

## 三次元光導波路ステップ型一様不連続部での横方向等価回路の導出 —平面回路方程式及びモード整合法に基づく—

辻 健一                      平岡 隆晴                      許 瑞邦

神奈川大学 工学部 電気電子情報工学科  
〒 221-8686 横浜市神奈川区六角橋 3-27-1  
TEL : 045(481)5661                      FAX : 045(491)7915  
E-mail : tsuji@kyolab2.ee.kanagawa-u.ac.jp

**あらまし**                      三次元光導波路では構造上生じる高さ方向及び、横方向不連続部を考慮しなければならない。従来、高さ方向不連続はスラブモード展開による多線条伝送線路で、また横方向の不連続は各スラブモードのモード結合を表す数学的関係式で取り扱われている。しかし、不連続部の等価回路を求めることは三次元光導波路での電磁界解析及び、導波路設計に物理的意味合いを持たせることで有益である。従って、本研究では三次元光導波路を解析する上で生じるスラブモード対応横方向多線条伝送線路がステップ型一様不連続部でどのように結合するかの等価回路を導出する。結論としてモード変換アドミタンス及びモード結合を示す理想変圧器で表現できる。また、具体的な構造に適用し、本等価回路の妥当性を検証すると共に各種の三次元光導波路に適用できる事を示した。

キーワード 平面回路方程式, モード変換係数, モード変換アドミタンス, モード整合法, スラブモード展開

### Derivation of the Lateral Equivalent Network for Three Dimension Optical Waveguide Uniform Step Discontinuity By Planar Circuit Equation and Mode Matching Method

Ken'ichi Tsuji                      Takaharu Hiraoka                      Hsu, Jui-Pang

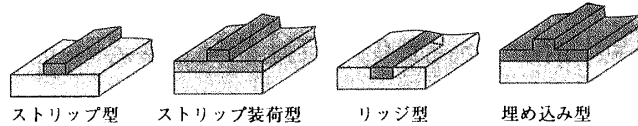
Department of Electrical, Electronics and Information Engineering  
Kanagawa University  
3-27-1 Rokkakubashi Kanagawa-ku Yokohama 221-8686 Japan  
TEL : +81-45(481)5661                      FAX : +81-45(491)7915  
E-mail : tsuji@kyolab2.ee.kanagawa-u.ac.jp

**Abstract**                      In the analysis of three-dimensional (3D) optical waveguide, the discontinuity in height and lateral direction must be considered. So far this discontinuity in height direction is treated by slab mode expansion which leads to the mode corresponding equivalent multi-transmission line in lateral direction; the step discontinuity in lateral direction is described by mathematical relation of slab mode coupling equation. However, it is useful for field analysis and waveguide design to introduce the equivalent network for step discontinuity instead of mathematically described slab mode coupling equation, because equivalent network can describe the physics in optical waveguide. Therefore, in this report, the equivalent network for uniform step discontinuity in lateral direction is derived, which consists of mode conversion admittance and ideal transformer for mode coupling and describes how the slab mode corresponding multi-transmission line at both sides of the step will couple mutually. Also, the equivalent network for step is proved to be valid by practical calculation step discontinuity and proved to be valid, and is applied for analysis of 3D optical waveguide with success.

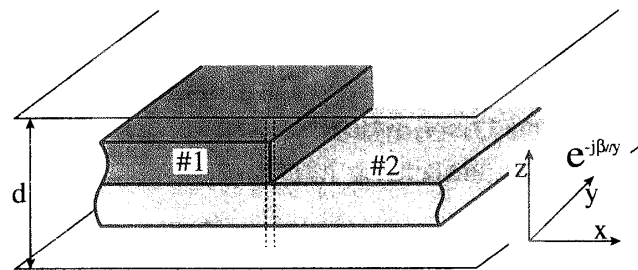
Key words Planar circuit equation , Mode conversion coefficient , Mode conversion admittance , Mode matching method , Slab mode expansion

1. はじめに

三次元光導波路には図1-(a)に示すような様々な形状の導波路が存在する。これら導波路全ての構造に見られる図1-(b)に示す横方向閉じ込め用ステップ型一様不連続部について考える。従来、このステップ型一様不連続部横方向等価回路の取り扱いが多線条伝送線路及び、不連続部における数学的關係式のみで記述されるモード結合方程式として解析されている。しかし、三次元光導波路の解析で等価回路を用いることは三次元光導波路の電磁界解析及び、導波路設計で物理的意味合いを持たせる事ができる点で有益であると考えられる。従って、ここでは三次元光導波路解析上生じるステップ型一様不連続部横方向等価回路を平面回路方程式より計算される平面回路の電圧、電流及び磁圧、磁流に基づく電磁界成分及び、電磁界成分の接線成分の連続性・モードの直交性から厳密に導出する。また、本等価回路の妥当性について検証するため、等価回路定数の計算を行い、従来法である数学的關係式と比較する。更に本等価回路を実際の三次元光導波路へ適用する。ここで、伝搬定数及び、電磁界分布の計算を行い、これらの結果もまた従来法と比較し、本等価回路の有効性を確認する。



(a) 三次元光導波路構造の一例



(b) ステップ型一様不連続部の三次元光導波路構造

図1 三次元光導波路構造

2. スラブモード展開—横方向伝送線路方程式の導出—

図1-(b)において連続スペクトルを離散化するために上下に導体壁を設置する。電磁界表示は無数の  $TE(H)$ ,  $TM(E)$  モードで、各モードはマクスウェル方程式に変数分離法を適用し表示される。面関数  $(x, y)$  を電圧/電流、磁圧/磁流のモード対応平面回路、高さ関数  $(z)$  を  $fgh$  関数を用いた等価伝送線路で表記する。横  $(x)$  方向等価伝送線路では伝搬方向に  $e^{j\beta_0 y}$  を仮定し、無数の  $TE(H)$ ,  $TM(E)$  モードの多線条伝送線路として考える。以上からスラブモード展開に基づく横方向伝送線路方程式を導出する。

2.1 面関数  $(x, y)$  と高さ関数  $(z)$  の導出

マクスウェル方程式は(1)式のように与えられる。(1)式に変数分離法を適用することにより、マクスウェル方程式は  $TE(H)$ ,  $TM(E)$  モード各々の横方向関数である面関数  $(x, y)$  と高さ関数  $(z)$  に分離して考えることができる。

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $TE(H)$  モードにおける変数分離表現は(2), (3), (4)式ようになる。この変数分離法を(1)式のマクスウェル方程式に適用することにより面関数  $(x, y)$  は(5), (6), (7)式のように求まり、高さ関数  $(z)$  は(8), (9), (10)式のように求まる。同様に、 $TM(E)$  モードにおける変数分離表現は(11), (12), (13)式のように与えられ、(1)式に適用すると面関数  $(x, y)$  は(14), (15), (16)式のように求まり、高さ関数  $(z)$  も(17), (18), (19)式のように求まる。これらをまとめると表1のようになる。

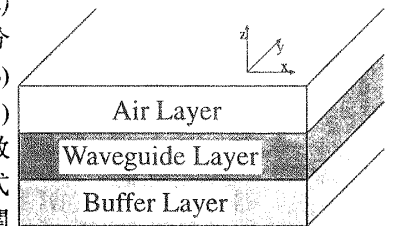


図2 スラブ型導波路構造

2.1.1 高さ関数  $(z)$

図2に示すような高さ構造での高さ関数  $fgh$  は  $TE(H)$  モードにおいて表1の(8)~(10)式、 $TM(E)$  モードにおいては(17)~(19)式で求めることができる。高さ方向の

	変数分離法	面関数 $(x, y)$	高さ関数 $(z)$
$TE$ モード	$\mathbf{E}_t(x, y, z) = \mathbf{E}_t^H(x, y) f_m^H(z) \quad (2)$	$\nabla_t \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_t^H(x, y)] = j\omega\mu H_z^H(x, y) \quad (5)$	$g^H(z) = f^H(z) \quad (8)$
	$H_z(x, y, z) = H_z^H(x, y) g_m^H(z) \quad (3)$	$\mathbf{H}_t^H(x, y) = -\frac{1}{j\eta_0} \{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_t^H(x, y)\} \quad (6)$	$\frac{df^H(z)}{dz} = k_0 \cdot h^H(z) \quad (9)$
	$\mathbf{H}_t(x, y, z) = \mathbf{H}_t^H(x, y) h_m^H(z) \quad (4)$	$\nabla_t H_z^H(x, y) = -\frac{\beta_t^2}{j\omega\mu} \{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_t^H(x, y)\} \quad (7)$	$\frac{dh^H(z)}{dz} = -\frac{k_0^2 \epsilon_s(z) - \beta_t^2}{k_0} f^H(z) \quad (10)$
$TM$ モード	$\mathbf{H}_t(x, y, z) = \mathbf{H}_t^E(x, y) f_n^E(z) \quad (11)$	$\nabla_t E_z^E(x, y) = -\frac{\beta_t^2}{j\omega\epsilon_0} \mathbf{H}_t^E(x, y) \times \mathbf{k} \quad (14)$	$g^E(z) = \frac{1}{\epsilon_s(z)} f^E(z) \quad (17)$
	$E_z(x, y, z) = E_z^E(x, y) g_n^E(z) \quad (12)$	$\nabla_t \cdot [\mathbf{H}_t^E(x, y) \times \mathbf{k}] = j\omega\epsilon_0 E_z^E(x, y) \quad (15)$	$\frac{df^E(z)}{dz} = k_0 \cdot \epsilon_s(z) \cdot h^E(z) \quad (18)$
	$\mathbf{E}_t(x, y, z) = \mathbf{E}_t^E(x, y) h_n^E(z) \quad (13)$	$\mathbf{E}_t^E(x, y) = j\eta_0 \{\mathbf{H}_t^E(x, y) \times \mathbf{k}\} \quad (16)$	$\frac{dh^E(z)}{dz} = \frac{k_0^2 \epsilon_s(z) - \beta_t^2}{k_0 \cdot \epsilon_s(z)} f^E(z) \quad (19)$

表1 変数分離法を用いた面関数  $(x, y)$  と高さ関数  $(z)$

境界条件を満足させた場合、次の直交性が存在する。

$$\frac{1}{d} \int_0^d g_m^H(z) \cdot f_p^H(z) dz = \frac{1}{d} \int_0^d g_m^E(z) \cdot f_p^E(z) dz = 0 \quad (p \neq m)$$

また、高さ関数の大きさを揃えるために次の正規化を施すと、 $fgh$  関数は一意的に決定される。

$$\frac{1}{d} \int_0^d g_m^H(z) \cdot f_p^H(z) dz = \frac{1}{d} \int_0^d g_m^E(z) \cdot f_p^E(z) dz = 1 \quad (p = m)$$

従って、高さ関数は次の正規直交系をなしている。

$$\frac{1}{d} \int_0^d g_m^H(z) \cdot f_p^H(z) dz = \frac{1}{d} \int_0^d g_m^E(z) \cdot f_p^E(z) dz = \delta_{m,p} \quad (20)$$

### 2.1.2 面関数(x,y) (平面回路方程式)

TE(H), TM(E) モードの電圧/電流、磁圧/磁流を(21), (22)式のように定義し、変数分離法に適用すると表2に示される(23), (24)式のように各成分を求めることができる。ここで、図3のような境界条件を持つ場合、領域1, 領域2においてそれぞれ同成分が存在するとして、各領域の  $E_x, H_x, E_y, H_y, E_z, H_z$  成分はそれぞれ各領域番号を  $i$  ( $i=1$  or  $2$ ) として、それぞれをまとめると(25)~(30)式として表現することができる。

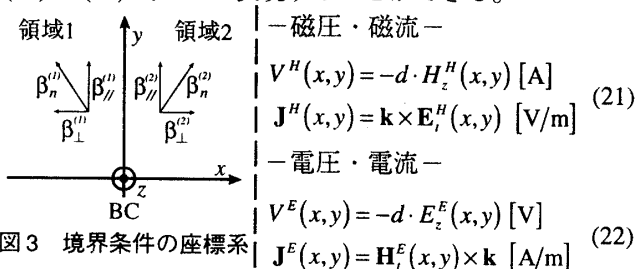


図3 境界条件の座標系

$$H_z^i = -\sum_m \frac{V_m^{iH}(x,y)}{d} g_m^{iH}(z) \quad (25)$$

$$E_z^i = -\sum_n \frac{V_n^{iE}(x,y)}{d} g_n^{iE}(z) \quad (26)$$

$$H_x^i = -\frac{1}{j\eta_0} \sum_m J_{xm}^{iH}(x,y) h_m^{iH}(z) - \sum_n J_{yn}^{iE}(x,y) f_n^{iE}(z) \quad (27)$$

$$H_y^i = -\frac{1}{j\eta_0} \sum_m J_{ym}^{iH}(x,y) h_m^{iH}(z) + \sum_n J_{xn}^{iE}(x,y) f_n^{iE}(z) \quad (28)$$

$$E_x^i = \sum_m J_{ym}^{iH}(x,y) f_m^{iH}(z) + j\eta_0 \sum_n J_{xn}^{iE}(x,y) h_n^{iE}(z) \quad (29)$$

$$E_y^i = -\sum_m J_{xm}^{iH}(x,y) f_m^{iH}(z) + j\eta_0 \sum_n J_{yn}^{iE}(x,y) h_n^{iE}(z) \quad (30)$$

TE(H) モード	TM(E) モード
$E_z^E(x,y,z) = -\frac{V^E(x,y)}{d} \cdot g_n^E(z)$	$H_z^H(x,y,z) = -\frac{V^H(x,y)}{d} \cdot g_m^H(z)$
$H_x^E(x,y,z) = -J_y^E(x,y) \cdot f_n^E(z)$	$E_x^H(x,y,z) = J_y^H(x,y) \cdot f_m^H(z)$
$H_y^E(x,y,z) = J_x^E(x,y) \cdot f_n^E(z)$	$E_y^H(x,y,z) = -J_x^H(x,y) \cdot f_m^H(z)$
$E_x^E(x,y,z) = j\eta_0 J_x^E(x,y) \cdot h_n^E(z)$	$H_x^H(x,y,z) = -\frac{1}{j\eta_0} J_x^H(x,y) \cdot h_m^H(z)$
$E_y^E(x,y,z) = j\eta_0 J_y^E(x,y) \cdot h_n^E(z)$	$H_y^H(x,y,z) = -\frac{1}{j\eta_0} J_y^H(x,y) \cdot h_m^H(z)$

表2 各領域での平面回路電圧/電流、磁圧/磁流による電磁界成分表示

### 2.2 一様領域での横方向等価伝送線路の導出

次に図1(b)に示したステップ型一様不連続部の領域1, 領域2をそれぞれ図4に示す一様な領域として考える。伝搬方向に  $e^{j\beta_y y}$  を仮定し、(31)式の平面回路方程式と(32)式モード電圧・電流を用いて進行方向伝搬定数  $\beta_{cn}$ , 面特性アドミタンス  $Y_{cn}$ , 面位相定数, 垂直方向位相定数  $\beta_{n\perp}$ , 垂直方向特性アドミタンス  $Y_{cn\perp}$ , 伝搬方向特性アドミタンス  $Y_{cn\parallel}$  の横方向等価伝送線路をそれぞれ導出し、その結果を表3に示す。

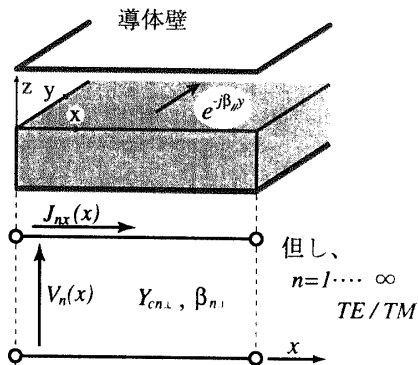


図4 一様領域での導波路

$$\begin{cases} \text{grad } V_n = -jXJ_n \\ \text{div } J_n = -jBV_n \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} V_n(x,y) &= V_n(x)e^{-j\beta_n y} \\ J_n(x,y) &= J_n(x)e^{-j\beta_n y} \end{aligned} \quad (32)$$

	TE(H)	TM(E)
★平面回路 ( $i$ : 領域番号, $n$ : モード番号 E/H)		
面特性アドミタンス	$Y_{cn}^{iH} = \eta_0 \frac{k_0}{\beta_m^{iH}} \cdot \frac{1}{d} [\Omega/m]$	$Y_{cn}^{iE} = \frac{1}{\eta_0} \frac{k_0}{\beta_m^{iE}} \cdot \frac{1}{d} [S/m]$
面位相定数	$\beta_m^{iH}$	$\beta_m^{iE}$
但し、 $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu}$ , $\eta_0 = \sqrt{\mu/\epsilon_0} [\Omega]$ ( $n=1,2,3$ )		
★平面導波路 ( $\beta_y = \beta_{//}$ : 進行方向伝搬定数で共通)		
垂直(x)方向位相定数	$\beta_{n\perp}^{iH} = \sqrt{(\beta_m^{iH})^2 - \beta_{//}^2}$	$\beta_{n\perp}^{iE} = \sqrt{(\beta_m^{iE})^2 - \beta_{//}^2}$
垂直方向(x)特性アドミタンス	$Y_{cn\perp}^{iH} = Y_{cn}^{iH} \cdot \frac{\beta_{n\perp}^{iH}}{\beta_m^{iH}}$	$Y_{cn\perp}^{iE} = Y_{cn}^{iE} \cdot \frac{\beta_{n\perp}^{iE}}{\beta_m^{iE}}$
伝搬方向(y)特性アドミタンス	$Y_{cn\parallel}^{iH} = Y_{cn}^{iH} \cdot \frac{\beta_{//}}{\beta_m^{iH}}$	$Y_{cn\parallel}^{iE} = Y_{cn}^{iE} \cdot \frac{\beta_{//}}{\beta_m^{iE}}$

表3 一様領域における横方向伝送線路方程式

### 3. 数学的關係式による等価回路の導出

図3の境界条件において各成分は領域1と領域2の境界面で連続でなければならないことから、(33)式に示す接線成分の連続性と平面回路方程式から導出される面関数を用いて(25)~(30)式から各領域 ( $i=1$  or  $2$ ) においてそれぞれ代入すると、各成分は(42)~(45)式のように求めることができる。

$$\begin{aligned} &\text{— 接線成分の連続性 —} \\ &H_z^1 = H_z^2 \quad E_z^1 = E_z^2 \\ &E_y^1 = E_y^2 \quad H_y^1 = H_y^2 \end{aligned} \quad (33)$$

### 3.1 モード結合/変換係数

高さ関数を  $fgh$  関数と定義し、(20)式に示すようなモード正規直交条件からステップ不連続部前後のモード結合/変換係数は次のように定義される。隣同士の同種のモードの結合は変圧比として次式となる。

$$F_{m,p}^{1H2H} = \langle g_m^{1H}, f_p^{2H} \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d g_m^{1H}(z) \cdot f_p^{2H}(z) dz \quad (34)$$

$$F_{n,q}^{1E2E} = \langle g_n^{1E}, f_q^{2E} \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d g_n^{1E}(z) \cdot f_q^{2E}(z) dz \quad (35)$$

同様に隣同士の異種のモード結合を表すモード結合係数は次式となる。

$$H_{m,q}^{1H2E} = \langle g_m^{1H}, h_q^{2E} \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d g_m^{1H}(z) \cdot h_q^{2E}(z) dz \quad (36)$$

$$H_{n,p}^{1E2H} = \langle g_n^{1E}, h_p^{2H} \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d g_n^{1E}(z) \cdot h_p^{2H}(z) dz \quad (37)$$

また、同一高さ構造内での  $TE(H)$ ,  $TM(E)$  間のモード変換に関して、次のモード変換係数を定義する。

$$H_{m,n}^{1H1E} = \langle g_m^{1H}, h_n^{1E} \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d g_m^{1H}(z) \cdot h_n^{1E}(z) dz \quad (38)$$

$$H_{p,q}^{2H2E} = \langle g_p^{2H}, h_q^{2E} \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d g_p^{2H}(z) \cdot h_q^{2E}(z) dz \quad (39)$$

$$H_{n,m}^{1E1H} = \langle g_n^{1E}, h_m^{1H} \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d g_n^{1E}(z) \cdot h_m^{1H}(z) dz \quad (40)$$

$$H_{q,p}^{2E2H} = \langle g_q^{2E}, h_p^{2H} \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d g_q^{2E}(z) \cdot h_p^{2H}(z) dz \quad (41)$$

### 3.2 モード整合法によるモード結合方程式の導出

まず、(33)式から  $H_z$  成分について計算すると(25)式の  $i=1$  と  $i=2$  から、(42)式のように求めることができる。

$$-\sum_m \frac{V_m^{1H}(x,y)}{d} \cdot g_m^{1H}(z) = -\sum_{p'} \frac{V_{p'}^{2H}(x,y)}{d} \cdot g_{p'}^{2H}(z)$$

両辺に  $\frac{1}{d} \int_0^d f_p^{2H}(z) \cdot dz$  を操作することにより、(34)式から

$$V_p^{2H}(x,y) = \sum_m F_{m,p}^{1H2H} \cdot V_m^{1H}(x,y) \quad (42)$$

次に、 $E_y$  成分について計算すると(30)式の  $i=1$  と  $i=2$  から、(43)式のように求まる。

$$\begin{aligned} -\sum_{m'} \bar{J}_{m',1}^{1H} \cdot f_{m'}^{1H}(z) + j\eta_0 \sum_n J_{n,1}^{1E} \cdot h_n^{1E}(z) \\ = -\sum_p \bar{J}_{p,1}^{2H} \cdot f_p^{2H}(z) + j\eta_0 \sum_q J_{q,1}^{2E} \cdot h_q^{2E}(z) \end{aligned}$$

両辺に  $\frac{1}{d} \int_0^d g_m^{1H}(z) \cdot dz$  を操作することにより(34)、(36)、(38)式から

$$\begin{aligned} \bar{J}_{m,1}^{1H} - j\eta_0 \sum_n H_{m,n}^{1H1E} \cdot J_{n,1}^{1E} \\ = \sum_p F_{m,p}^{1H2H} \cdot \bar{J}_{p,1}^{2H} - j\eta_0 \sum_q H_{m,q}^{1H2E} \cdot J_{q,1}^{2E} \end{aligned} \quad (43)$$

同様に、 $E_z$ ,  $H_y$  成分についても計算すると(26)式の  $i=1$  と  $i=2$  から  $E_z$ 、(28)式の  $i=1$  と  $i=2$  から  $H_y$  もそれぞれ(44)式、(45)式のように求めることができる。

$$-\sum_n \frac{V_n^{1E}(x,y)}{d} \cdot g_n^{1E}(z) = -\sum_{q'} \frac{V_{q'}^{2E}(x,y)}{d} \cdot g_{q'}^{2E}(z)$$

両辺に  $\frac{1}{d} \int_0^d f_q^{2E}(z) \cdot dz$  を操作することにより、(35)式から

$$V_q^{2E}(x,y) = \sum_m F_{n,q}^{1E2E} \cdot V_n^{1E}(x,y) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{j\eta_0} \sum_m J_{m,1}^{1H} \cdot h_m^{1H}(z) + \sum_{n'} \bar{J}_{n',1}^{1E} \cdot f_{n'}^{1E}(z) \\ = -\frac{1}{j\eta_0} \sum_p J_{p,1}^{2H} \cdot h_p^{2H}(z) + \sum_q \bar{J}_{q,1}^{2E} \cdot f_q^{2E}(z) \end{aligned}$$

両辺に  $\frac{1}{d} \int_0^d g_n^{1E}(z) \cdot dz$  を操作することにより(35)、(37)、(40)式から

$$\begin{aligned} \bar{J}_{n,1}^{1E} - \frac{1}{j\eta_0} \sum_m H_{n,m}^{1E1H} \cdot J_{m,1}^{1H} \\ = \sum_q F_{n,q}^{1E2E} \cdot \bar{J}_{q,1}^{2E} - \frac{1}{j\eta_0} \sum_p H_{n,p}^{1E2H} \cdot J_{p,1}^{2H} \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、三次元光導波路ステップ型一様不連続部等価回路を考える。これらの結果から(42)~(45)式の関係式を用いる。しかし、この条件式からでは、関係式が数学的関係式である事から等価回路を導出する事ができない。従って、等価回路は図5に示す多線条伝送線路によるブラックボックスを用いたモード結合回路として与えられる。つまり、従来の解析では図5に示すモード結合回路を用いて三次元光導波路解析を行っていた。

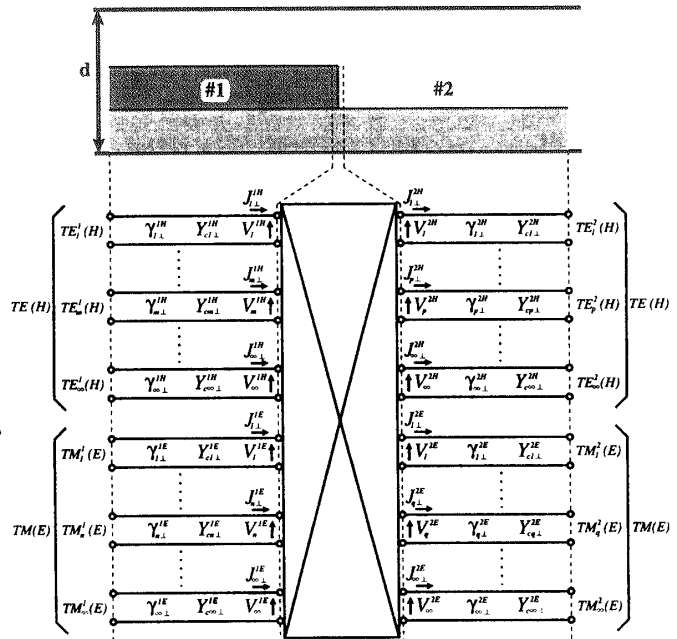


図5 数学的関係式による横方向等価回路

### 4. 等価回路の導出

前節までに三次元光導波路ステップ型一様不連続部における数学的関係式をマクスウェル方程式から変数分離法及び、高さ関数  $fgh$  をモード直交条件によるモード結合方程式から求めることができた。ここでは、図5に示されるブラックボックスを用いたモード結合回路を、より具体的な等価回路にするため、 $h(z)$  関数の  $f(z)$  関数による展開式を提案し、その等価回路を多開口理想変圧器を用いた多線条伝送線路及び、モード変換アドミタンスで定義される電流源(モード変換電流)から機能的に導出した。

4.1  $h$ 関数の  $f$ 関数による展開式

ここで、表4において、 $TE(H)$ ,  $TM(E)$ モードにおける各成分は $fg$ 関数と表2のような対応関係がある。この対応関係から $TM(E)$ モードの $h(z)$ 関数成分と $TE(H)$ モードの $f(z)$ 関数成分、 $TE(H)$ モードの $h(z)$ 関数成分と $TM(E)$ モードの $f(z)$ 関数成分がそれぞれ同じ境界条件を持つことから $h(z)$ 関数を $f(z)$ 関数による展開式として(46), (47)式のように表現することができる。これはモード結合係数( $H_{m\ q}^{1H2E}$ ,  $H_{n\ p}^{1E2H}$ )を理想変圧器のモード結合変圧比( $F_{m\ p}^{1H2H}$ ,  $F_{n\ q}^{1E2E}$ )とモード変換係数( $H_{p\ q}^{2H2E}$ ,  $H_{q\ p}^{2E2H}$ )の和により $TE(H)$ ,  $TM(E)$ モード共にそれぞれ求めることができる。まず、 $h_m^E(z)$ と $f_n^H(z)$ は同じ境界条件を持つことから

TE	$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_t, 0)$ $f_n^H(z)$	$\mathbf{H} = (\mathbf{H}_t, H_z)$ $h_n^H(z) g_n^H(z)$
TM	$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_t, E_z)$ $h_m^E(z) g_m^E(z)$	$\mathbf{H} = (\mathbf{H}_t, 0)$ $f_m^E(z)$

表4  $h(z)$ 関数による  $f(z)$ 関数による展開式の図式

$$h_n^E(z) = \sum_m b_m f_m^H(z)$$

$$b_m = \frac{1}{d} \int_0^d g_m^H(z) h_n^E(z) dz = H_{nm}^{HE} \quad \therefore h_n^E(z) = \sum_m H_{nm}^{HE} f_m^H(z)$$

$$H_{m\ q}^{1H2E} = \frac{1}{d} \int_0^d g_m^{1H}(z) h_q^{2E}(z) dz$$

$$= \sum_p H_{p\ q}^{2H2E} \left[ \frac{1}{d} \int_0^d g_m^{1H}(z) f_p^{2H}(z) dz \right] = \sum_p F_{m\ p}^{1H2H} H_{p\ q}^{2H2E}$$

$$\therefore H_{m\ q}^{1H2E} = \sum_p F_{m\ p}^{1H2H} H_{p\ q}^{2H2E} \quad (46)$$

次に、 $h_n^H(z)$ と $f_m^E(z)$ は同じ境界条件を持つことから

$$h_m^H(z) = \sum_n a_n f_n^E(z)$$

$$a_n = \frac{1}{d} \int_0^d g_n^E(z) h_m^H(z) dz = H_{nm}^{EH} \quad \therefore h_m^H(z) = \sum_n H_{nm}^{EH} f_n^E(z)$$

$$H_{n\ p}^{1E2H} = \frac{1}{d} \int_0^d g_n^{1E}(z) h_p^{2H}(z) dz$$

$$= \sum_q H_{q\ p}^{2E2H} \left[ \frac{1}{d} \int_0^d g_n^{1E}(z) f_q^{2E}(z) dz \right] = \sum_q F_{n\ q}^{1E2E} H_{q\ p}^{2E2H}$$

$$\therefore H_{n\ p}^{1E2H} = \sum_q F_{n\ q}^{1E2E} H_{q\ p}^{2E2H} \quad (47)$$

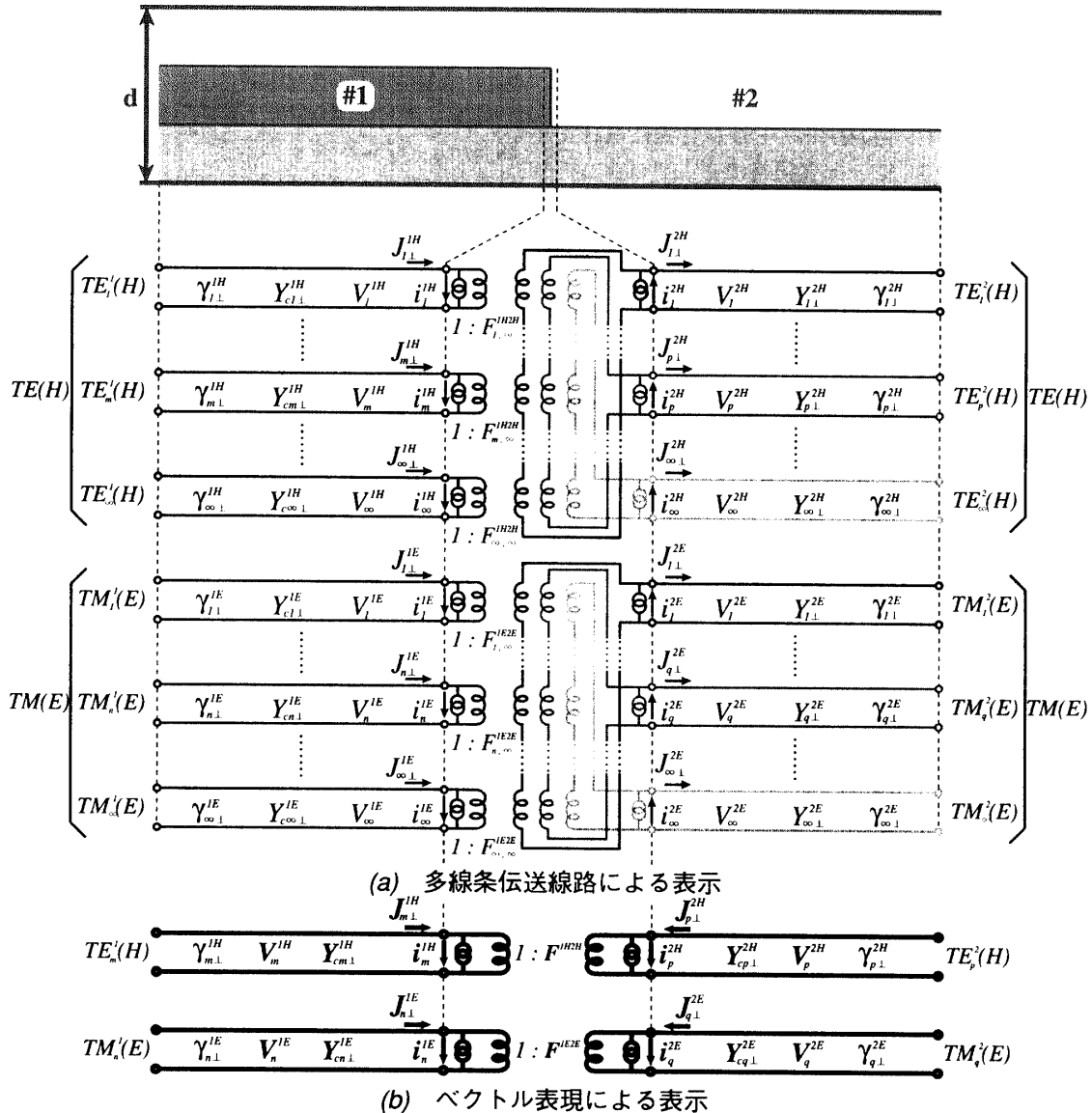


図6 ステップ型一様不連続部の横方向等価回路

#### 4.1.1 $h$ 関数の $f$ 関数による展開式の適用と

##### モード変換電流の定義

$h(z)$ 関数による  $f(z)$ 関数の展開式を用いることにより、前節で求めた数学的関係式である  $E_y$ 成分の(43)式、 $H_y$ 成分の(45)式をそれぞれ変形すると(48), (49)式のような関係式が得られる。ここで、 $i_m^{1H}$ ,  $i_p^{2H}$ ,  $i_n^{1E}$ ,  $i_q^{2E}$ は各モードのモード変換電流と定義する。まず、(43)式に(46)式を適用する。

$$\bar{J}_{m\perp}^{1H} - i_m^{1H} = \sum_p F_{m,p}^{1H2H} (\bar{J}_{p\perp}^{2H} - i_p^{2H}) \quad (48)$$

ここで、

$$i_m^{1H} = j\eta_0 \sum_n H_{m,n}^{1H1E} \cdot J_{n\parallel}^{1E} \quad i_p^{2H} = j\eta_0 \sum_q H_{p,q}^{2H2E} \cdot J_{q\parallel}^{2E} \quad (49)$$

同様に、(45)式に(47)式を適用すると

$$\bar{J}_{n\perp}^{1E} - i_n^{1E} = \sum_q F_{n,q}^{1E2E} (\bar{J}_{q\perp}^{2E} - i_q^{2E}) \quad (50)$$

ここで、

$$i_n^{1E} = \frac{1}{j\eta_0} \sum_m H_{n,m}^{1E1H} \cdot J_{m\parallel}^{1H} \quad i_q^{2E} = \frac{1}{j\eta_0} \sum_p H_{q,p}^{2E2H} \cdot J_{p\parallel}^{2H} \quad (51)$$

#### 4.2 モード変換アドミタンス

(48), (50)式の電流値をモード変換電流として、それぞれ(49), (51)式のように定義した。これは以下の計算により機能的にモード変換アドミタンスを用いて導出することができる。まず、 $TE(H)$ モードは(43)式に(54)式を適用することにより、モード変換電流  $i_m^{1H}$ ,  $i_p^{2H}$ は(43)式の第一項で(52)式、第二項で(53)式のように求まる。

$$\begin{aligned} i_m^{1H} &= j\eta_0 \sum_n H_{m,n}^{1H1E} \cdot J_{n\parallel}^{1E} \\ &= \sum_n (H_{m,n}^{1H1E} \cdot j\eta_0 Y_{cn\parallel}^{1E}) \cdot V_n^{1E} = \sum_n Y_{m,n}^{1H1E} \cdot V_n^{1E} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} i_p^{2H} &= j\eta_0 \sum_q H_{p,q}^{2H2E} \cdot J_{q\parallel}^{2E} \\ &= \sum_q (H_{p,q}^{2H2E} \cdot j\eta_0 Y_{cq\parallel}^{2E}) \cdot V_q^{2E} = \sum_n Y_{p,q}^{2H2E} \cdot V_q^{2E} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{cases} Y_{m,n}^{1H1E} = j\eta_0 H_{m,n}^{1H1E} Y_{n\parallel}^{1E} \\ Y_{p,q}^{2H2E} = j\eta_0 H_{p,q}^{2H2E} \cdot Y_{q\parallel}^{2E} \end{cases} \quad (54)$$

また、 $TM(E)$ モードは(45)式に(57)式を適用することにより、モード変換電流  $i_n^{1E}$ ,  $i_q^{2E}$ は(45)式の第一項で(55)式、第二項で(56)式のように求まる。

$$\begin{aligned} i_n^{1E} &= \frac{1}{j\eta_0} \sum_m H_{n,m}^{1E1H} \cdot J_{m\parallel}^{1H} \\ &= \sum_m \left( H_{n,m}^{1E1H} \cdot \frac{Y_{cm\parallel}^{1H}}{j\eta_0} \right) \cdot V_m^{1H} = \sum_m Y_{n,m}^{1E1H} \cdot V_m^{1H} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} i_q^{2E} &= \frac{1}{j\eta_0} \sum_p H_{q,p}^{2E2H} \cdot J_{p\parallel}^{2H} \\ &= \sum_p \left( H_{q,p}^{2E2H} \cdot \frac{Y_{cp\parallel}^{2H}}{j\eta_0} \right) \cdot V_p^{2H} = \sum_n Y_{q,p}^{2E2H} \cdot V_p^{2H} \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{cases} Y_{n,m}^{1E1H} = \frac{1}{j\eta_0} H_{n,m}^{1E1H} Y_{m\parallel}^{1H} \\ Y_{q,p}^{2E2H} = \frac{1}{j\eta_0} H_{q,p}^{2E2H} \cdot Y_{p\parallel}^{2H} \end{cases} \quad (57)$$

#### 4.3 等価回路の導出結果

以上の結果から三次元光導波路ステップ型一様不連続部横方向等価回路は図6のように導出することができる。ここで本等価回路は領域1, 領域2における不連続部の結合が  $f$ 関数によるモード結合変圧比として多開口理想変圧器を用いて表現している。モード変換電流は電流源を用いて領域1側の  $TE(H)$ モードの電流値を領域1側の  $TM(E)$ モードのモード電圧と  $TE/TM$ モード変換アドミタンスから、また領域1側の  $TM(E)$ モードの電流値を領域1側の  $TE(H)$ モードのモード電圧と  $TM/TE$ モード変換アドミタンスからそれぞれ求められ、また、領域2側も各々領域1と同様に機能的に決定されていることがわかる。

#### 5. 本等価回路の妥当性の検証

$h(z)$ 関数の  $f(z)$ 関数による展開式及び、モード変換アドミタンスによるモード変換電流を用いて三次元光導波路ステップ型一様不連続部の横方向等価回路が導出された。ここでは本等価回路の妥当性の検証を行うため、本等価回路を三次元光導波路解析に適用し、等価回路定数の計算結果を従来の数学的関係式の解析方法と本等価回路での解析方法とを比較して、その妥当性を検証する。

##### 5.1 等価回路定数の計算

まず、等価回路定数の計算結果として図7-(a), (b)と図8-(a), (b)に示す。ここで、図7, 8の挿入図(a), (b)はそれぞれモード直交条件によるモード整合法を用いた(34), (35)式で与えられるモード結合変圧比と(39), (41)式により与えられるモード変換係数である。各係数の計算を行い、ステップ型一様不連続部でのモード結合変圧比とモード変換係数をそれぞれ求めた。ここで、モード結合変圧比、モード変換係数は共に多線条伝送線路の一番目のモードを例にとって計算している。挿入図より、モード次数が低いとき、モード結合変圧比、モード変換係数共に共振しており、これより多開口理想変圧器の結合状況を把握することができる。また、この結果は一番目同士のモード結合を示しており、所望の結果である。

次に従来法ではモード整合法による数学的な直接計算((36), (37)式)によりモード結合係数を求めていたが、本等価回路では  $h(z)$ 関数の  $f(z)$ 関数による展開式((46), (47)式)を用いて、このモード結合係数を導出している。そこで、この両者の値の収束性を調べ、これらの値が一致すれば、本等価回路は妥当であると考え、モード結合変圧比を表す  $f$ 関数、モード結合/変換を表す  $h$ 関数の回路定数を計算して、比較検討した。その結果を図7, 図8にそれぞれ示す。また、この場合においても多線条伝送線路の一番目のモード同士の計算結果を例に挙げている。ここで、図より従来法では  $H_{m,q}^{1H2E}$ ,  $H_{n,p}^{1E2H}$ の値は考慮モード数に依存せず、一定値を示している。また、本等価回路を用いるとモード変換係数  $H_{m,q}^{1H2E}$ ,  $H_{n,p}^{1E2H}$ は考慮モード数を増加させることによって収束し、従来法と一致している結果が得られた。つまり、本等価回路はモード数を考慮することによってその値は一致し、妥当であると言える。

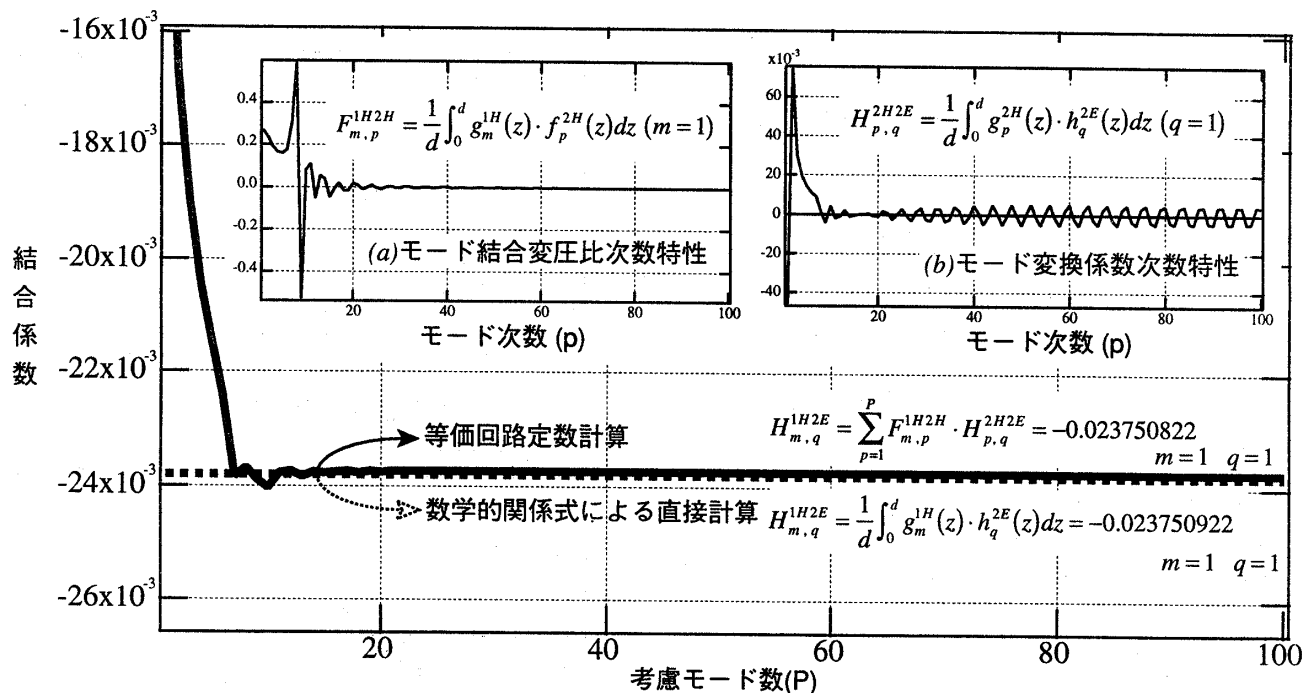


図7 TEモードにおけるモード結合変圧比とモード結合/変換係数による収束性

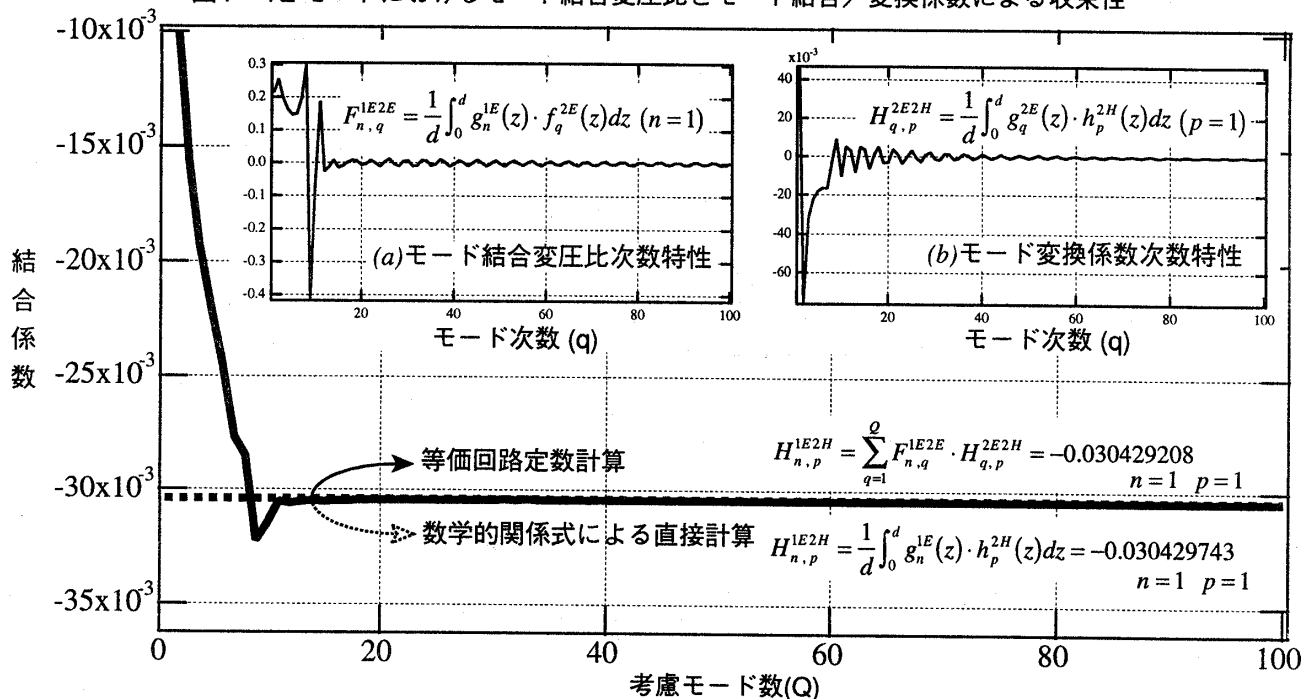


図8 TMモードにおけるモード結合変圧比とモード結合/変換係数による収束性

## 6 三次元光導波路解析への適用

導出された三次元光導波路ステップ型一様不連続部の横方向等価回路を三次元光導波路解析に適用する。従来法である数学的關係式からの解析結果と物理的關係式として与えられる等価回路からの解析結果とを比較し、その有効性を検証する。ここで、解析構造として、図9に示すPMMA/SiO<sub>2</sub>/Si系弱い閉じ込め構造を用いる。また、本等価回路を用いると図9に示した解析構造の等価回路は多開口理想変圧器とモード変換アドミタンス(電流源)によるモード結合電流を用いた多線条伝送線路の横方向二不連続として表現することができる。ここで、その等価回路をベクトル表示として示す。

### 6.1 伝搬定数による比較

伝搬方向(y方向)における伝搬定数(β<sub>y</sub>)について比較する。伝搬定数は領域1(内側Y<sub>in</sub>)から見たアドミタンスと領域2,3(外側Y<sub>out</sub>)から見たアドミタンスが等しいことから(58)式に示す固有値方程式から得られる。また、Y<sub>in</sub>, Y<sub>out</sub>, Vはそれぞれ(60)式のように定義され、伝搬定数はVが零でないことから(59)式に示すY<sub>out</sub>とY<sub>in</sub>との和のデタミナントが零となる条件を満たす値から求まる。ここでは従来の数学的關係式と本報告で導出された等価回路を用いた場合との考慮モード数に対する伝搬定数の収束性を比較する。図10-(a), (b)に示すようにTE(H), TM(E)モード共に伝搬定数は同じ値で収束していることがわかる。つまり、本等価回路は従来法と比較

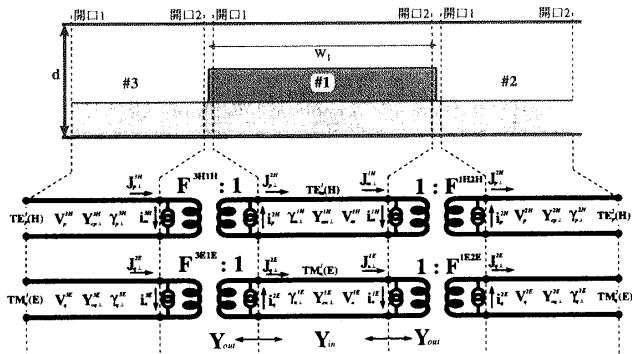


図9 三次元光導波路横方向等価回路

しても同様の結果が得られることがわかる。

### 6.2 電磁界分布による比較

次に電磁界分布による比較結果を示す。各電磁界成分は伝搬定数 ( $\beta_{ij}$ ) が求まることにより、電界成分、磁界成分をそれぞれ導出することができる。ここで、双方の電磁界分布を比較すると図11より、その分布は一致しており、本等価回路は電磁界分布においても従来法と同様の結果が得られる。

$$\text{固有値方程式} \quad (\mathbf{Y}_{out} + \mathbf{Y}_{in})\mathbf{V} = 0 \quad (58)$$

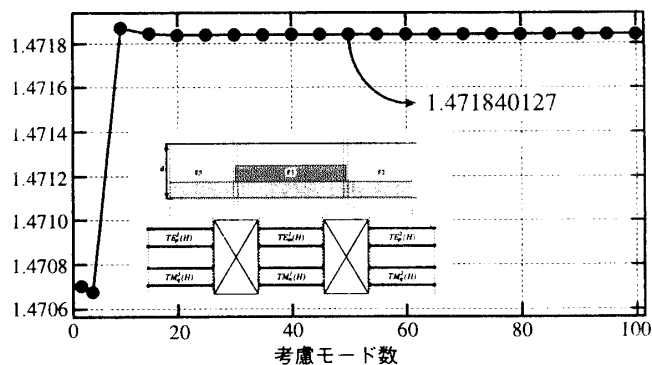
$$\text{つまり、} \quad \det|\mathbf{Y}_{out} + \mathbf{Y}_{in}| = 0 \quad \therefore \mathbf{V} \neq 0 \quad (59)$$

$$\text{但し、} \quad \mathbf{Y}_{out} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_{out}^{(1,1)} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{Y}}_{out}^{(1,2)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y}_{in} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{cl}^2 \coth \gamma_{\perp}^2 W_1 & -\mathbf{Y}_{cl}^2 \operatorname{csch} \gamma_{\perp}^2 W_1 \\ -\mathbf{Y}_{cl}^2 \operatorname{csch} \gamma_{\perp}^2 W_1 & \mathbf{Y}_{cl}^2 \coth \gamma_{\perp}^2 W_1 \end{pmatrix}$$

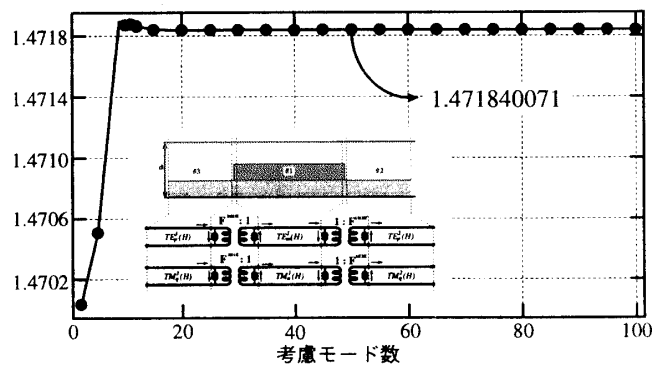
$$\mathbf{V} = (\mathbf{V}^{(1,1)H}, \mathbf{V}^{(1,1)E}, \mathbf{V}^{(1,2)H}, \mathbf{V}^{(1,2)E})^T \quad (60)$$

### 7. むすび

本報告において三次元光導波路ステップ型一様不連続部の横方向等価回路を厳密に導出した。ステップ型不連続部の回路定数に関して、従来のモード結合を記述する数学的関係式の計算結果とここでの等価回路に基づく計算結果が一致したことから本等価回路の妥当性を確認した。また本等価回路を用いた三次元光導波路の電磁界解析は従来の数学的関係式を用いた手法と比較し、固有モードの伝搬定数、電磁界分布共一致したことから、本等価回路の有効性についても確認することができた。今後、本等価回路を用いて様々な三次元光導波路の固有モード計算を行うと共に、等価回路の考えを用いた伝搬方向不連続問題などにも適用していく予定である。



(a) 数学的関係式を用いた場合



(b) 本等価回路を用いた場合

図10 伝搬定数収束性

### 参考文献

- [1] 許、穴田「表面波の不連続部での結合方程式」信学技報[マイクロ波]MW81-110
- [2] 許、穴田、船田、水間、小林「光平面回路の基礎研究」神奈川大学工学研究所所報 第10号 UDC:621.389
- [3] 許、穴田「平面的伝送線路の平面回路方程式による解析」信学技報[マイクロ波]MW83-129
- [4] 許、穴田「光平面回路の回路論的取り扱い」信学技報[光・量子エレクトロニクス]OQC87-173
- [5] 辻、平岡、許「ステップ型一様不連続部での等価回路の導出—平面回路方程式及びモード整合法に基づく—」2001年信学総合大会 C-1-34
- [6] 辻、平岡、許「光導波路ステップ型一様不連続部の横方向等価回路とその等価回路定数の計算」2001年信学ソサイエティ大会 C-1-10

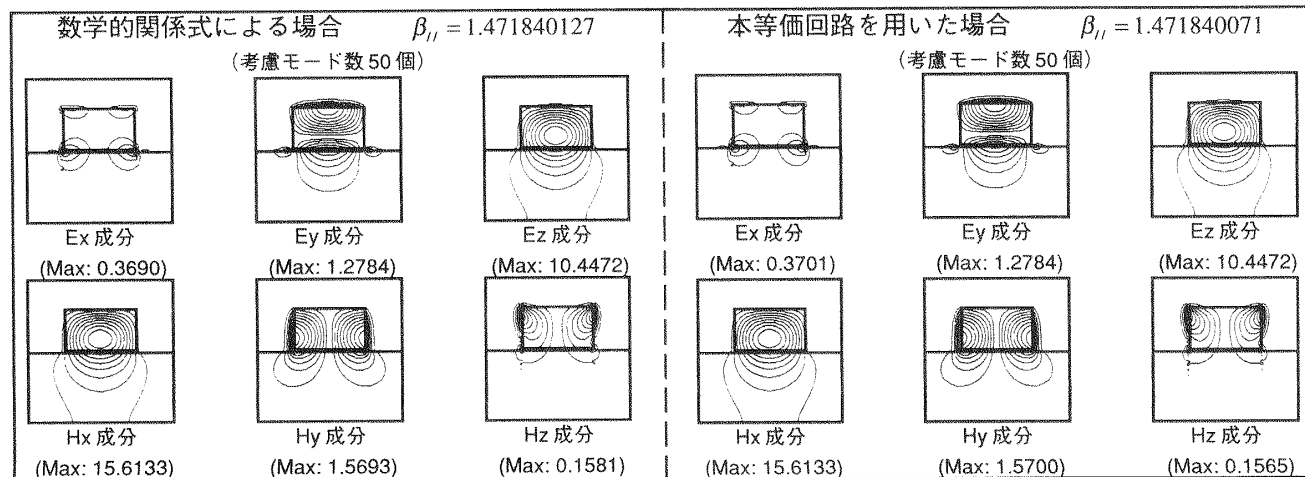


図11 電磁界分布による比較