

方形導波管H面ステップ型不連続部の等価回路表示 —多線条伝送線路・多開口理想変圧器による—

許 瑞邦 平岡 隆晴

神奈川県工学部電気工学科

〒 221-8686 横浜市神奈川区六角橋 3-27-1

TEL : 045(481)5661 FAX : 045(491)7915

E-mail : kyo@kyolab3.cc4-4.kanagawa-u.ac.jp

あらまし 方形導波管H面ステップ型不連続は、インダクタンス、共振器、フィルタといった機能を実現する重要な回路構造で、固有モード展開/整合/変分法、W-H法、積分方程式法(グリーン関数/モーメント法)、留数計算法、モード整合法、点整合法といった手法で解析され、これまで特により少ない計算量で高精度の結果を得る手法の研究に主眼が置かれてきた。現在では豊富な計算資源を活用したモード整合法による回路の特性計算が実際的かつ有効であるが、単純に適用すると見通しがよいとは言えない。ここでは、このモード整合法に基づいて方形導波管不連続部の等価回路が多線条伝送線路と多開口理想変圧器で表現されることを示す。更に本等価回路の妥当性・有効性を具体的な計算例で示した。

キーワード 方形導波管, H面ステップ型不連続, 多線条伝送線路, 多開口理想変圧器

Equivalent network for rectangular-waveguide H-plane step discontinuity - Multi-transmission line and Multi-port ideal transformer -

Hsu, Jui-Pang Takaharu Hiraoka

Department of Electrical Engineering, Kanagawa University

3-27-1 Rokkakubashi Kanagawa-ku Yokohama 221 Japan

TEL : 045(481)5661 FAX : 045(491)7915

E-mail : kyo@kyolab3.cc4-4.kanagawa-u.ac.jp

Abstract

Rectangular-waveguide H-plane step discontinuity is the key structure for constructing inductor, resonator, filter, etc. So far, the structure has been analyzed by normal mode expansion/matching/variation method, Wiener-Hopf method, integral method(Green's function/moment method), residue calculus method, mode matching method, point matching method etc. ; especially, the method of less computation but more accurate result was pursued. Now, abundant computing resources are available, which makes mode matching method more practical and effective but the simple application cannot give good physical insight. Here, extending mode matching theory, equivalent network consisting of multi-transmission line and multi-port ideal transformer is formulated and demonstrated to be useful by practical example.

key words Rectangular-waveguide , H-plane step discontinuity, Multi-transmission line, Multi-port ideal transformer

1. はじめに

図1に示す方形導波管H面不連続部は、方形導波管回路設計に当たって頻繁に利用される重要な回路構成素子である。従来この種の不連続部の解析のためには、固有モード展開法・モード整合性あるいはこれに基づく変分法、等角写像法といった手法が開発され^{[1]-[3]}、実際上の回路の解析・設計には支障がないと考えられる。今回はこの種の不連続部をより合理的に解析・理解するために、この不連続部の電磁界解析を平面回路方程式に基づいて行い、導波管部分の等価回路は固有伝送モードに基づく等価多線条伝送線路で、不連続部の等価回路は多開口理想変圧器で表現できることを示す。

更に、この等価回路を用いて入出力特性・電磁界分布を求めるための回路理論を展開する。この等価回路を具体的に適用する場合、どの程度の高次モードまで考慮するかが本等価回路で重要な問題となるが、ここでは(1)入出力特性の収束性、(2)電磁界分布の不連続部での連続性、(3)高次励振モードの振幅といった点よりこの問題を検討したので報告する。

2. 平面回路方程式による定式化^[8]

図1に示す方形導波管不連続問題は、構造的に2次元的に広がった平面回路問題と考えられる。入出力部での励振モードをTE₁₀(LSM₁₀)モードとすると、導波管回路内の電磁界成分はE_z, H_tとなり(E_r=0, H_z=0)、平面回路内の電圧・電流密度を式(1)と定義すると、

$$V = -E_z d, \quad J = H_t \times k \tag{1}$$

但し、kはz方向単位ベクトル

平面回路方程式は、Maxwellの方程式より式(2)となる。

$$\begin{cases} \text{grad} V = -j\omega\mu J \\ \text{div} J = -j\frac{\omega\epsilon}{d} V \end{cases} \tag{2}$$

従って、図1で示す導波管不連続問題は、式(2)の平面回路方程式を回路周囲が短絡境界条件となっていることおよび与えられた励振条件・負荷条件で解く問題となり、最近の計算機資源の状況ではこの種の問題を直接数値的に解くことはそれ程難しくないと考えられる。しかし励振条件、負荷条件および周波数毎に計算し直す必要があり、回路設計上あまり見通しの良い手法とは言えない。

この点を改善するために以下で固有伝送モード展開に基づく等価回路の考え方を適用する。ここでは図1に示す方形導波管H面ステップ型不連続部に関して、その導波路部の等価回路が多線条伝送線路となり、不連続部の等価回路が多開口理想変圧器により表示されることを示す。

3. 方形導波管の等価多線条伝送線路の導出

方形導波管の導波路幅をWとし、面内の座標を(x-y)の代わりに(ℓ-s)の座標系を図2(a)に示すように定義し、平面回路方程式に変数分離法を適用することにより、断面s方向に関して固有伝送モードが、進行方向ℓに関し

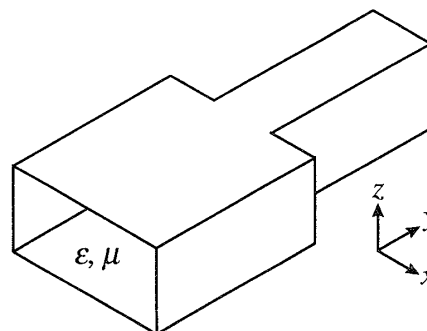


図1 方形導波管H面ステップ型不連続部の構造

ては伝送モード毎の伝送線路方程式が得られる。

3.1 変数分離法の適用

図2aに示す方形導波管は側面短絡平面導波路と考えられる。方形導波管内の平面回路電圧、電流密度は(ℓ, s)の関数であるが、式(3)の変数分離型で表現できるとし

$$\begin{cases} V_p(\ell, s) = V_p(\ell) \cdot s_p(s) \\ J_{t_p}(\ell, s) = J_{t_p}(\ell) \cdot s_p(s) \\ J_{s_p}(\ell, s) = J_{s_p}(\ell) \cdot c_p(s) \end{cases} \tag{3}$$

式(3)の関係を式(2)の平面回路方程式に代入して、変数分離形の性質を利用して整理すると式①-⑥を得る。

(1) $\text{grad} V(\ell, s) = -j\omega\mu d J(\ell, s)$

$$\frac{dV(\ell)}{d\ell} V(s) = -j\omega\mu d J_t(\ell) J_t(s) \Rightarrow \begin{cases} V(s) = K_1 J_t(s) & \text{①} \\ \frac{dV(\ell)}{d\ell} = -\frac{j\omega\mu d}{K_1} J_t(\ell) & \text{②} \end{cases}$$

$$V(\ell) \frac{dV(s)}{ds} = -j\omega\mu d J_s(\ell) J_s(s) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dV(s)}{ds} = K_2 J_s(s) & \text{③} \\ V(\ell) = -\frac{j\omega\mu d}{K_2} J_s(\ell) & \text{④} \end{cases}$$

但し、K₁, K₂は任意定数である。

(2) $\text{div} J(\ell, s) = -j\frac{\omega\epsilon}{d} V(\ell, s)$

$$\therefore \frac{dJ_t(\ell)}{d\ell} J_t(s) + J_s(\ell) \frac{dJ_s(s)}{ds} = -j\frac{\omega\epsilon}{d} V(\ell) V(s)$$

この式に② J_t(s) = V(s)/K₁, ④ J_s(ℓ) = - $\frac{K_2}{j\omega\mu d} V(\ell)$ の関係を代入して整理すると

$$\frac{V(s)}{K_1} \frac{dV(\ell)}{d\ell} = \frac{1}{j\omega\mu d} \left\{ K_2 \frac{dJ_s(s)}{ds} + \omega^2 \epsilon \mu V(s) \right\} V(\ell)$$

β²を導入して変数分離すると

$$\begin{cases} K_2 \frac{dJ_s(s)}{ds} + k^2 V(s) = \beta^2 V(s) & \text{⑤} \\ \frac{1}{K_1} \frac{dV(\ell)}{d\ell} = \frac{\beta^2}{j\omega\mu d} V(\ell) & \text{⑥} \end{cases}$$

以上をまとめるとℓ, sに関して表1(A)に示す関係式が得られる。K₁, K₂は任意定数なので、今回の解析ではK₁=K₂=1として、表1(B)に示す関係式を得る。

3.2 固有伝送モード (s方向=断面方向の解)

表1(B-1)に示す連立方程式よりV(s)に関して次式を得る。

$$\frac{d^2 V(s)}{ds^2} + (k^2 - \beta^2) V(s) = 0 \tag{4}$$

V(s)は導波路側面の短絡壁により、V(s)=0, (at S=0, W)の関係を満足する必要がある、また $\frac{1}{W} \int_0^1 V^2(s) ds = 1$ の正規化を施すことにより次式の解を得る。

$$V_p(s) = \sqrt{\epsilon_p} \sin \frac{p\pi s}{W} \equiv S_p(s/W) \quad (5)$$

また、 p 番目のモードの固有伝搬定数 β_p は式(6)となる。

$$\beta_p = \sqrt{k^2 - (p\pi/W)^2} \quad (6)$$

式(5)の固有関数間には以下の正規直交性がある。

$$\frac{1}{W} \int_0^W V_p(s) V_q(s) ds = \delta_{pq} \quad (7)$$

3.3 モード対応伝送線路方程式 (ℓ 方向に関する方程式)

導波路方向 ℓ に関する方程式は、表1(B)に示されているが、モード対応伝送電力がモード電圧×モード電流となるように、モード電圧、モード電流を定義する。モード電圧は $V_p(\ell)$ とし、モード電流を以下に定義する。モード対応伝送電力は、ポインティングベクトルの計算より

$$P_p = \int_0^W V_p(\ell) V_q(s) J_{tp}(\ell) J_{tp}(s) ds = V_p(\ell) J_{tp}(\ell) \int_0^W V_q(s) J_{tp}(s) ds \quad (8)$$

s に関する積分は表1(B-2)の関係および式(7)の正規化により W となるので、 $P_p(\ell)$ は次式で与えられる。

$$P_p(\ell) = V_p(\ell) J_{tp}(\ell) W \Rightarrow V_p(\ell) I_p(\ell) \quad (9)$$

従って、モード電流 $I_p(\ell) \equiv J_{tp}(\ell) W$ と定義するのが適当である。

モード電流の定義に従うと、 p 次のモード対応伝送線路方程式は表1(B-3)の関係より式(10)と与えられる。

$$\begin{cases} \frac{dV_p(\ell)}{d\ell} = -j \frac{\omega\mu d}{W} I_p(\ell) & \left(Z_p = j \frac{\omega\mu d}{W} \text{ [}\Omega/\text{m]} \right) \\ \frac{dI_p(\ell)}{d\ell} = -j \frac{\omega\mu d}{W} V_p(\ell) & \left(Y_p = j \frac{\beta_p^2 W}{\omega\mu d} \text{ [S/m]} \right) \end{cases} \quad (10)$$

p 次モード対応伝送線路のモード直列インピーダンス Z_p 、モード並列アドミタンス Y_p は式(10)で定義され、モード特性インピーダンス、伝搬定数は式(11)となる。

$$\begin{cases} Z_{cp} = \frac{1}{Y_{cp}} = \sqrt{\frac{Z_p}{Y_p}} = \frac{\omega\mu d}{\beta_p W} \text{ [}\Omega\text{]} \\ \gamma_p = \sqrt{Z_p Y_p} = j\beta_p \text{ [rad/m]} \end{cases} \quad (11)$$

3.4 導波管全体の等価回路

方形導波管全体の等価回路は、1次より無限次までのモード対応伝送線路が存在するので、図2(b)に示す多線条伝送線路が得られる。今後この等価多線条伝送線路を図2(c)に示すように太線でベクトル的に表現することとする。この際次の行列を定義する。

$$\begin{cases} Z_c = \text{diag}(Z_{c1}, Z_{c2}, \dots, Z_{c\infty}) \\ \gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\infty) \\ v = (V_1(\ell), V_2(\ell), \dots, V_\infty(\ell))^t \\ i = (I_1(\ell), I_2(\ell), \dots, I_\infty(\ell))^t \end{cases} \quad (12)$$

3.5 導波管内での電圧・電流密度分布 (電磁界分布)

p 番目のモードの電圧・電流密度分布は、式(3)および p 次の伝送線路でのモード電圧分布 $V_p(\ell)$ 、モード電流分布 $I_p(\ell)$ より次式で与えられる。

$$\begin{cases} V_p(\ell, s) = V_p(\ell) S_p(s) \\ J_{tp}(\ell, s) = I_p(\ell) / W S_p(s) \\ J_{sp}(\ell, s) = -\frac{1}{j\omega\mu d} (p\pi/W) V_p(\ell) C_p(s) \end{cases} \quad (13)$$

但し、 $c_p(s)$, $s_p(s)$ は p 番目のモードの幅固有関数。

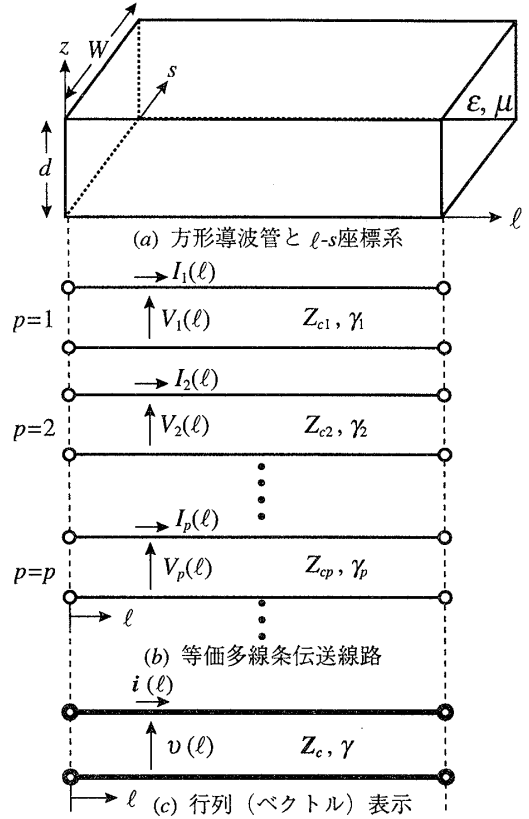


図2 方形導波管とその等価回路

(A) s, ℓ に関する一般の関係 (K_1, K_2 : 任意定数)	
s に関する式 (断面方向)	ℓ に関する式 (進行方向)
$\frac{dV(s)}{ds} = K_2 J_s(s) \quad \textcircled{3}$	$\frac{dV(\ell)}{d\ell} = -\frac{j\omega\mu d}{K_1} J_\ell(\ell) \quad \textcircled{2}$
$\frac{dJ_s(s)}{ds} = -\frac{k^2 - \beta^2}{K_2} V(s) \quad \textcircled{5}$ (A-1)	$\frac{dJ_\ell(\ell)}{d\ell} = \frac{\beta^2 K_1}{j\omega\mu d} V(\ell) \quad \textcircled{6}$ (A-3)
但し $J_\ell(s) = \frac{V(s)}{K_1} \quad \textcircled{1}$ (A-2)	但し $J_s(\ell) = \frac{-K_2}{j\omega\mu d} V(\ell) \quad \textcircled{4}$ (A-4)
(B) $K_1=K_2=1$ とした場合の関係	
$\frac{dV(s)}{ds} = J_s(s) \quad \textcircled{B-1}$	$\frac{dV(\ell)}{d\ell} = -j\omega\mu d J_\ell(\ell) \quad \textcircled{B-3}$
$\frac{dJ_s(s)}{ds} = -(k^2 - \beta^2) V(s)$	$\frac{dJ_\ell(\ell)}{d\ell} = -\frac{\beta^2}{j\omega\mu d} V(\ell)$
但し $J_\ell(s) = V(s) \quad \textcircled{B-2}$	但し $J_s(\ell) = -\frac{1}{j\omega\mu d} V(\ell) \quad \textcircled{B-4}$

表1 s, ℓ に関する関係式 (A: 一般的, B: 今回)

$$s_p(s) = \sqrt{\epsilon_p} \sin \frac{p\pi s}{W}, \quad c_p(s) = \sqrt{\epsilon_p} \cos \frac{p\pi s}{W} \quad (14)$$

従って、導波路内の全体の電圧電流分布は、各モードの分布の総和となるので、最終的には次式で与えられる。

$$\begin{cases} V(\ell, s) = \sum_{p=1}^{\infty} V_p(\ell, s) = \sum_{p=1}^{\infty} V_p(\ell) S_p(s) \\ J_\ell(\ell, s) = \sum_{p=1}^{\infty} J_{tp}(\ell, s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{I_p(\ell)}{W} S_p(s) \\ J_s(\ell, s) = \sum_{p=1}^{\infty} J_{sp}(\ell, s) = \sum_{p=1}^{\infty} -\frac{1}{j\omega\mu d} \left(\frac{p\pi}{W} \right) C_p(s) \end{cases} \quad (15)$$

4. 方形導波管H面ステップ型不連続部の等価回路の導出

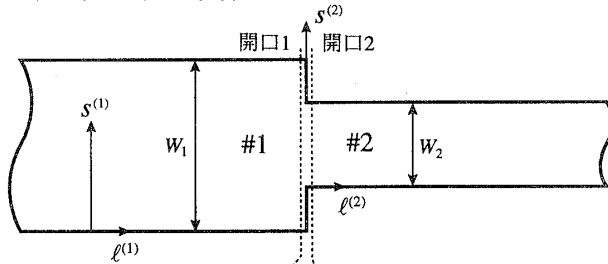
図3(a)に示す方形導波管H面ステップ型不連続構造で幅 W_1 と幅 W_2 の方形導波管部分は、3.の結果を用いると同図(b)に示す等価多線条伝送線路が得られ、各線路1,2の線路定数, モード幅固有関数, 正規直交性も図3に示す。ここではステップ型不連続部で、開口モード電圧・モード電流間の関係を導出し、不連続部が多開口理想変圧器で表示されることを示す。

4-1. 開口モード電圧間/開口モード電流間の関係導出

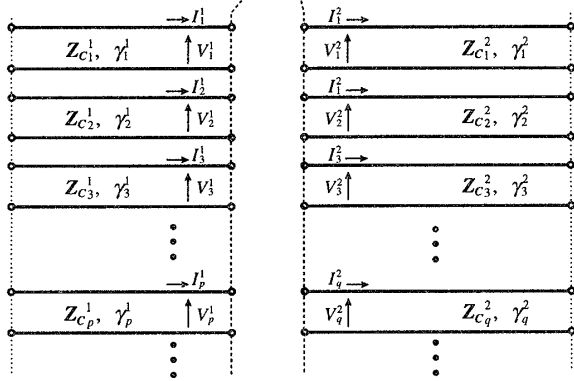
今、図3(a)に示す不連続部で開口1,2でのモード電圧・モード電流を V_p^1, I_p^1 ($p=1, \dots, \infty$), V_q^2, I_q^2 ($q=1, \dots, \infty$) とすると開口1,2での電圧分布, 電流密度分布は図3(c)固有幅関数 $S_p^i(s_1)$ を用いて式(16),(17)で与えられる。

$$\begin{cases} V^1(s_1) = \sum_{p=1}^{\infty} V_p^1 S_p^1(s_1) \\ J^1(s_1) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{I_p^1}{W_1} S_p^1(s_1) \end{cases} \quad (16) \quad \begin{cases} V^2(s_2) = \sum_{q=1}^{\infty} V_q^2 S_q^2(s_2) \\ J^2(s_2) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{I_q^2}{W_2} S_q^2(s_2) \end{cases} \quad (17)$$

図3(a)に示す $W_1 > W_2$ のステップ型不連続部では、 $0 < s_2 < W_2$ で電圧, 電流密度が連続であり、 $0 < s_1 < W_1$ でそれ以外の部分は短絡境界となっていることより、次の関係*



(a) ステップ型不連続構造



(b) 各部の等価多線条伝送線路

$\gamma_p^1 = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{W_1}\right)^2 - k^2}$ [rad/m]	$\gamma_q^2 = \sqrt{\left(\frac{q\pi}{W_2}\right)^2 - k^2}$ [rad/m]
$Z_{c_p}^1 = \frac{j\omega\mu d}{\gamma_p^1 W_1}$ [Ω]	$Z_{c_q}^2 = \frac{j\omega\mu d}{\gamma_q^2 W_2}$ [Ω]
$S_p^1(s_1) = \sqrt{\epsilon_p} \sin \frac{p\pi}{W_1} s_1$	$S_q^2(s_2) = \sqrt{\epsilon_q} \sin \frac{q\pi}{W_2} s_2$
$\frac{1}{W_1} \int_0^{W_1} S_p^1(s_1) S_p^1(s_1) ds_1 = \delta_{pp'}$	$\frac{1}{W_2} \int_0^{W_2} S_q^2(s_2) S_q^2(s_2) ds_2 = \delta_{qq'}$

(c) 各領域の線路定数 (モード伝搬定数, モード特性インピーダンス), モード幅固有関数, 正規直交性

図3 方形導波管H面ステップ型不連続部の等価回路

を満たす必要がある。

$$J_i^1(s_1) = \begin{cases} J_i^2(s_2) & (0 < s_2 < W_2) \\ ? & (0 < s_1 < W_1 \text{ 上記以外}) \end{cases} \quad (18)$$

$$V^1(s_1) = \begin{cases} V^2(s_2) & (0 < s_2 < W_2) \\ 0 & (0 < s_1 < W_1 \text{ 上記以外}) \end{cases} \quad (19)$$

式(18),(19)及び図3(c)に示すモードの正規直交性より開口モード電流間/開口モード電圧間の関係が導かれる。

①開口モード電流間の関係式 (I_p^1 と I_q^2)

式(18)に式(16),(17)を代入すると

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{I_q^2}{W_2} S_q^2(s_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{I_p^1}{W_1} S_p^1(s_1) \quad (0 < s_2 < W_2) \quad (20)$$

$S_q^2(s_2)$ に関する正規直交性を用いると、次の関係を得る。

$$I_q^2 = \sum_{p=1}^{\infty} n_{qp}^{21} \cdot I_p^1 \quad (q=1, \dots, \infty) \quad (21)$$

$$n_{qp}^{21} = \frac{1}{W_1} \int_0^{W_2} S_q^2(s_2) S_p^1(s_1) ds_2 \quad (22)$$

②開口モード電圧間の関係式 (V_p^1 と V_q^2)

式(19)に式(16),(17)を代入すると

$$\sum_{p=1}^{\infty} V_p^1 S_p^1(s_1) = \begin{cases} \sum_{q=1}^{\infty} V_q^2 S_q^2(s_2) & (0 < s_2 < W_2) \\ 0 & (0 < s_1 < W_1 \text{ 上記以外}) \end{cases} \quad (23)$$

$S_p^1(s_1)$ に関する式(7)で示す正規直交性と式(22)の定義式を用いて次式を得る。

$$V_p^1 = \sum_{q=1}^{\infty} n_{qp}^{21} \cdot V_q^2 \quad (p=1, \dots, \infty) \quad (24)$$

4-2. 開口モード電圧間・電流間関係式の行列表現

式(21)と式(24)の関係は、行列式(25),(26)とまとめることができる。

$$\begin{bmatrix} I_1^2 \\ \vdots \\ I_q^2 \\ \vdots \\ I_{\infty}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11}^{21} & \dots & n_{1p}^{21} & \dots & n_{1\infty}^{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{q1}^{21} & \dots & n_{qp}^{21} & \dots & n_{q\infty}^{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{\infty 1}^{21} & \dots & \dots & \dots & n_{\infty \infty}^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^1 \\ \vdots \\ I_p^1 \\ \vdots \\ I_{\infty}^1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} V_1^1 \\ \vdots \\ V_p^1 \\ \vdots \\ V_{\infty}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11}^{21} & \dots & n_{q1}^{21} & \dots & n_{\infty 1}^{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{1p}^{21} & \dots & n_{qp}^{21} & \dots & n_{\infty p}^{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{1\infty}^{21} & \dots & \dots & \dots & n_{\infty \infty}^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^2 \\ \vdots \\ V_q^2 \\ \vdots \\ V_{\infty}^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

今、定義(12)に従って、開口1,2の開口モード電圧・電流縦行列を以下の如く定義する。

$$\begin{cases} \mathbf{i}^1 \equiv (I_1^1, \dots, I_p^1, \dots, I_{\infty}^1)^t \\ \mathbf{v}^1 \equiv (V_1^1, \dots, V_p^1, \dots, V_{\infty}^1)^t \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{i}^2 \equiv (I_1^2, \dots, I_q^2, \dots, I_{\infty}^2)^t \\ \mathbf{v}^2 \equiv (V_1^2, \dots, V_q^2, \dots, V_{\infty}^2)^t \end{cases}$$

また、式(25)の n_{qp}^{21} に関する行列を $\mathbf{n}^{21} = (n_{qp}^{21})$ と定義すると式(26)の行列は $(\mathbf{n}^{21})'$ となり、式(25),(26)は次の行列関係式で表現される。 $(\mathbf{n} = \mathbf{n}^{21})^{(4)-(7)}$

$$\begin{cases} \mathbf{i}^2 = \mathbf{n}^{21} \cdot \mathbf{i}^1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}^1 \\ \mathbf{v}^1 = (\mathbf{n}^{21})' \cdot \mathbf{v}^2 = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}^2 \end{cases} \quad (27)$$

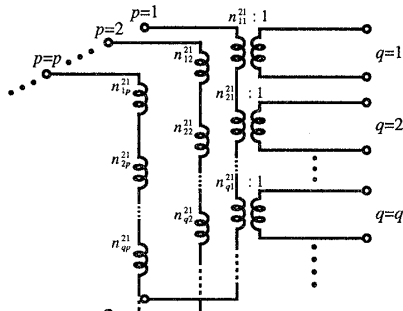
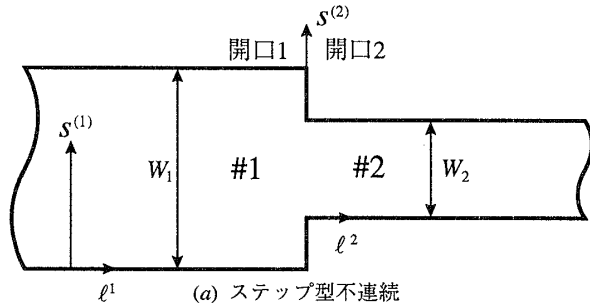
*この関係は不連続部両側の電磁界の接線成分が連続であることを意味している。

4-3. 多開口理想変圧器による不連続部の等価回路表示

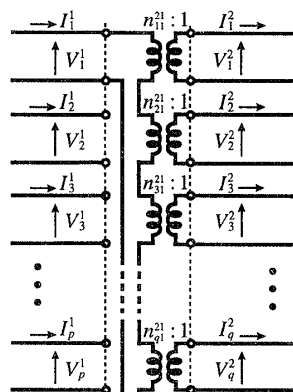
式(21),(24)あるいは行列表現式(25),(26)で与えられる関係を理想変圧器を用いて表現すると、図4(b)の如くなる。この等価回路で開口2の q 番目の伝送線路のモード電流は、開口1のモード電流と理想変圧器を介して接続されているので、式(21)'で与えられ、これは式(21)と一致している。

$$I_q^2 = n_{q1}^{21} \cdot I_1^1 + \dots + n_{qp}^{21} \cdot I_p^1 + \dots + n_{q\infty}^{21} \cdot I_\infty^1 \quad (21)'$$

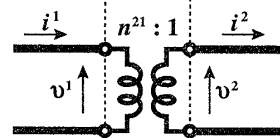
また、開口1の p 番目の伝送線路のモード電圧 V_p^1 は、開口2のモード電圧と理想変圧器を介して結合しているの



(b) 多開口理想変圧器による等価回路表現



(c) 多開口理想変圧器による別の等価回路表現



(d) 多開口の行列表示

図4 多開口理想変圧器による表示

で、式(24)'で与えられ、これは式(24)と一致している。

$$V_p^1 = n_{p1}^{21} \cdot V_1^2 + \dots + n_{pp}^{21} \cdot V_p^2 + \dots + n_{p\infty}^{21} \cdot V_\infty^2 \quad (24)'$$

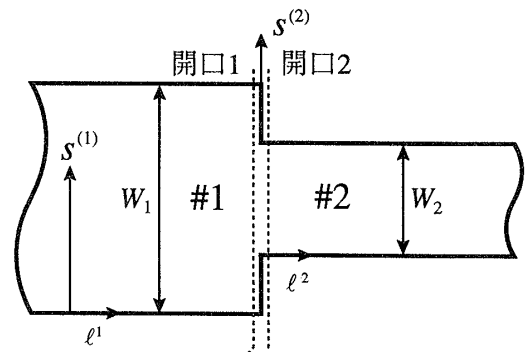
式(21)'と(24)'はどんな p, q に対しても成立するので、図4(b)に示す理想変圧器による等価回路は、式(25),(26)の行列式を等価回路的に表現していることとなる。

今後、図4(b)を同図(c)あるいは同図(d)に示すように理想変圧器群を太線で表示し、対応した理想変圧器の変圧比は $n^{21}:1$ と行列表現で表す。*

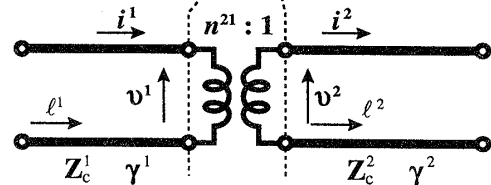
従って、方形導波管H面ステップ型不連続部全体の等価回路は、図3の線路部も含めて、行列による太線表示を用いると図5(b)とできることとなる。

図3と図4あるいは図5(b)の等価回路で、各方形導波管のモード特性インピーダンス、モード伝搬定数、理想変圧器の役割・意味が理解されやすく、また動作条件に対して応答がある程度予測・解析されるといった特長がある。特に本等価回路を用いると、

- ①TE₁₀基本モード入力、高次モード入力、多モード入力といったどんな状況でも、必要な次数までのモード振幅を計算することができる。
- ②更に対応した高次モードが、伝搬か非伝搬かにより、モードエネルギーが流出するのか蓄積されるのかの状況判断が可能である。
- ③但し、図5に示す無限個の伝送線路は、実際の計算では有限化しなくてはならないので、所要の計算精度を得るのにどの程度のモード次数までの伝送線路を考慮すべきかは本質的な問題である。



(a) ステップ形不連続



(b) 等価回路 (行列表示)

図5 ステップ型不連続部の等価回路 (行列表現)

* 回路理論によっては、理想変圧器行列を $n' = n' = (n^{21})'$ と定義する場合があります、この時は式(27)の関係は、 $v^1 = n' \cdot v^2, i^2 = (n')' \cdot i^1$ と表現されるが本質的な内容は同一。

5. 回路励振時の解析

方形導波管H面ステップ型不連続部の等価回路が図5と得られたので、この等価回路を用いると電圧散乱行列、電力散乱行列および動作時の電圧・電流分布(=電磁界分布)は容易に計算できることを示す。

5-1. 電圧散乱行列の計算 (S_V)

今、図6に示すステップ型不連続部の等価回路で開口1,2に入射するモード電圧を一般的に入力入射波モード電圧縦行列 A^1, A^2 とし、これに対し出力反射波モード電圧縦行列を B^1, B^2 とすると各要素電圧波より、各電圧縦行列は式(28)で定義される。

$$A^1 = (A_1^1, \dots, A_p^1, \dots, A_\infty^1)^T \quad A^2 = (A_1^2, \dots, A_q^2, \dots, A_\infty^2)^T$$

$$B^1 = (B_1^1, \dots, B_p^1, \dots, B_\infty^1)^T \quad B^2 = (B_1^2, \dots, B_q^2, \dots, B_\infty^2)^T \quad (28)$$

入出力モード電圧波縦行列と開口1,2でのモード電圧・電流縦行列の間には式(24)の関係がある。

$$v^1 = A^1 + B^1 \quad v^2 = A^2 + B^2$$

$$\bar{i}^1 = Y_C^1(A^1 - B^1) \quad \bar{i}^2 = Y_C^2(A^2 - B^2) \quad (29)$$

ところで、図8に示す等価回路で多開口理想変圧器の性質より式(27)の関係があるので、代入して次式を得る。

$$A^1 + B^1 = n'(A^2 + B^2)$$

$$Y_C^2(A^2 - B^2) = n \cdot Y_C^1(A^1 - B^1) \quad (30)$$

式(30)より式(31)で示す電圧散乱波行列 S_V^{ij} ($i, j=1,2$)は式(32)とを求めることができる。¹⁹⁾¹⁰⁾

$$\begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_V^{11} & S_V^{12} \\ S_V^{21} & S_V^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$S_V^{11} = (\bar{Z}_m + I)^{-1}(\bar{Z}_m - I) \quad S_V^{22} = (I + \bar{Y}_m)^{-1}(I - \bar{Y}_m)$$

$$S_V^{21} = Z_C^2 n Y_C^1(I - S_V^{11}) \quad S_V^{12} = n'(I + S_V^{22}) \quad (32)$$

但し、 $\bar{Z}_m = \bar{Z}_m Y_C^1$ $\bar{Y}_m = Z_C^2 \bar{Y}_m$ (33)

$\bar{Z}_m = n' Z_C^2 n$: 開口1より右側を見たときの入力インピーダンス

$\bar{Y}_m = n Y_C^1 n'$: 開口2より左側を見たときの入力アドミタンス

5-2. 電力散乱行列 (S_P)

出力モード電圧波の内、伝搬モードのみが出力として外部に取り出すことができるので、電力散乱行列の要素 S_{pq}^{ij} は、入力モード電力 $= |A_p^i|^2 / \text{Re}(Z_{C_p}^i)$ 、出力モード電力 $= |B_q^j|^2 / \text{Re}(Z_{C_q}^j)$ となる。式(32)で計算される電圧散乱行列の要素 S_{pq}^{ij} を用いて、式(34)と計算される。

$$S_{pq}^{ij} = \sqrt{\frac{\text{Re}(Z_{C_q}^j)}{\text{Re}(Z_{C_p}^i)}} S_{pq}^{ij} \quad (34)$$

但し、 $Z_{C_p}^i$ が虚数の場合、式(34)は定義されない。

5-3. 動作時の電圧・電流分布の計算

図2に示す方形導波管H面ステップ型不連続部での動作時の電圧・電流分布を求めるために、まずモード電圧波 A_p^i ($i=1, 2, p=1, \dots, \infty$) に対する出力モード電圧波 B_m^j ($i=1, 2, m=1, \dots, \infty$) を式(32)の要素を用いて式(35)で計算する。

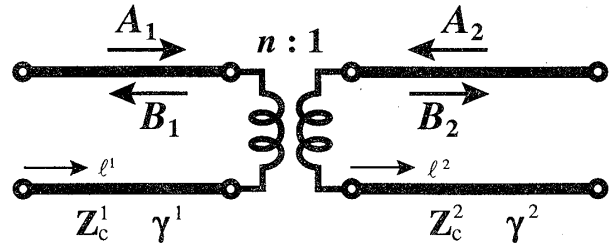


図6 ステップ型不連続部の等価回路

$$B_m^1 = \sum_{p=1}^{\infty} S_{Vmp}^{11} A_p^1 + \sum_{q=1}^{\infty} S_{Vmq}^{12} A_q^2$$

$$B_n^2 = \sum_{p=1}^{\infty} S_{Vnp}^{21} A_p^1 + \sum_{q=1}^{\infty} S_{Vnq}^{22} A_q^2 \quad (35)$$

方形導波管1,2でのモード電圧・モード電流分布 $V_m^1(\ell_1), I_m^1(\ell_1), V_n^2(\ell_2), I_n^2(\ell_2)$ は、入反射波より計算できるので、この関係を式(15)に代入することにより、方形導波管 $i=1,2$ 内での電圧・電流密度分布は求まる。

5-4. 本解析法での問題点

不連続部の等価回路は、図4(b)に示すとおり、不連続部前後で無限個のモード対応等価伝送線路で構成されている。原理的には不連続部で無限次のモード振幅まで励振されるので、無限次まで考慮した計算が要求されるが、これは実際上無理である。一般に高次モードなるほどモード振幅は小さくなるので、必要な計算精度が確保できるなら、それ以上の高次モードはモード振幅が小さいとして無視してもかまわないと考えられる。従って、所要計算精度を確保するためには、不連続部前後の方形導波管でどの程度のモード次数まで考慮すべきかが問題となる。この点を次に具体的に検討する。

6. 具体的適用例

図7に示す方形導波管H面不連続形状 ($W_1=20\text{mm}$, $W_2=10\text{mm}$, $d=5\text{mm}$, 内部は空気) に、これまで説明した図5の等価回路を適用し、 S 行列の周波数特性、動作時の電圧分布・電流密度分布、不連続部前後での高次モード励振振幅および電圧・電流密度の不連続部での接続具合を考慮モード次数をパラメータとして計算し、本手法での所要モード次数を検討した。

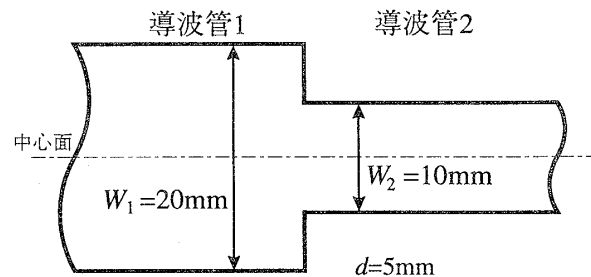


図7 解析した方形導波管H面ステップ型不連続構造

6-1. S 行列の周波数特性

不連続部前後の方形導波管内の考慮モード次数をパラメータとして、S 行列の要素 $S_{p11}^{11}, S_{p11}^{21}(=S_{p11}^{12})$ の 7.5GHz~25GHz (基本モードの遮断周波数 $f_c=7.5\text{GHz}$) にわたる周波数特性の計算結果を図8に示す。図中で (p, q) は方形導波管1,2での考慮モード次数を意味する。今回の計算では、 $W_1:W_2=2:1$ となっているので、 $p:q=2:1$ とするのが妥当である。導波管2での基本モードの遮断周波数は $2f_c$ となるので、7.5GHz~15GHzの周波数範囲では、導波管1よりの入射波は常に全反射 ($|S_{p11}^{11}|=1$) となるので、位相遅れ $\phi_{11}^{11} = -\arg(S_{p11}^{11})$ の周波数特性を図8に示す。この結果より ($p=22, q=11$) 程度のモードを考慮すると、特性はほぼ収束していることがわかる。また、15GHz以上では、導波管2でも TE_{10} が伝搬し始めるので、 $|S_{p11}^{11}|$ は減少し始め、 $|S_{p11}^{21}|$ が増加し始める。これらの特性もやはり ($p=20, q=10$) 程度で特性がほぼ収束している。特性の考慮モード次数に対する収束をより詳細に検討するために、基本モードの反射係数 (S_{p11}^{11}) の $f=11\text{GHz}$ での位相遅れ ϕ_{11}^{11} および $f=17\text{GHz}$ での電力反射係数 $|S_{p11}^{11}|^2$ (dB 表示) の考慮モード次数に対する収束特性を図9に示した。この結果より ($p=40, q=20$) 程度でかなり収束していることがわかる。

6-2. 不連続部での高次モードの励振量の計算

導波管1より TE_{10} モードの単位振幅が入射されたときの不連続部前後での導波管1,2での基本モードも含めた高次モード励振量対モード次数特性を図10に示す ($|B_p^1|, |B_q^2|$ 対 p 特性)。本計算結果より、考慮モード次数を増やすことにより、モード励振振幅は確実に収束していることがわかる。この計算で考慮モード次数近辺でのモード振幅には真値より異なってくることもわかる。従ってどの程度の次数までどれ程の精度で求めるかで何次のモードまで考慮して計算するべきかが決定される。

6-3. 高周波電圧分布の周波数特性

単位振幅を持った TE_{10} 波を導波管1より入力したとき、および導波管2より入力したときの不連続部前後での高周波電圧・電流分布は、式(15)に従って計算できる。(100,50)の高次モードまで考慮して、導波管1より単位電圧振幅が入射されたときの零位相での高周波電圧分布を周波数を変化して計算した。計算された電圧分布を図11に示す。なお、図11に示す高周波電圧分布は、考慮モード次数 (100, 50) の結果であるが、これ以下に考慮モード次数を下げて (20, 10) としても不連続部近傍以外の全体の分布はそれ程変わらない。

6-4. 高周波電圧分布と不連続部での電圧・電流密度分布の接続具合

図12は、導波管1より 20GHz の単位電圧入力に対する接続部での高周波電圧・電流密度分布の接続具合を示

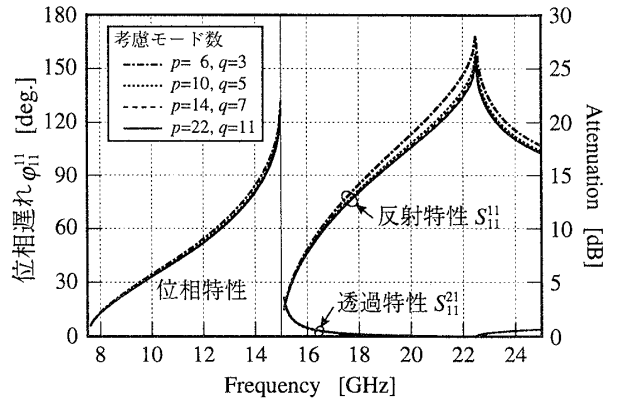


図8 方形導波管H面ステップ型不連続部での基本モード位相特性電力反射係数、透過係数の考慮モード次数に対する収束性

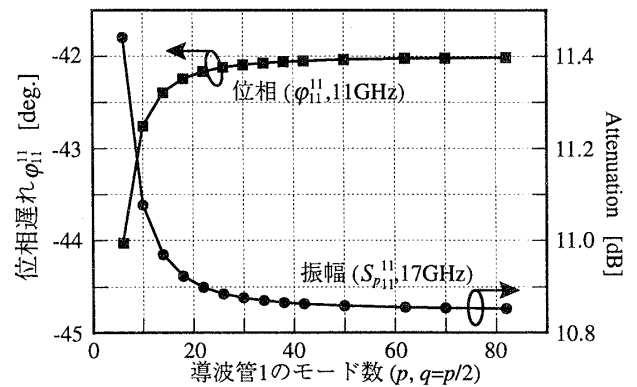
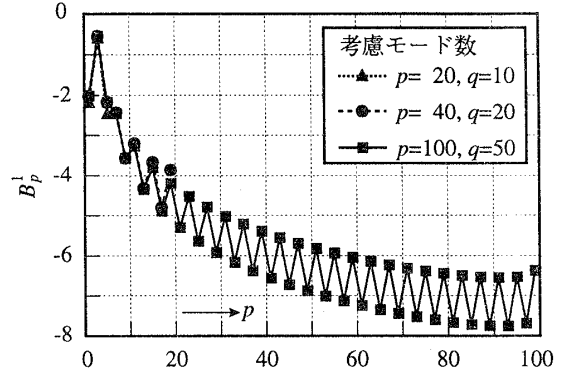
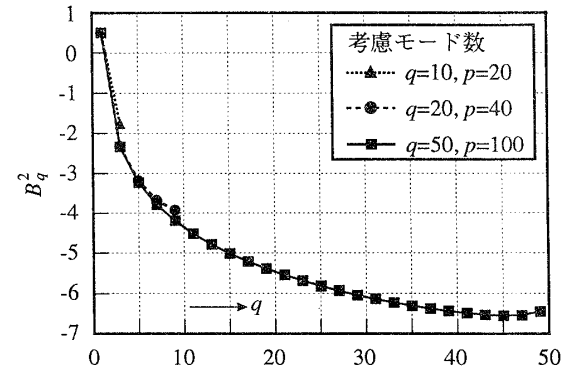


図9 ϕ_{11}^{11} の位相、振幅の考慮モード次数に対する収束特性の計算例



(a) 導波管1での奇数次のモード電圧励振振幅



(b) 導波管2での奇数次のモード電圧励振振幅

図10 不連続部での高次モード電圧励振量の計算結果 (但し、考慮モード次数 (p, q) をパラメータとして)

す。不連続部での電圧分布（実数部）の接続具合は、考慮モード次数(20, 10)に対して図12(a)に示すように全体としてはほぼ連続となっているが、電流分布（実数部）は必ずしも連続になっているとはいえない。これは考慮モード数不足によるもので、図 12(b),(c) に示すようにもっと高次までのモードを考慮すれば連続性はより確実に実現することがわかる。なお、虚数部に対しても同様の連続性が確保されている。

7. むすび

本研究では、方形導波管H面ステップ型不連続部の取り扱いに関して、次の点を明らかにした。

- (1) 不連続部は、不連続部前後の線路の無限個の固有伝送モードに対応した伝送線路同士が多開口理想変圧器（原理的には無限個の開口）で接続された等価回路で表現されることを示し、またこの等価回路の簡潔なベクトルの表現を提案した（等価回路）。
- (2) 本手法を実際の回路に適用する場合、考慮する伝送モードの有限個化を計る必要がある（モード数有限化）。
- (3) また、この等価回路を解くことで、動作時の電磁界分布が得られることを示した（電磁界分布と入出力特性）。
- (4) 本手法を具体的な回路に適用し、入出力周波数特性、高周波電圧分布を考慮モード次数をパラメータとして計算し、30-40次程度のモードを考慮するだけで、ある程度の精度で計算できることを示し、この結果は従来行われている結果と一致している（妥当性・有効性）。

今後、各種ステップ型不連続問題の動作の理解および実際の解析に本手法は有効であると考えている。

参考文献

- (1) N. Marcuvitz, ed. "Waveguide Handbook" pp168-172 Mcgraw-hill first edition 1951
- (2) R.E.Collin "Field theory of guided waves", 1st edition pp314-367 McGrawhill 1960, 2nd edition pp547-603 IEEE press 1991
- (3) L.Lewin "Theory of waveguide", Newnes-Butterworths pp251-257, 1975 等多数の文献あり
- (4) Z.Ma, E.Yamashita, S. Xu "Transverse Scattering Matrix Formulation for a Class of Waveguide Eigenvalue Problems" IEEE MTT vol.41 pp1044-1051 1993
- (5) H.Baudrand J.W.Tao, P.Guillot, P.Couffignal and R.Sorrentino "Modeling of Microwave Filters and Passive Components" 1995 IEEE MTT-s WS 1995
- (6) 宮崎, 湯川, 西野, 浅尾, 片木「無調整導波管フィルタの設計」電気学会 EMT95-99
- (7) A.Weisshaar, M.Mongiardo, V.K.Tripathi "CAD oriented equivalent circuit modeling of step discontinuities in rectangular waveguides", IEEE Microwave and guided letters, vol.6 No.4, pp171-173 1996.4 他
- (8) 山下榮吉編「電磁波問題解析の実際—第6章固有関数展開法—」電子情報通信学会
- (9) 許, 平岡「ストリップ線ステップ型不連続の等価回路表示」電子情報通信学会信学技報 MW98-82 1998
- (10) 許 瑞邦(分担執筆),「マイクロ波回路技術者および研究者のためのCADプログラム(第1章1.2を執筆)」ミマツデータシステム 1998

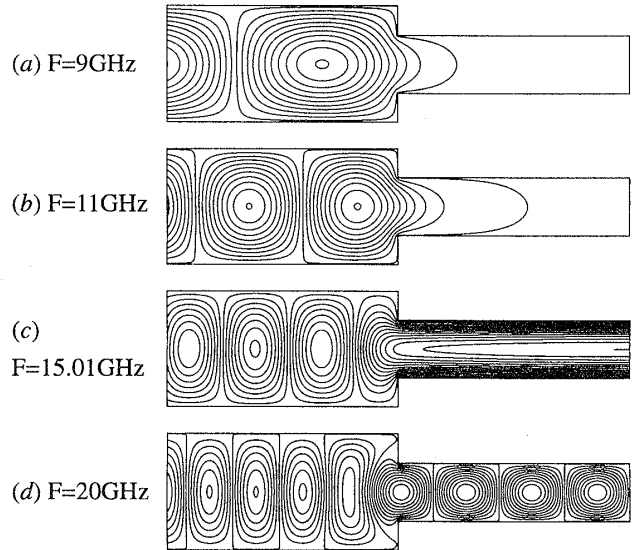


図11 高周波電圧分布の周波数特性（導波管1より単位高周波電圧が入射したとき零位相時での励振, 考慮モード数 $p=100, q=50$ ）

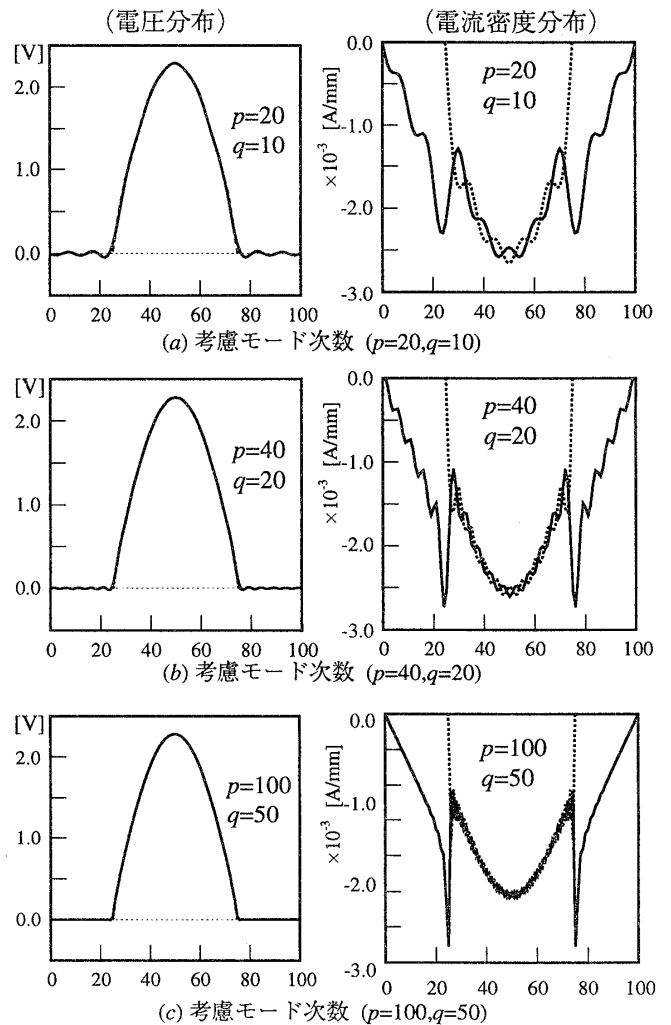


図12 不連続部での電圧・電流密度分布の考慮モード数による接続具合（実線が導波管1側, 点線が導波管2側, 但し、導波管1側より単位高周波入力, $F=20\text{GHz}$ ）