

## ストリップ線ステップ型不連続の等価回路表示 —多線条伝送線路, 多開口理想変圧器による—

許 瑞邦      平岡 隆晴

神奈川県工学部電気工学科

〒221-8686 横浜市神奈川区六角橋3-27-1

TEL : 045(481)5661      FAX : 045(491)7915

E-mail : kyo@kyolab3.cc4-4.kanagawa-u.ac.jp

あらまし    ストリップ線不連続問題は、1950年代以降ストリップ線回路、マイクロストリップ線回路の重要性より、多くの研究者により取り扱われ現在に至っている。これまでの手法ではストリップ線路不連続部で入出力応答がモード整合法等に基づいて数値計算されてきたが、この計算は入出力モード、不連続部の接続具合、寸法、周波数といった条件が変わる度毎に計算し直す必要があり、見通しの良い計算法とは言えない。この問題を解決するために、ここでは2次元近似が成立するストリップ線ステップ型不連続を取り挙げ、この等価回路が固有伝送モード展開に基づく多線条伝送線路と多開口理想変圧器に表現されることを示す。更に本等価回路のの妥当性・有効性を簡単な例で具体的に示した。

キーワード    ストリップ線, ステップ型不連続, 多線条伝送線路, 多開口理想変圧器

### Equivalent network representation for stripline step-type discontinuity - Multi-transmission line and Multi-port ideal transformer -

Hsu, Jui-Pang      Takaharu Hiraoka

Department of Electrical Engineering, Kanagawa University

3-27-1 Rokkakubashi Kanagawa-ku Yokohama 221 Japan

TEL : 045(481)5661      FAX : 045(491)7915

E-mail : kyo@kyolab3.cc4-4.kanagawa-u.ac.jp

Abstract    Stripline discontinuity problem has been investigated by many researchers since 1950 because of the importance of the stripline and/or microstrip-line circuit. So far, input/output response has been calculated numerically by mode matching or the other methods, but these calculation must be iterated depending on the input/output exciting mode, discontinuity situation, dimension and frequency. Hence, so far used methods do not seem to give good physical perspective. In order to solve these problems, equivalent network representation for stripline step-type discontinuity will be proposed based on expansion of eigen propagation mode, resulted in multi-transmission line and multi-port ideal transformer. Moreover, validity and usefulness of this equivalent network representation will be shown practically by simple example.

key words    Stripline, Step-type discontinuity, multi-transmission line, Multi-port ideal transformer

1. はじめに

図1に示すストリップ線不連続問題は、1950年代以降ストリップ線回路、マイクロストリップ線回路の重要性より、多くの研究者により取り扱われ<sup>(\*)</sup>現在に至っている。従来の取り扱いは、次のように整理できる。

A.2 次元電磁界近似

ストリップ線不連続問題は、本来3次元電磁界問題であるが、ストリップ線路が図2に示すように、実効幅 $\delta$ による平行平板線路で近似できることが指摘され<sup>(1)</sup>、これに基づくと図1の実線で示す各種不連続問題は、点線で示す2次元平面回路問題に近似される。また、マイクロストリップ線路でも同様の近似が可能であるとして<sup>(2)</sup>、2次元の取り扱いも提案・計算されている。ところで、2次元の境界条件付きMaxwell方程式の解法は、次のように分類できる。

A-1. ラプラスの解： 不連続部で生じる直流時の電磁界の乱れをラプラスの解より計算し、これに基づいて不連続に存在する付加的インダクタンス、電気容量を求める手法で、DC近傍の低周波（回路寸法 $\ll$ 波長）かつTEMあるいは準TEM動作では良い近似と考えられるが、マイクロ波・ミリ波といった高周波になると実際の乖離が大きくなると考えられる。

A-2 ヘルムホルツの解： 高周波でも適用できる解析法として、ストリップ線路の平行平板線路近似での固有伝送モード展開と不連続部での電磁界接線成分の連続性に基づく伝送モード振幅の計算（S行列の直接計算に相当）

B. 3次元電磁界としての取り扱い

ストリップ線/マイクロストリップ線不連続問題は本来3次元電磁界問題なので、3次元で取り扱うのは望ましい。特に、最近の計算機資源の低価格化、高性能化は大量の計算処理が必要な3次元電磁界の数値解析（モーメント法、有限要素法、FDTD、空間要素法）を現実的かつ有効な手法に変えつつあると考える。

ところでA-2. あるいはB. の手法でストリップ線路不連続部で入出力応答が数値的に計算可能<sup>(3)</sup>であるとしても、この計算は入出力モード、不連続部の接続具合、寸法、周波数といった条件が変わる度毎に計算し直す必要があり、高速計算が可能になったとはいえ、結構な計算時間を要し、また計算しないと結果がわからないといった欠点を有し、あまり見通しの良い計算法とは言えない。

この問題を解決するために、ここでは2次元近似が割合良く成立するストリップ線不連続を取り挙げ、図1(a)に示すステップ型不連続部の等価回路が固有伝送モード展開に基づく多線条伝送線路と多開口理想変圧器に表現されることを示す。更に簡単な不連続の例を取り挙げ、この等価回路に基づく計算手法の妥当性・有効性を示

(\*) ストリップ線およびマイクロストリップ線回路に関する研究は、IEEE, MTT, 電子情報通信学会, マイクロ波研究会等で多数発表されている。ここでは特に多くを引用しない。

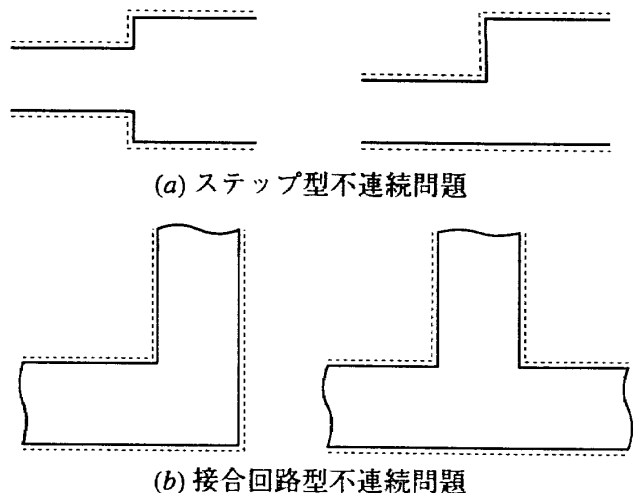


図1 ストリップ線不連続問題（実線）と平面回路近似（点線）

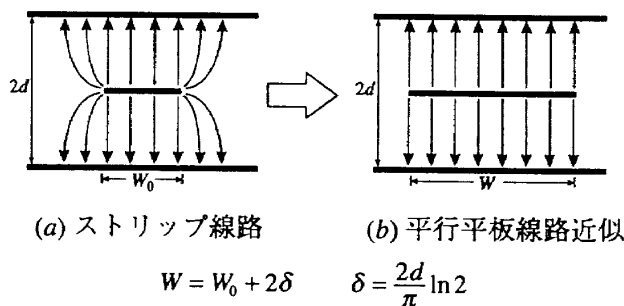


図2 ストリップ線路の平行平板線路近似

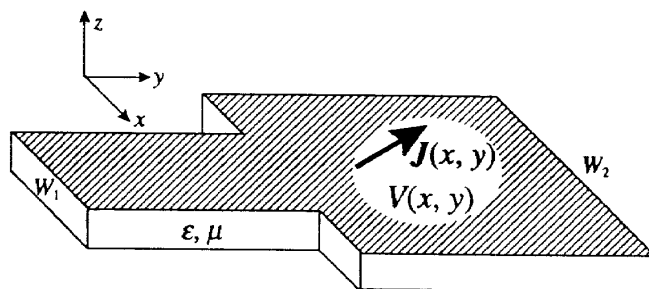


図3 ストリップ線ステップ型不連続の平面回路化

し、最後に本等価回路でどのような不連続問題が解析可能かを示す。

2. 不連続問題の平面回路方程式による定式化<sup>(4)</sup>

図1(a)に示すストリップ線不連続問題は、実効幅近似を適用すると2次元的に広がった図3に示す平面回路問題となり、電磁界成分 $E_z, H_x$ より平面回路電圧・電流密度を式(1)のように定義すると

$$V \equiv -E_z d, \quad J \equiv H_x \times k \tag{1}$$

平面回路方程式は、式(2)で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{grad}V &= -j\omega\mu J \\ \text{div}J &= -j\frac{\omega\epsilon}{d} V \end{aligned} \tag{2}$$

従って、図1点線で近似されたストリップ線不連続問題は、式(2)の平面回路方程式で与えられた励振条件および負荷条件で解く問題となり、最近の計算機資源の状況ではこの種の問題を直接数値的に解くことはそれ程難し

くないと考えるが、条件が変わるに毎に計算し直す必要がある上、数値計算はあまり見通しの良い手法とは言えない。

この点を改善する手法として、固有モード展開に基づく等価回路の考え方があり、ここでは図1(a)に示すストリップ線路ステップ型不連続部を取り挙げ、その等価回路が多線条伝送線路と多開口理想変圧器により図7の如く表されることを示す。

### 3. ストリップ線導波管の等価多線条伝送線路の導出

ストリップ線路の実効幅近似後の導波路幅を  $W$  とし、面内の座標を  $(x-y)$  の代わりに  $(\ell-s)$  の座標系を図4(a)に示すように定義すると、平面回路方程式に変数分離を適用し、 $s=0, W$  で磁気壁となっていることにより、 $p$  番目の伝送モードの電圧・電流分布は、次式で与えられる。

$$\begin{cases} V_p(\ell, s) = V_p(\ell) \cdot c_p(s) \\ J_{t_p}(\ell, s) = J_{t_p}(\ell) \cdot c_p(s) \\ J_{s_p}(\ell, s) = J_{s_p}(\ell) \cdot s_p(s) \end{cases} \quad (3)$$

但し、 $c_p(s)$ ,  $s_p(s)$  は  $p$  番目のモードの幅固有関数で、次式となる。

$$c_p(s) = \sqrt{\epsilon_p} \cos \frac{p\pi s}{W}, \quad s_p(s) = \sqrt{\epsilon_p} \sin \frac{p\pi s}{W} \quad (4)$$

また、式(3)の  $J_{t_p}(\ell)$  は、モード電圧  $V_p(\ell)$  より式(5)で与えられる。

$$J_{t_p}(\ell) = \frac{1}{j\omega\mu d} \frac{p\pi}{W} \cdot V_p(\ell) \quad (5)$$

従って、式(3)で長さ方向  $(\ell)$  のモード電圧関数  $V_p(\ell)$ 、モード電流密度関数  $J_{t_p}(\ell)$  が分かれば、平面回路内の電圧・電流分布（電磁界分布）が判明する。ところでモード電流密度  $J_{t_p}(\ell)$  に代わってモード電流  $I_p(\ell)$  を  $p$  番目の伝送モード電力が  $V_p(\ell) I_p(\ell)$  となるようにモード電流を  $I_p(\ell) \equiv J_{t_p}(\ell) \cdot W$  で定義すると長さ  $(\ell)$  方向のモード電圧  $V_p(\ell)$ 、モード電流  $I_p(\ell)$  は、次の伝送線路方程式を満たす。

$$\begin{cases} \frac{dV_p(\ell)}{d\ell} = -j\omega\mu \frac{d}{W} I_p(\ell) \\ \frac{dI_p(\ell)}{d\ell} = -j \frac{\beta_p^2 W}{\omega\mu d} V_p(\ell) \end{cases} \quad (6)$$

但し、 $\beta_p$  は  $p$  番目の伝送モードの位相定数

$$\beta_p^2 = k^2 - (p\pi/W)^2, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu, \quad (p=0, 1, \dots, \infty) \quad (7)$$

式(6)より  $p$  番目の伝送モードの伝送線路の直列リアクタンス  $X_p$ 、並列サセプタンス  $B_p$  は、式(8)となり、

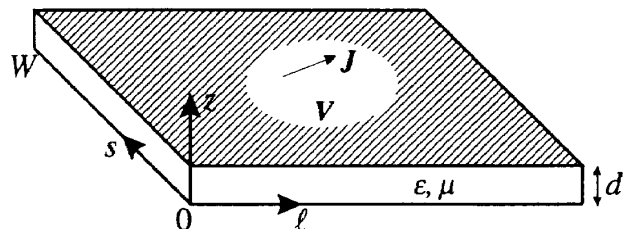
$$X_p = \omega\mu \frac{d}{W}, \quad B_p = \frac{\beta_p^2 W}{\omega\mu d} \quad (8)$$

$p$  番目の伝送モードのモード特性アドミタンス  $Y_{C_p}$ 、伝搬定数  $\gamma_p$  は、式(9)で与えられる。

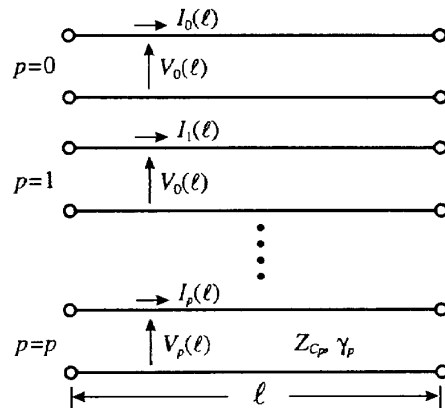
$$Y_{C_p} = \sqrt{\frac{B_p}{X_p}} = \frac{\beta_p W}{\omega\mu d} = \frac{\gamma_p W}{j\omega\mu d} = \frac{1}{Z_{C_p}} \quad (9)$$

$$\gamma_p = \sqrt{(jX_p)(jB_p)} = j\beta_p$$

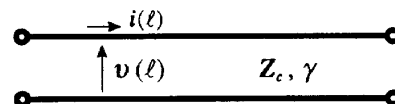
ところで、伝送モードは  $p=0, \dots, \infty$  まで存在するので、



(a) ストリップ線路（平行平板線路近似）



(b) 等価多線条伝送線路



(c) ベクトル表示

図4 ストリップ線路とその等価多線条伝送線路

図4(a)の等価回路は、図4(b)に示すように無限個のモードに対応した伝送線路となる。今後図4(b)の等価回路を同図(c)に示すように太線でベクトル的に示し、モード電圧・モード電流縦行列  $v(\ell)$ ,  $i(\ell)$  およびモード特性アドミタンス行列、伝搬定数行列を各々式(10)で定義する。

$$\begin{aligned} v(\ell) &= [V_0(\ell), V_1(\ell), \dots, V_p(\ell), \dots, V_\infty(\ell)]^T \\ i(\ell) &= [I_0(\ell), I_1(\ell), \dots, I_p(\ell), \dots, I_\infty(\ell)]^T \\ Z_C &= \text{diag}(Z_{C_0}, Z_{C_1}, \dots, Z_{C_p}, \dots, Z_{C_\infty}) \\ \gamma &= \text{diag}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p, \dots, \gamma_\infty) \end{aligned} \quad (10)$$

### 4. ステップ型ストリップ線不連続部の等価回路の導出

図5(a)に示すステップ型ストリップ線不連続構造で、幅  $W_1$  と幅  $W_2$  に線路部分は、3.の結果を用いると同図(b)に示す等価多線条伝送線路が得られ、各線路1,2の回路定数、モード幅固有関数、正規直交性も図5に示す。ここではステップ型不連続部で、開口モード電圧・モード電流間の関係を導出し、不連続部が多開口理想変圧器で表示されることを示す。

#### 4.1. 開口モード電圧間／開口モード電流間の関係導出

今、図5(a)に示す不連続部で開口1,2でのモード電圧・モード電流を  $V_p^1, I_p^1$  ( $p=0, \dots, \infty$ ),  $V_q^2, I_q^2$  ( $q=0, \dots, \infty$ ) とすると開口1,2での電圧分布、電流密度分布は固有幅関数

を用いて式(11),(12)で与えられる。

$$\begin{cases} V^1(s_1) = \sum_{p=0}^{\infty} V_p^1 \cdot c_p^1(s_1) \\ J_i^1(s_1) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{I_p^1}{W_1} \cdot c_p^1(s_1) \end{cases} \quad (11) \quad \begin{cases} V^2(s_2) = \sum_{q=0}^{\infty} V_q^2 \cdot c_q^2(s_2) \\ J_i^2(s_2) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{I_q^2}{W_2} \cdot c_q^2(s_2) \end{cases} \quad (12)$$

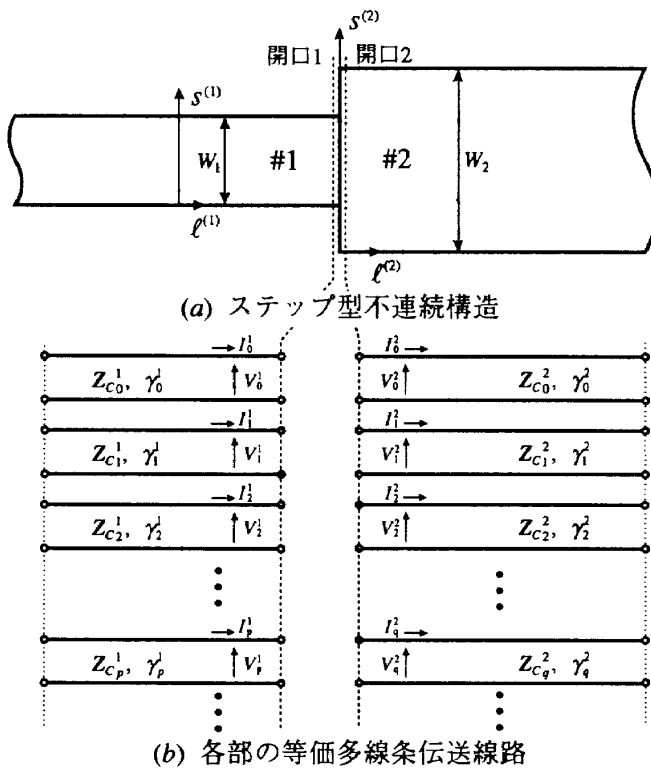
図5(a)に示す  $W_1 < W_2$  のステップ型不連続部では、 $0 < s_1 < W_1$  で電圧、電流密度が連続であり、 $0 < s_2 < W_2$  でそれ以外の部分は開放境界となっていることより、次の関係を満たす必要がある。

$$J_i^2(s_2) = \begin{cases} J_i^1(s_1) & (0 < s_1 < W_1) \\ 0 & (0 < s_2 < W_2 \text{ で上記以外}) \end{cases} \quad (13)$$

$$V^2(s_2) = \begin{cases} V^1(s_1) & (0 < s_1 < W_1) \\ ? & (0 < s_2 < W_2 \text{ で上記以外}) \end{cases} \quad (14)$$

\* この関係は不連続部両側の電磁界の接線成分が連続であることを意味している。

式(13),(14)および図5に示すモードの正規直交性より開口モード電流間/開口モード電圧間の関係が導かれる。



$$\begin{aligned} \gamma_p^1 &= \sqrt{\left(\frac{p\pi}{W_1}\right)^2 - k^2} & \gamma_q^2 &= \sqrt{\left(\frac{q\pi}{W_2}\right)^2 - k^2} \\ Z_{c_p}^1 &= \frac{j\omega\mu d}{\gamma_p^1 W_1} & Z_{c_q}^2 &= \frac{j\omega\mu d}{\gamma_q^2 W_2} \\ c_p^1(s_1) &= \sqrt{\epsilon_p} \cos \frac{p\pi}{W_1} s_1 & c_q^2(s_2) &= \sqrt{\epsilon_q} \cos \frac{q\pi}{W_2} s_2 \\ \frac{1}{W_1} \int_0^{W_1} c_p^1(s_1) c_p^1(s_1) ds_1 &= \delta_{pp'} & \frac{1}{W_2} \int_0^{W_2} c_q^2(s_2) c_q^2(s_2) ds_2 &= \delta_{qq'} \end{aligned}$$

(c) 各領域の回路定数 (モード伝搬定数, モード特性インピーダンス), モード幅固有関数, 正規直交性

図5 ストリップ線ステップ型不連続部の等価回路

①開口モード電流間の関係式 ( $I_p^1$  と  $I_q^2$ )

式(13)に式(11),(12)を代入すると

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{I_q^2}{W_2} \cdot c_q^2(s_2) = \begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{I_p^1}{W_1} \cdot c_p^1(s_1) & (0 < s_1 < W_1) \\ 0 & (0 < s_2 < W_2, \text{ 上記以外}) \end{cases} \quad (15)$$

$c_q^2(s_2)$  に関する正規直交性を用いると、次の関係を得る。

$$I_q^2 = \sum_{p=0}^{\infty} n_{qp}^{21} \cdot I_p^1 \quad (q = 0, \dots, \infty) \quad (16)$$

$$n_{qp}^{21} = \frac{1}{W_1} \int_0^{W_1} c_q^2(s_2) c_p^1(s_1) ds_1 \quad (17)$$

②開口モード電圧間の関係式 ( $V_p^1$  と  $V_q^2$ )

式(14)で  $0 < s_1 < W_1$  の間では、 $V^1(s_1) = V^2(s_2)$  となっていることにより

$$\sum_{p=0}^{\infty} V_p^1 \cdot c_p^1(s_1) = \sum_{q=0}^{\infty} V_q^2 \cdot c_q^2(s_2) \quad (0 < s_1 < W_1) \quad (18)$$

$c_p^1(s_1)$  に関する正規直交性を用いると、式(17)の関係をを用いて次式を得る。

$$V_p^1 = \sum_{q=0}^{\infty} n_{qp}^{21} \cdot V_q^2 \quad (p = 0, \dots, \infty) \quad (19)$$

#### 4-2. 開口モード電圧間・電流間関係式の行列表現

今、定義(10)に従って、開口1,2の開口モード電圧・電流縦行列を以下の如く定義すると、

$$\begin{cases} i^1 \equiv (I_0^1, \dots, I_p^1, \dots, I_\infty^1)^T \\ v^1 \equiv (V_0^1, \dots, V_p^1, \dots, V_\infty^1)^T \end{cases} \quad \begin{cases} i^2 \equiv (I_0^2, \dots, I_q^2, \dots, I_\infty^2)^T \\ v^2 \equiv (V_0^2, \dots, V_q^2, \dots, V_\infty^2)^T \end{cases}$$

式(16)と式(19)の関係は、行列式(20),(21)とまとめることができる。

$$\begin{bmatrix} I_0^2 \\ \vdots \\ I_q^2 \\ \vdots \\ I_\infty^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{00}^{21} & \dots & n_{0p}^{21} & \dots & n_{0\infty}^{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{q0}^{21} & \dots & n_{qp}^{21} & \dots & n_{q\infty}^{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{\infty 0}^{21} & \dots & \dots & \dots & n_{\infty \infty}^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0^1 \\ \vdots \\ I_p^1 \\ \vdots \\ I_\infty^1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} V_0^1 \\ \vdots \\ V_p^1 \\ \vdots \\ V_\infty^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{00}^{21} & \dots & n_{q0}^{21} & \dots & n_{\infty 0}^{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{0p}^{21} & \dots & n_{qp}^{21} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{0\infty}^{21} & \dots & \dots & \dots & n_{\infty \infty}^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^2 \\ \vdots \\ V_q^2 \\ \vdots \\ V_\infty^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

従って、今式(20)の行列を  $n^{21} = (n_{qp}^{21})$  と定義すると式(21)の行列は  $(n^{21})^T$  となり、式(20),(21)は次の行列関係式で表現される。(  $n = n^{21}$  )

$$\begin{aligned} i^2 &= n^{21} \cdot i^1 = n \cdot i^1 \\ v^1 &= (n^{21})^T \cdot v^2 = n^T \cdot v^2 \end{aligned} \quad (22)^{(5)}$$

#### 4-3. 多開口理想変圧器による不連続部の等価回路表示

式(16),(19)あるいは行列表現式(20),(21)で与えられる関係を理想変圧器を用いて表現すると、図6(b)の如くなる。この等価回路で開口2の  $q$  番目の伝送線路のモード電流は、開口1のモード電流と理想変圧器を介して接続されているので、式(16)'で与えられ、これは式(16)と一致している。

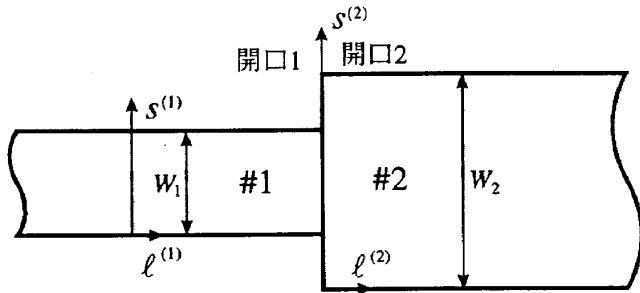
$$I_q^2 = n_{q0}^{21} \cdot I_0^1 + \dots + n_{qp}^{21} \cdot I_p^1 + \dots + n_{q\infty}^{21} \cdot I_\infty^1 \quad (16)'$$

また、開口1の  $p$  番目の伝送線路のモード電圧  $V_p^1$  は、開口2のモード電圧と理想変圧器を介して結合しているので、式(19)' で与えられ、これは式(19)と一致している。

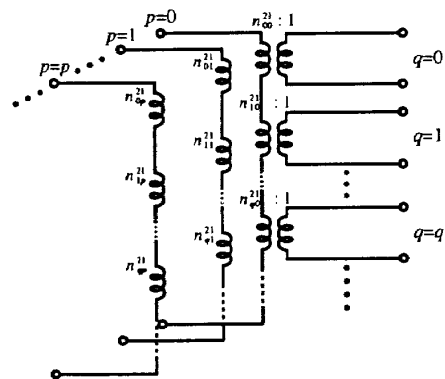
$$V_p^1 = n_{0p}^{21} \cdot V_0^2 + \dots + n_{qp}^{21} \cdot V_q^2 + \dots + n_{\infty p}^{21} \cdot V_\infty^2 \quad (19)'$$

式(16)' と(19)' はどんな  $p, q$  に対しても成立するので、図6(a)に示す理想変圧器による等価回路は、式(20),(21)の行列式を等価回路的に表現していることとなる。

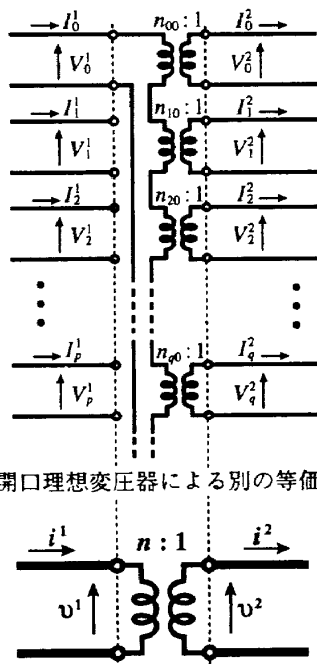
今後、図6(b)の代わりに同図(c)の表現あるいは同図(d)に示すように理想変圧器群を太線で表示し、対応し



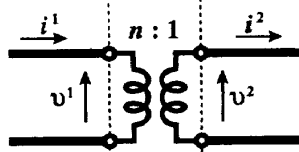
(a) ステップ型不連続



(b) 多開口理想変圧器による等価回路表現



(c) 多開口理想変圧器による別の等価回路表現



(d) 多開口の行列表示

図6 多開口理想変圧器による表示

た理想変圧器の変圧比は  $n : 1$  と行列表現で表す。

従って、ステップ型ストリップ線不連続部全体の等価回路は、図5の線路部も含めて、行列による太線表示を用いると図7(b)となる。

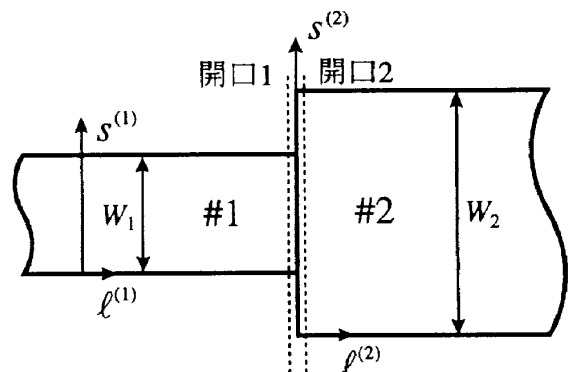
\* 回路理論によっては、理想変圧器行列を  $n' = n' = (n^{21})'$  と定義する場合があります、この時は式(22)の関係は、 $v' = n \cdot v^2, i^2 = n' \cdot i^1$  と表現される。

図7(b)の等価回路の形より、各ストリップ線路のモード特性インピーダンス、モード伝搬定数、理想変圧器の役割・意味が理解されやすく、また動作条件に対して応答がある程度予測・解析されるといった特長がある。特に本等価回路を用いると、

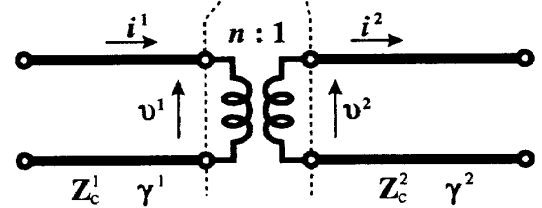
- ① TEM入力、高次モード入力、多モード入力といったどんな状況でも、必要な次数までのモード振幅を計算することができる。
- ② 更に対応した高次モードが、伝搬か非伝搬かにより、モードエネルギーが流出するのか蓄積されるのかの状況判断が可能である。
- ③ 但し、図7に示す無限個の伝送線路は、実際の計算では有限化しなくてはならないので、所要の計算精度を得るのにどの程度のモード次数までの伝送線路を考慮すべきかは問題である。

### 5. 回路励振時の解析

ストリップ線ステップ型不連続部の等価回路が図7と得られたので、この等価回路を用いて電圧散乱波行列、電力散乱波行列および動作時の電圧・電流分布 (= 電磁界分布) を如何に計算するかを示す。



(a) ステップ形不連続



(b) 行列表示

図7 ステップ型不連続部の等価回路 (行列表現)

### 5-1. 電圧散乱行列の計算

今、図8に示すステップ型不連続部の開口1,2にするモード電圧を一般的に入力波モード電圧縦行列 $A^1$ ,  $A^2$ とし、これに対し出力波モード電圧縦行列を $B^1$ ,  $B^2$ とすると各要素電圧波より、式(23)で定義される。

$$\begin{aligned} A^1 &= (A_0^1, \dots, A_p^1, \dots, A_\infty^1)^T & A^2 &= (A_0^2, \dots, A_q^2, \dots, A_\infty^2)^T \\ B^1 &= (B_0^1, \dots, B_p^1, \dots, B_\infty^1)^T & B^2 &= (B_0^2, \dots, B_q^2, \dots, B_\infty^2)^T \end{aligned} \quad (23)$$

入出力モード電圧波縦行列と開口1,2でのモード電圧・電流縦行列の間には式(24)の関係がある。

$$\begin{aligned} v^1 &= A^1 + B^1 & v^2 &= A^2 + B^2 \\ \bar{i}^1 &= Y_C^1(A^1 - B^1) & \bar{i}^2 &= Y_C^2(A^2 - B^2) \end{aligned} \quad (24)$$

ところで、図8に示す等価回路で多開口理想変圧器の性質より式(22)の関係があるので、代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} A^1 + B^1 &= n'(A^2 + B^2) \\ Y_C^2(A^2 - B^2) &= n \cdot Y_C^1(A^1 - B^1) \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)より式(26)で示す電圧散乱波行列 $S_V^{ij}$  ( $i, j=1,2$ )を求めることができるが、ここでは開口1励振で $S_V^{11}$ ,  $S_V^{21}$ , 開口2励振で $S_V^{22}$ ,  $S_V^{12}$ を別個に図8の等価回路より求める。

$$\begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_V^{11} & S_V^{12} \\ S_V^{21} & S_V^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

#### ① 開口1励振 ( $A^1 \neq 0, A^2 = 0$ )

開口1より開口2を見込んだときの入力モードインピーダンス行列 $\bar{Z}_m$ は、次の計算より式(27)と与えられる。

$$\begin{aligned} v^1 &= n' \cdot v^2 = n' \cdot (Z_C^1 \bar{i}^2) = n' Z_C^1 n \bar{i}^1 \\ \therefore \bar{Z}_m &= n' Z_C^2 n \end{aligned} \quad (27)$$

従って、正規化入力モードインピーダンス $\bar{\bar{Z}}_m$ を式(29)で定義すると $S_V^{11}$ は、回路理論より式(28)と与えられる。

$$S_V^{11} = (\bar{\bar{Z}}_m + I)^{-1} (\bar{\bar{Z}}_m - I) \quad (28)$$

$$\text{但し、} \bar{\bar{Z}}_m = \bar{Z}_m Y_C^1 = n' Z_C^2 n Y_C^1 \quad (29)$$

この場合、 $B^2$ は式(25)の第2式より次のように計算されるので $S_V^{21}$ は式(30)となる。

$$\begin{aligned} B^2 &= Z_C^2 n Y_C^1 (A^1 - B^1) = Z_C^2 n Y_C^1 (I - S_V^{11}) A^1 \\ \therefore S_V^{21} &= Z_C^2 n Y_C^1 (I - S_V^{11}) \end{aligned} \quad (30)$$

#### ② 開口2励振 ( $A^1 = 0, A^2 \neq 0$ )

開口2より開口1を見込んだときの入力モードアドミタンス $\bar{Y}_m$ は、次の計算より式(31)と与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{i}^2 &= n \cdot \bar{i}^1 = n \cdot Y_C^1 v^1 = n Y_C^1 n' v^2 \\ \therefore \bar{Y}_m &= n Y_C^1 n' \end{aligned} \quad (31)$$

従って、正規化入力モードアドミタンス $\bar{\bar{Y}}_m$ を式(33)で定義すると、 $S_V^{22}$ は回路理論より式(32)と与えられる。

$$S_V^{22} = (I + \bar{\bar{Y}}_m)^{-1} (I - \bar{\bar{Y}}_m) \quad (32)$$

$$\text{但し、} \bar{\bar{Y}}_m = Z_C^1 \bar{Y}_m = Z_C^1 n Y_C^1 n' \quad (33)$$

この場合、 $B^1$ は式(25)の第1式を用いて次のように計

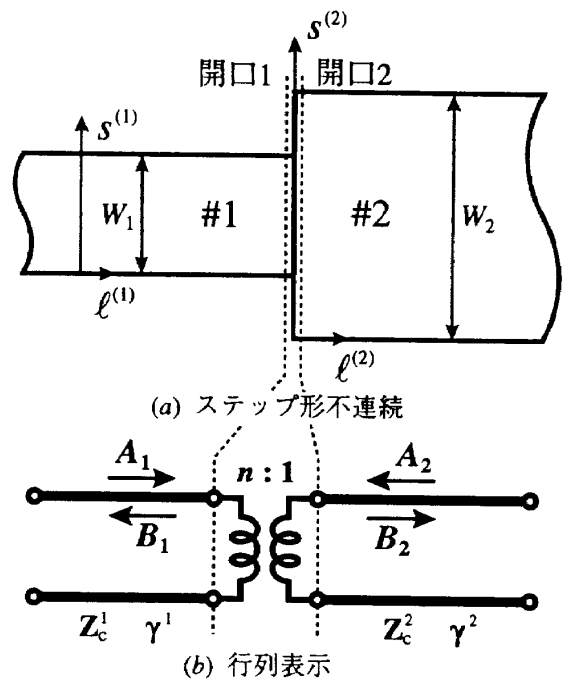


図8 ステップ型不連続部の等価回路と行列表現

算されるので、 $S_V^{12}$ は式(34)となる。

$$\begin{aligned} B^1 &= n'(A^2 + B^2) = n'(I + S_V^{22}) A^2 \\ \therefore S_V^{12} &= n'(I + S_V^{22}) \end{aligned} \quad (34)$$

以上整理すると、式(26)の電圧散乱行列は、次式のよう  
にまとめられる。

$$\begin{aligned} S_V^{11} &= (\bar{\bar{Z}}_m + I)^{-1} (\bar{\bar{Z}}_m - I) \\ S_V^{21} &= Z_C^2 n Y_C^1 (I - S_V^{11}) \\ S_V^{22} &= (I + \bar{\bar{Y}}_m)^{-1} (I - \bar{\bar{Y}}_m) \\ S_V^{12} &= n'(I + S_V^{22}) \end{aligned} \quad (35)$$

### 5-2. 電力散乱行列

出力モード電圧波の内、伝搬モードのみが出力として外部に取り出すことができるので、電力散乱行列の要素 $S_{pq}^{ij}$ は、入力モード電力 $= |A_q^i|^2 / \text{Re}(Z_{Cq}^i)$ 、出力モード電力 $= |B_p^j|^2 / \text{Re}(Z_{Cp}^j)$ となるので、式(35)で計算される電圧散乱行列の要素 $S_{pq}^{ij}$ を用いて、式(36)と計算される。

$$S_{pq}^{ij} = \sqrt{\frac{\text{Re}(Z_{Cq}^j)}{\text{Re}(Z_{Cp}^i)}} S_{V_{pq}}^{ij} \quad (36)$$

但し、 $Z_{Cp}^i, Z_{Cq}^j$ が虚数の場合、式(36)は定義されない。

### 5-3. 動作時の電圧・電流分布の計算

図8に示すストリップ線ステップ型不連続部での動作時の電圧・電流分布を求めるために、まずモード電圧波 $A_p^i$  ( $i=1, 2, p=0, \dots, \infty$ )に対する出力モード電圧波 $B_m^j$  ( $i=1, 2, m=0, \dots, \infty$ )を式(35)の要素を用いて式(37)で計算する。

$$\begin{aligned}
 B_m^1 &= \sum_{p=0}^{\infty} S_{V_{mp}}^{11} A_p^1 + \sum_{q=0}^{\infty} S_{V_{mq}}^{12} A_q^2 \\
 B_n^2 &= \sum_{p=0}^{\infty} S_{V_{np}}^{21} A_p^1 + \sum_{q=0}^{\infty} S_{V_{nq}}^{22} A_q^2
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

従って、ストリップ線路1,2でのモード電圧・モード電流分布  $V_m^1(\ell_1)$ ,  $I_m^1(\ell_1)$ ,  $V_n^2(\ell_2)$ ,  $I_n^2(\ell_2)$  は、式(38)で与えられる。

$$\begin{cases}
 V_m^1(\ell_1) = A_m^1 e^{-\gamma_m^1 \ell_1} + B_m^1 e^{\gamma_m^1 \ell_1} \\
 I_m^1(\ell_1) = Y_{C_m}^1 (A_m^1 e^{-\gamma_m^1 \ell_1} - B_m^1 e^{\gamma_m^1 \ell_1}) \\
 V_n^2(\ell_2) = A_n^2 e^{-\gamma_n^2 \ell_2} + B_n^2 e^{\gamma_n^2 \ell_2} \\
 I_n^2(\ell_2) = Y_{C_n}^2 (A_n^2 e^{-\gamma_n^2 \ell_2} - B_n^2 e^{\gamma_n^2 \ell_2})
 \end{cases}
 \tag{38}$$

従って、ストリップ線  $i=1, 2$  内での電圧・電流分布は式(38)と固有伝送モード関数  $c_m^i(s_i)$ ,  $s_m^i(s_i)$  を用いて式(39)で与えられる。

$$\begin{cases}
 V^i(\ell_i, s_i) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m^i(\ell_i) \cdot c_m^i(s_i) \\
 J^i(\ell_i, s_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_m^i(\ell_i)}{W_i} \cdot c_m^i(s_i) \\
 J^i(\ell_i, s_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{j\omega\mu d} \frac{m\pi}{W_i} V_m^i(\ell_i) \cdot s_m^i(s_i)
 \end{cases}
 \tag{39}$$

#### 5-4. 本解析法での問題点

不連続部の等価回路は、図7(b)に示すとおり、不連続部前後で無限個のモード対応等価伝送線路で構成されている。原理的には不連続部で無限次のモード振幅まで励振されるので、無限次まで考慮した計算が要求されるが、これは現実的に無理である。一般に高次モードなるほどモード振幅は小さくなるので、必要な計算精度が確保できるなら、それ以上の高次モードはモード振幅が小さいとして無視してもかまわないと考える。従って、所要計算精度を確保するためには、不連続部前後のストリップ線路でどの程度のモード次数まで考慮すべきなのが問題となる。この点は、次の具体例で検討する。

#### 6. 具体的適用例

図9(a)に示すステップ型不連続形状寸法に、これまで説明した図7の等価回路を適用し、S行列の周波数特性、動作時の電圧分布・電流密度分布、不連続部での電圧・電流密度の接続具合を考慮モード次数をパラメータとして計算し、所要モード次数を検討した。

#### 6-1. S 行列の周波数特性

不連続部前後のストリップ線での考慮モード次数をパラメータとして、S行列の要素  $S_{p00}^{11}$ ,  $S_{p00}^{21}$  の周波数特性の計算結果を図9(b)に示す。細い線路で3次、太い線路で12次まで考慮するとほぼ周波数特性は収束している。図中(p, q)は、線路1,2での考慮モード次数を意味する。また、低周波では少ないモード次数でもかなり収束していることがわかる。

#### 6-2. 高周波電圧・電流分布と不連続部での電圧・電流分布の接続具合

単位振幅を持ったTEM波を開口1より入力したとき、および開口2より入力したときの不連続部前後での高周波電圧・電流分布は、式(39)に従って計算できる。図9は、開口1単位電圧入力に対する6GHzの高周波電圧分布(c)と接続部での電圧・電流密度接続具合(d, e)を示す。高周波電圧分布は、高次モード次数(3, 12)の結果で、これ以上モード次数を上げて分布はそれ程変わらない。また、不連続部での電圧分布の接続具合は、考慮モード次数(3, 12)に対して図12に示すように全体としてはほぼ連続となっているが、拡大すると図の挿入図の如くなり必ずしも連続になっているとはいえない。これは考慮モード数不足によるものでもっと高次までのモードを考慮すれば連続性はより確実に実現する。開口2よりのTEM入力に対しても同様の結果が得られている。

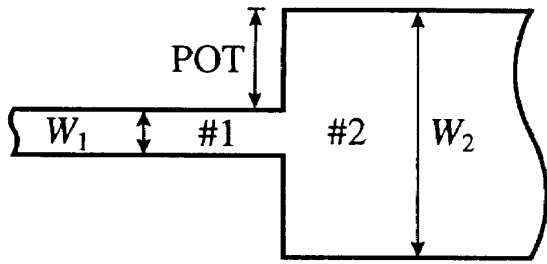
#### 7. むすび

本研究では、ストリップ線ステップ型不連続の取り扱いに関して、次の点を明らかにした。

- (1)不連続部は、不連続部前後の線路の無限個の固有伝送モードに対応した伝送線路同士が多開口理想変圧器(今回は原理的には無限個の開口)で接続された等価回路で表現されることを示し、またこの等価回路の簡潔なベクトルの表現を提案した(等価回路)。
  - (2)本手法を実際の回路に適用する場合、考慮する伝送モードの有限個化を計る必要がある(モード数有限化)。
  - (3)また、この等価回路を解くことで、動作時の電磁界分布が得られることを示した(電磁界分布と入出力特性)。
  - (4)本手法を具体的な回路に適用し、入出力周波数特性、高周波電圧分布を考慮モード次数をパラメータとして計算し、比較的到低次のモードを考慮するだけで、ある程度の精度で計算できることを示した(妥当性・有効性)。
- 今後は、図10に示す各種ステップ型不連続問題に本論を適用したいと考えている。

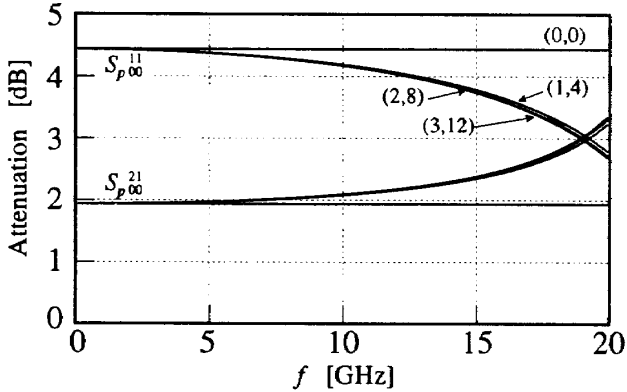
#### 参考文献

- (1) Oliner, A.A. "Equivalent circuits for discontinuities in balanced strip transmission line", IRE Trans. MTT-3, pp134-143 1955
- (2) Wolff, I, Kompa, G, Rehman, R "Calculation method for microstrip discontinuities and T-junctions", Electronic Letters, pp177-179, vol.8, No.7, April 1972
- (3) Hoffmann, R.K. "Handbook of Microwave Integrated Circuits", chap.10, pp267-309, Artech House
- (4) 許 瑞邦「電磁波回路問題の実際 一山下編」第6章 pp218-242 電子情報通信学会
- (5) この関係式は、多くの研究者により導出されている。例えば、
  1. Ma, Z. et al "Transverse Scattering Matrix Formulation for a Class of Waveguide Eigenvalue Problems" IEEE MTT vol.41 pp1044-1051
  2. 1995 IEEE MTT-s WS "Modeling of Microwave Filters and Passive Components" BAUDRAND et al and SORRENTINO
  3. 宮崎他 「無調整導波管フィルタの設計」 EMT95-99
 (この種の関係式が記載された論文名をお知らせ下さい)

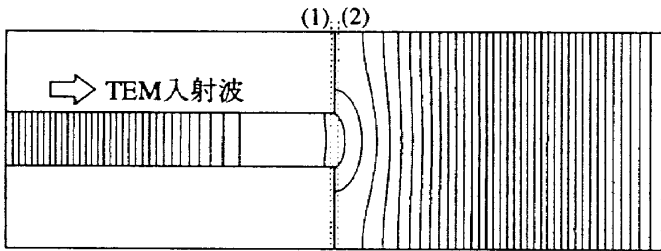


$W_1=2\text{ mm}$ ,  $W_2=8\text{ mm}$ ,  $POT=3\text{ mm}$ ,  $EPSR=2.62$ ,  $D=1.45\text{ mm}$

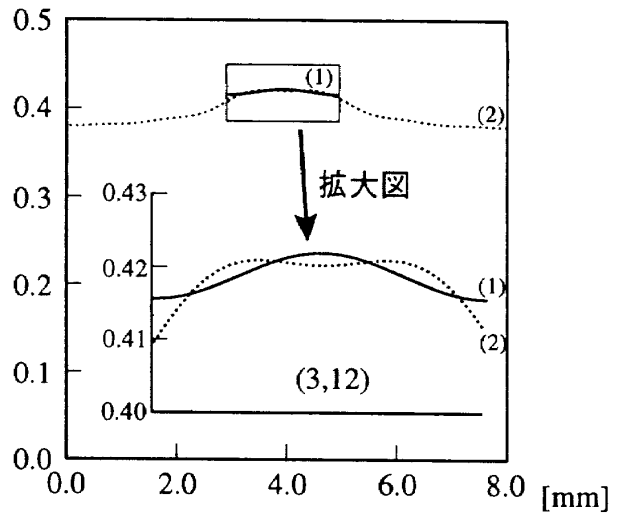
(a) ストリップ線ステップ型不連続の形状・寸法



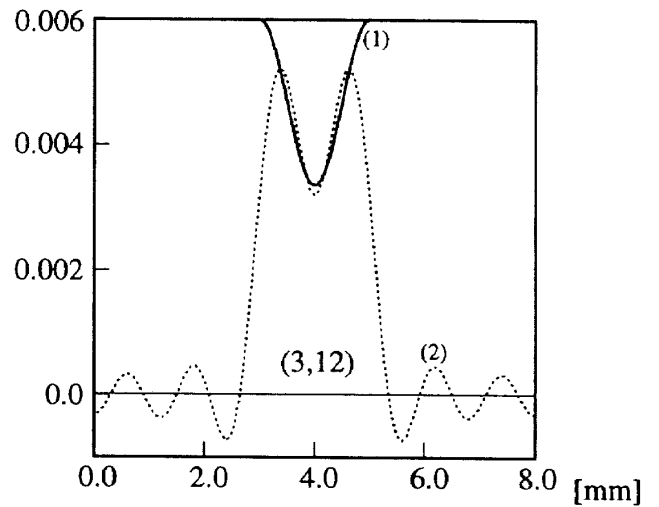
(b) 考慮高次伝送モード次数に対する  $S_p$  行列の収束状況



(c) 動作時(6GHz)の高周波電圧分布 ((3,12), 0位相)



(d) 不連続部での電圧分布接続具合



(e) 不連続部での電流密度分布接続具合

図9 開口1TEM単位入力時の入出力特性・高周波電圧分布・不連続部での電圧分布/電流密度分布接続具合 (6GHz)  
(p, q)は領域1,2での(#1側,#2側)の考慮モード次数

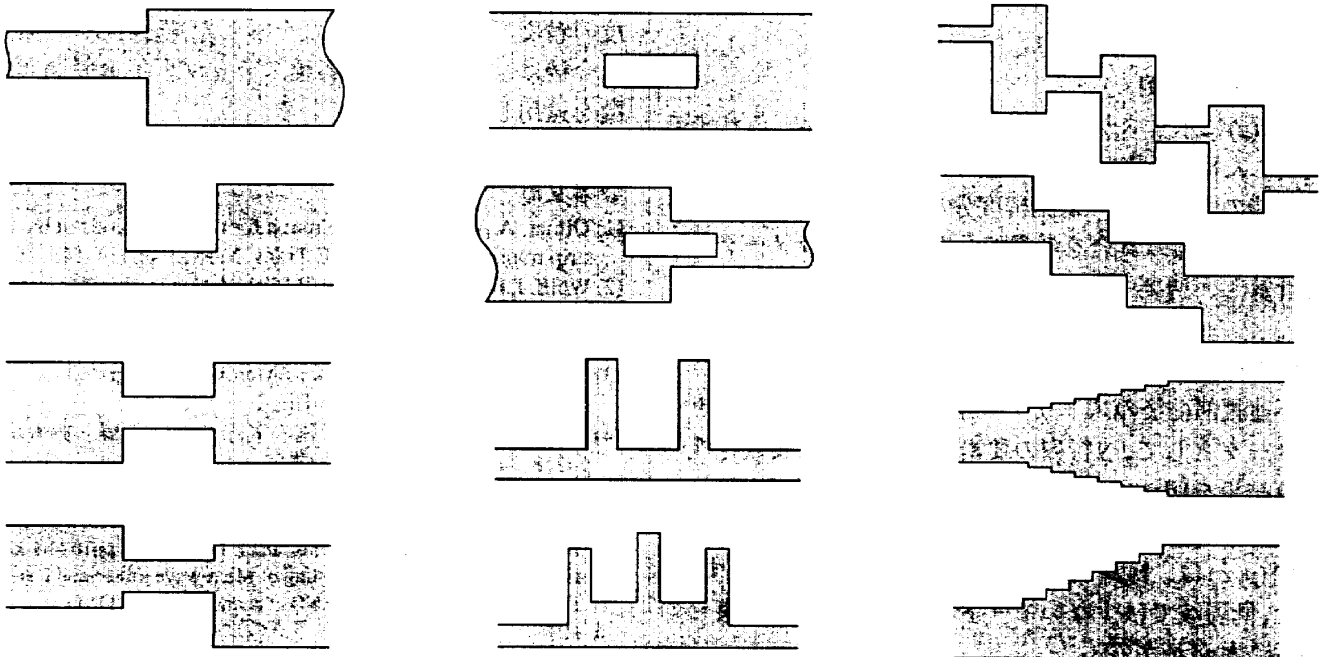


図10 各種ステップ型不連続問題