565242	18.008064	17.788743	18.009863	18.861542	18.739748	19.018795	19.662115	20.983919	21.477640	21.978596	25.898364	28.338819	28.053639	34.479503	43.913652											
28	17.044543	17.325709	16.804437	18.198884	18.377343	17.947471	18.090686	18.956606	18.826125	19.029629	20.292498	22.055206	21.635636	22.249643	26.044845	28.446617	28.087505	34.509899	44.503555											
29	17.825255	17.929924	17.510226	18.273283	18.922170	18.188154	18.885725	19.384528	19.071288	19.450020	20.407008	22.134469	22.212963	22.271126	26.968261	29.289894	28.517012	34.938015	47.133763											
30	18.298068	18.124207	18.099478	18.899720	18.938716	18.299268	18.901155	19.502384	19.113299	20.322591	21.085453	23.298102	22.218166	23.395257	27.007854	30.316969	29.201348	35.210489	47.568712											