

角斜め切断正方形平面回路の固有モードの計算 — 一階段状分割・等価多線条伝送線路による —

平岡 隆晴 許 瑞邦

神奈川大学工学部電気工学科
〒 221-8686 横浜市神奈川区六角橋 3-27-1
TEL : 045(481)5661 FAX : 045(491)7915
E-mail : hiraoka@kamome.cc.kanagawa-u.ac.jp

あらまし ストリップ線/マイクロストリップ線直角曲がりを精度良くかつ合理的に解析する手法として、曲がり部を入出力平面導波路部と平面接合回路部に分割して、前者より多線条伝送線路等価回路が、後者よりフォスタ型等価回路が得られることが知られている。フォスタ型等価回路を求めるには、平面接合部の固有モード（固有値，固有関数）を計算する必要がある。ここでは、正方形平面回路の角を斜めに切断した角斜め切断正方形平面回路を取り上げ、多線条伝送線路表示の多開口理想変圧器を介した等価回路を導出した。この等価回路に基づいて固有モードを計算したので、その結果を示す。

キーワード ストリップ線直角曲がり，固有モード展開法，フォスタ型等価回路，多線条伝送線路

Calculation of eigenmode for square-shaped planar circuit with corner slant cut - Based on multi-mode transmission line equivalent network -

Takaharu Hiraoka Hsu, Jui-Pang

Department of Electrical Engineering, Kanagawa University
3-27-1 Rokkakubashi Kanagawa-ku Yokohama 221 Japan
TEL : 045(481)5661 FAX : 045(491)7915
E-mail : hiraoka@kamome.cc.kanagawa-u.ac.jp

Abstract

In order to analyze stripline/microstrip line right-angle bend with arbitrary shape systematically, the corresponding right-angle bend is divided into planar junction and planar waveguide. Equivalent network for each section can be given by modal analysis; multi-transmission line network for the former and Foster-type equivalent network for the latter. In order to calculate circuit parameters of the Foster-type equivalent network, eigenmode for planar junction must be calculated. In this report, stripline right-angle bend with slant cut at corner is investigated. The corresponding junction can be approximated by a cascade connection of wide but extremely short stripline in step division, and then the equivalent network for this structure can be represented by alternatively cascaded multi-transmission lines and multi-port ideal transformers. Based on this network representation, the corresponding matrix-type eigenvalue problem is formulated and solved.

key words Stripline right-angle bend, Eigenmode expansion method, Foster-type equivalent network, Multi-transmission line

1. はじめに

ストリップ線/マイクロストリップ線直角曲がりの電力透過特性を改善するために、図1に示す各種の形状が提案され実用化されている。従来、これらの回路の最適切断量は、実験的に或いはマイクロ波シミュレータソフトで決定されており、実際のではあるが精度の点で問題があると考えられる。ところでストリップ線直角曲がりは、実効幅を考慮することにより、磁気壁を持った2次元平面回路でモデル化でき、この回路を図1で灰色部分の平面接合部と平面導波路部に分割する。各々の領域に固有モード展開法を適用し、平面導波路部に対しては等価多線条伝送線路に、平面接合部に対してはフォスタ型等価回路が得られ、全体として図2の等価回路を得る。

平面回路部の無限個の固有モード（固有値・電圧分布）からフォスタ型等価回路の回路定数（共振周波数・平面導波路との結合度）が計算されるので、入出力特性を精度良く求めるためには、平面接合部の固有モードをより多く高精度に計算する必要がある。

本報告では、直角曲がりの平面接合部に図1(c), (d)に示す角斜め切断正方形平面回路を階段状に近似し、各部分をストリップ線多線条伝送線路と多開口理想変圧器の等価回路に置き直し、固有回路方程式を構成し、固有モードを計算した。また、分割形状、分割数および考慮モード数に対する固有値の収束性を検討したので報告する。

2. 角斜め切断正方形平面回路の等価回路の導出

2.1 角斜め切断回路の階段分割

図1(c)の角斜め切断正方形平面回路は、一辺の長さ a の正方形平面回路の一角を切断率 $C=cla$ で斜めに切断した形状である。斜めに切断された部分（台形部）は、線路長 l が同じで線路幅 W が異なる矩形伝送線路に均等 M 分割することで、階段状に近似することとする。図1(d)は、切断率 C が1.0を越える場合 ($c>a$) であり、平面接合部の形状は灰色部で示すようになる。

2.2 多線条伝送線路と多開口理想変圧器

ストリップ線路は実効幅近似により平行板線路として考えるので、 p 次の伝送モードのモード伝搬定数 γ 、モード特性インピーダンス Z_c が式(1)、幅モード固有関数が式(2)で与えられると、無限個の伝送モードにまで対応した等価多線条伝送線路で記述される。

$$\gamma_p^i = \sqrt{(p\pi/W^i)^2 - \omega^2 \epsilon \mu}, \quad Z_{c_p}^i = \frac{j\omega \mu}{\gamma_p^i} \frac{d}{W^i} \quad [\Omega] \quad (1)$$

$$c_p^i(s^i) = \sqrt{\epsilon_p} \cos \frac{p\pi}{W^i} s^i \quad (2)$$

$$\epsilon_p = 1 \quad (p=0), \quad 2 \quad (p \geq 1) \quad (p=0,1,2,\dots)$$

また、階段状分割することで生じるステップ型不連続部は、多線条伝送線路の幅モード固有関数の直交性を利用することにより、式(3)の多開口理想変圧器の変圧比で結合される。

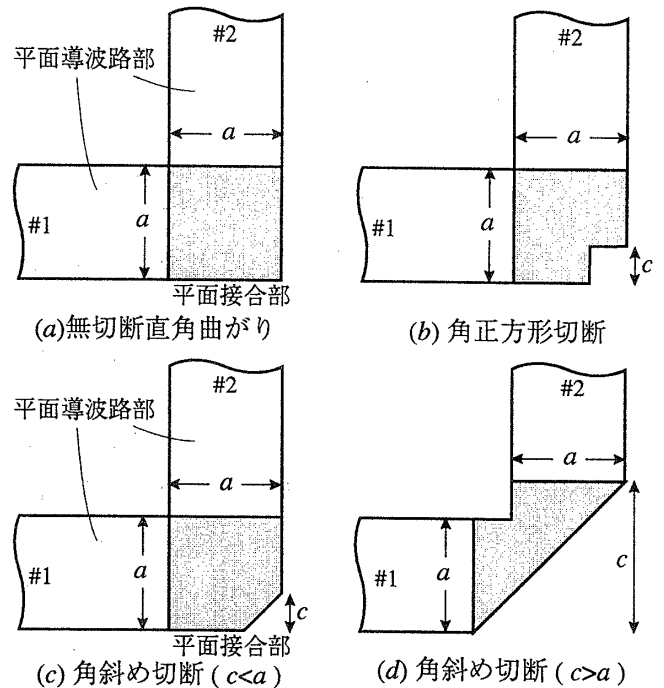
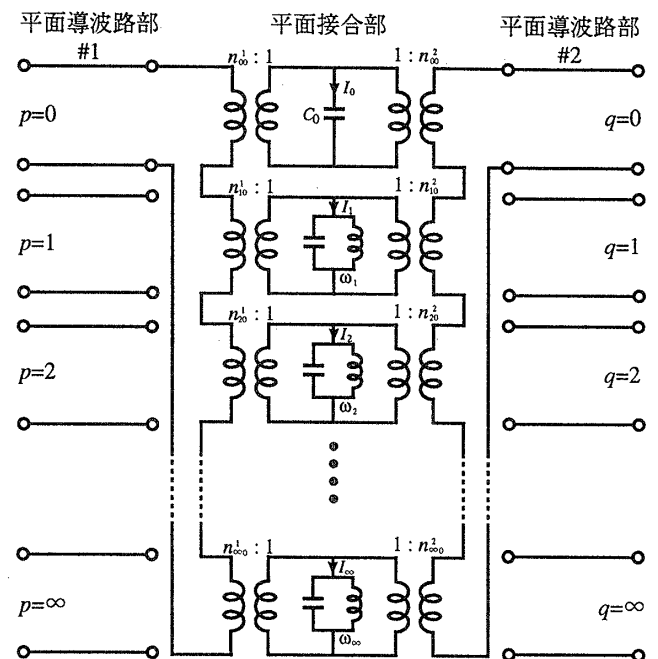


図1 ストリップ/マイクロストリップ線直角曲がり (平面接合部と平面導波路部への分割)



$$n_{n,p}^i = \frac{1}{W^i} \int_0^{W^i} \varphi_n(x,y) \cdot c_n^i(s^i) ds^i$$

$$c_n^i(s^i) = \sqrt{\epsilon_n} \cos \frac{n\pi}{W^i} s^i, \quad \omega_n = \frac{k_n}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

図2 平面接合回路のフォスタ型等価回路

表1 平面回路の固有関数系

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} + k_n^2 \varphi_n(x,y) = 0$$

但し、 $\nabla_t \varphi_n \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0$ (開放境界)

$$k_0 = 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots$$

$$\frac{1}{S} \iint_S \varphi_n(x,y) \cdot \varphi_m(x,y) dx dy = \delta_{nm} \quad (\text{正規直交系})$$

$$n_{pq}^{(s-1)(s)} = \frac{1}{W(s)} \int_0^{W(s)} c_p^{(s-1)}(s^{(s-1)}) \cdot c_q^{(s)}(s^{(s)}) ds \quad (3)$$

この時、幅広と幅狭の伝送線路の変圧比は $1:n^{(s-1)(s)}$ となり、逆に幅狭と幅広の場合は $n^{(s-1)(s)}:1$ の結合度となる。

したがって、角斜め切断正方形平面回路 (図3(a)) は、同図(b)のように #0 ~ #M の矩形形状の伝送線路に分割され、各々の線路を等価回路で表示すると、高次モードも考慮した等価多線条伝送線路・多開口理想変圧器で表される等価回路 (同図(c)) となる。太線で表示した等価回路はそのベクトル表示である。

3. 角正方形切断正方形平面回路の固有モードの計算

3.1 固有値の計算

角斜め切断正方形平面回路の固有モードを導出するためには、表1の固有関数系で示すように、平面回路Sの全周囲を開放としたときの平面回路方程式を解けばよい。すなわち、図3の等価回路において伝送線路 #0 の端子1と伝送線路 #M の端子2を開放として等価回路を解く。i 段目の伝送線路の端子電圧・電流は表2のように定義される。前段 #(i-1) の端子2の実効アドミタンス \bar{Y}_{in2}^{i-1} (式(9)) は、式(4)の多開口理想変圧器の変圧比により #i 段目の端子1での実効インピーダンス \bar{Z}_{in1}^i が得られ

る (式(10))。さらに伝送線路の関係式(8)より端子2での実効アドミタンス \bar{Y}_{in2}^i が求められる (式(11))。この手順で #0 から #M までの各伝送線路で繰り返し計算を行うと、最終的には #M の端子2での実効アドミタンスが得られる。ここで、#M の端子2は開放条件であるため、 $\bar{i}_2^M = 0$ となり、式(4)の固有値方程式を解くと $\det=0$ より固有値が計算される。

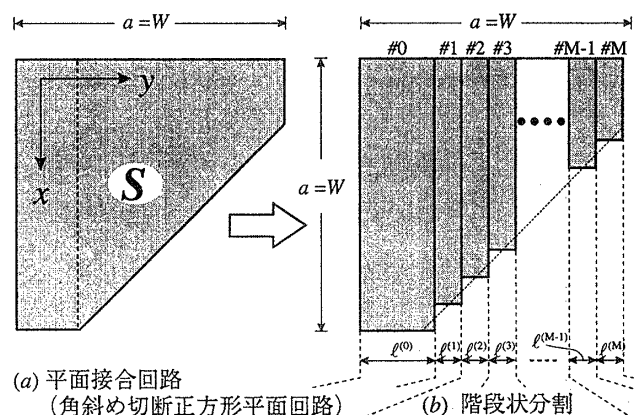
$$\bar{i}_2^M = \bar{Y}_{in2}^M v_2^M = 0 \quad (4)$$

3.2 固有モードの電圧分布の計算

計算した固有値を用いると、式(4)で求めた \bar{i}_2^M より各伝送線路での端子電圧・電流 $v_1^i, v_2^i, \bar{i}_1^i, \bar{i}_2^i$ が計算できるので、角斜め切断正方形平面回路の固有モードの電圧分布は式(5)で求めることができる。

$$\varphi^i(x, y) = \sum_{p=0}^P (A_{p1}^i e^{\gamma_p^i(x'-y')} + B_{p1}^i e^{-\gamma_p^i(x'-y')}) \cdot c_p^i(x) \quad (5)$$

但し、 $A_{p1}^i = \frac{1}{2}(V_{p1}^i + Z_{Cp}^i \bar{I}_{p1}^i)$, $B_{p1}^i = \frac{1}{2}(V_{p1}^i - Z_{Cp}^i \bar{I}_{p1}^i)$ (式(4)の固有モード縦行列を決定するとき、任意定数倍の自由度があったが、表1の正規系となるように式(5)の固有関数を正規化することで、この任意定数も一意的に決定される。



(a) 平面接合回路 (角斜め切断正方形平面回路)

(b) 階段状分割

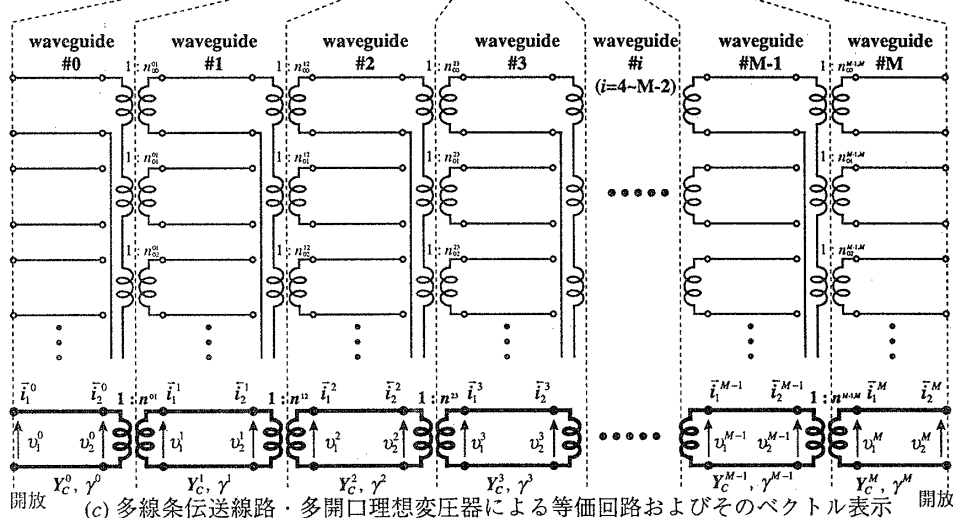
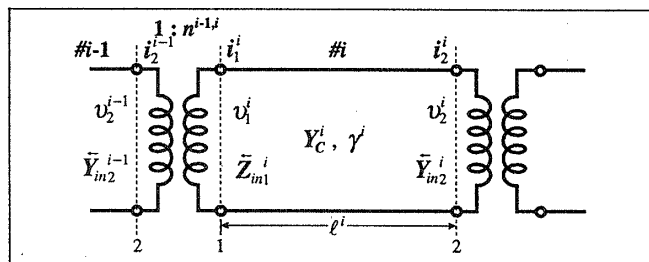


図3 階段状分割による角斜め切断正方形平面回路の多線条伝送線路・多開口理想変圧器による等価回路

表2 i 段目の伝送線路と繰り返し計算による実効アドミタンス \bar{Y}_{in2}^M の計算方法



多開口理想変圧器の変圧比

$$v_1^i = (n^{i-1,i})^i v_2^{i-1} \quad (7)$$

$$\bar{i}_2^{i-1} = n^{i-1,i} \bar{i}_1^i$$

多線条伝送線路

$$Y_T^i = \begin{pmatrix} Y_1^i & Y_2^i \\ Y_2^i & Y_1^i \end{pmatrix} \quad Y_1^i = Y_C^i \coth \gamma^i l^i$$

$$Y_2^i = -Y_C^i \operatorname{csch} \gamma^i l^i \quad (8)$$

実効アドミタンスの計算

$$\bar{Y}_{in2}^{i-1} \Rightarrow \bar{Z}_{in2}^{i-1} \quad (9)$$

$$\bar{Z}_{in1}^i = (n^{i-1,i})^i \bar{Z}_{in2}^{i-1} n^{i-1,i}$$

$$\bar{Y}_{in1}^i = (\bar{Z}_{in1}^i)^{-1} \quad (10)$$

$$\bar{Y}_{in2}^i = Y_1^i - Y_2^i (\bar{Y}_{in1}^i + Y_1^i)^{-1} Y_2^i \quad (11)$$

4. 計算結果

4.1 階段分割の形状および分割数による固有値の収束性

斜めの部分を階段状に分割する際、図4中に示すように斜め部分より内側で分割した内側分割、外側で分割した外側分割そして中心で分割した中心分割の3つの形状で計算を行った。図4は切断率 $C=0.3$ の場合で、3種の形状で分割数を変化させたときの3番目のモードの固有値と4番目の固有値の収束性の計算例を示す。ここで、 $C=0.3$ 、分割数 $M=30$ のとき、伝送線路の長さ l は $a/100$ となる。この結果、形状は中心分割、分割数は30分割 ($l=a/100$) で固有値は収束していると考えられ、他のモードの固有値もほぼ同様の傾向を示す。

また、角斜め切断正方形回路の真の固有値は階段分割近似した内側分割と外側分割の固有値の間にあり、内側と外側の差は固有値の誤差の上限と下限を表すものと考えられる。

4.2 考慮モード数による固有値の収束性

図3(c)の等価多線条伝送線路において、 M 分割された各伝送線路の考慮モード数 $p(\#i)$ は、伝送線路#0の幅との比より式(12)で与えられる。図5は伝送線路#0の考慮モード数 $p(\#0)$ を変化させたときの各分割数 M の固有値の収束性を示す。分割が少ない $M=3,5$ は考慮モード数が少なくても収束しはじめるが、本来の角斜め切断の回路と形状が大きく異なってしまう。分割数 $M=30,60$ が大きくなると伝送線路の長さ l が細くなり、高次モードの振幅が十分減衰していないので、隣接する伝送線路の高次モードの影響を受けやすくなる。このため、分割数を多くするとより角斜め切断回路に近い近似形状となるが、各々の伝送線路では高次のモード数まで十分考慮する必要があると考えられる。

4.3 不連続部での電圧分布の連続性

2.2節で述べたステップ型不連続部における多開口理想変圧器の等価回路の妥当性・収束性を検討するために、ステップ不連続部両側の電圧分布の連続性について、伝送線路の考慮モード数に対する収束性を調べた。例として図6に $C=0.3$ の時の電圧分布と伝送線路#0,#1間の電圧分布のつながりの様子を示す。それぞれ分割数 $M=3$ と30の場合で、各々伝送線路#0の考慮高次モード数 $p=3,30$ の時を計算した。

4.4 固有値、固有モードの電圧分布の計算

4.1, 4.2節の結果から、中心分割、分割した伝送線路の長さ $a/100$ 、伝送線路#0の考慮モード数 $p=30$ のときの固有値の計算結果を図7、表3に示す。図7は切断率 C を $0.2 \sim 1.95$ まで変化させたときの固有値の推移で同じモードを線で結んである。

また、各固有値に対応する低次から8次までの固有モードの電圧分布の計算結果を図8に示す。

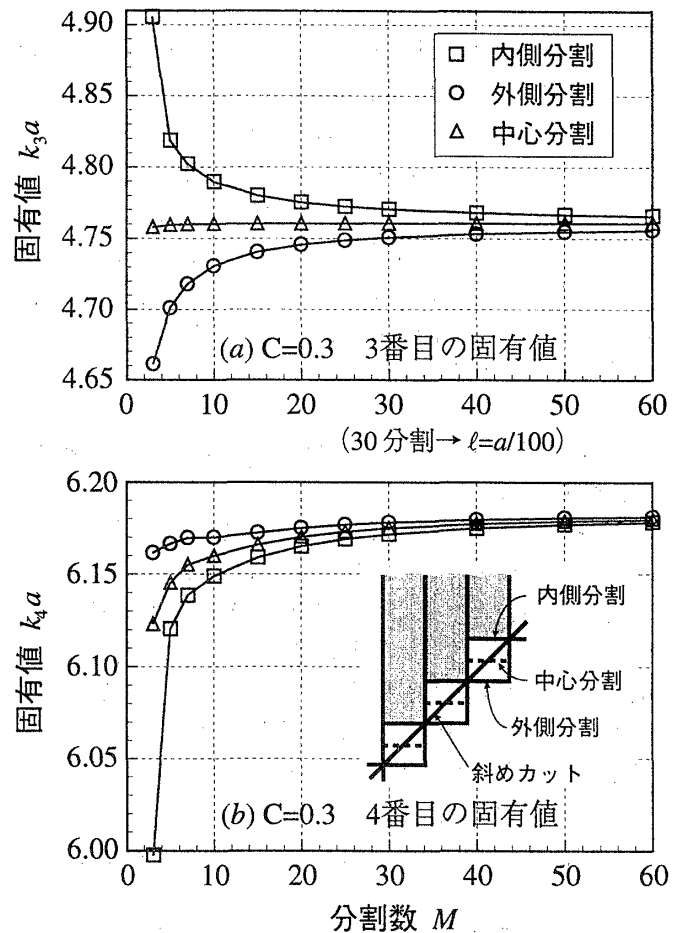


図4 分割形状および分割数による固有値の収束性

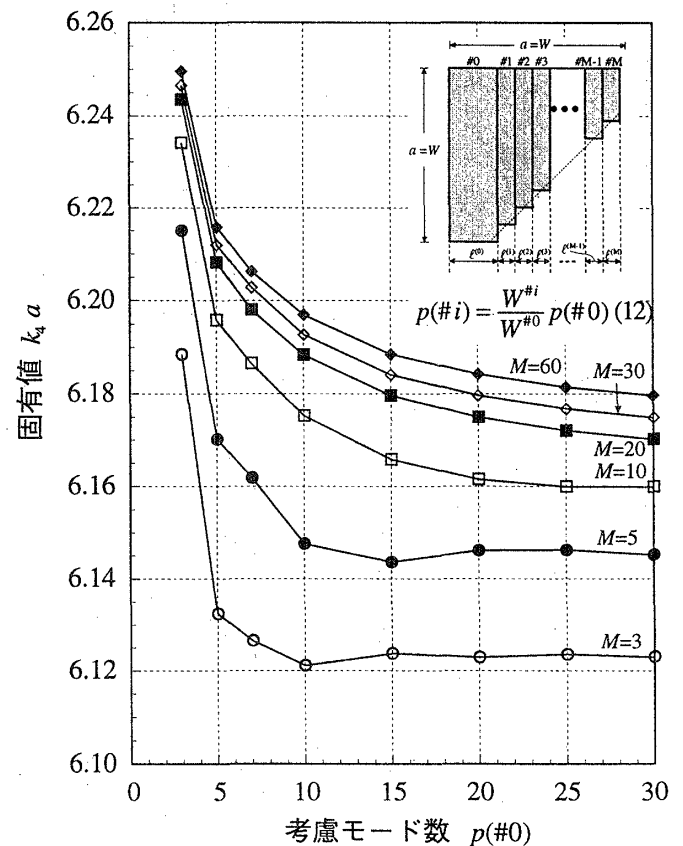


図5 考慮高次モード次数による固有値の収束性 (切断率 $C=0.3$, 中心分割)

5. むすび

ストリップ線直角曲がりを平面導波路部と平面接合回路部に分割して取り扱い、その接合回路部である角斜め切断正方形平面回路の固有モード（固有値・電圧分布）を多線条伝送線路・多開口理想変圧器の等価回路に基づいて計算を行った。また、階段状分割の形状、分割数に対する固有値および考慮伝送モード次数に対する固有値の収束性や不連続部の電圧分布の連続性を検討した。

今後は、図1に示すような他形状の平面接合回路の固有モードを今回報告した手法を適用して計算する予定である。

参考文献

- [1] 許,平岡 「ストリップ線ステップ型不連続の等価回路表示 - 多線条伝送線路, 多開口理想変圧器による -」 信学技報 MW98-82
- [2] 平岡, 田部井, 許 「角正方形切断正方形平面回路の固有モードの計算 -モード対応多線条伝送線路等価回路に基づいて-」 信学技報 MW98-106
- [3] Hiraoka, Tabei, Kojima, Hsu "Analysis of Stripline Right-angle Bend with Square-shaped Corner cut based on Eigenmode Expansion Method and Foster-type Equivalent Network" APMC'98 WE1B-3
- [4] 平岡, 田部井, 小島, 許 「角斜め切断正方形平面回路の固有モード計算 -階段状分割, 多線条伝送線路による-」1997年信学ソサイエティ大会 SC-2-2

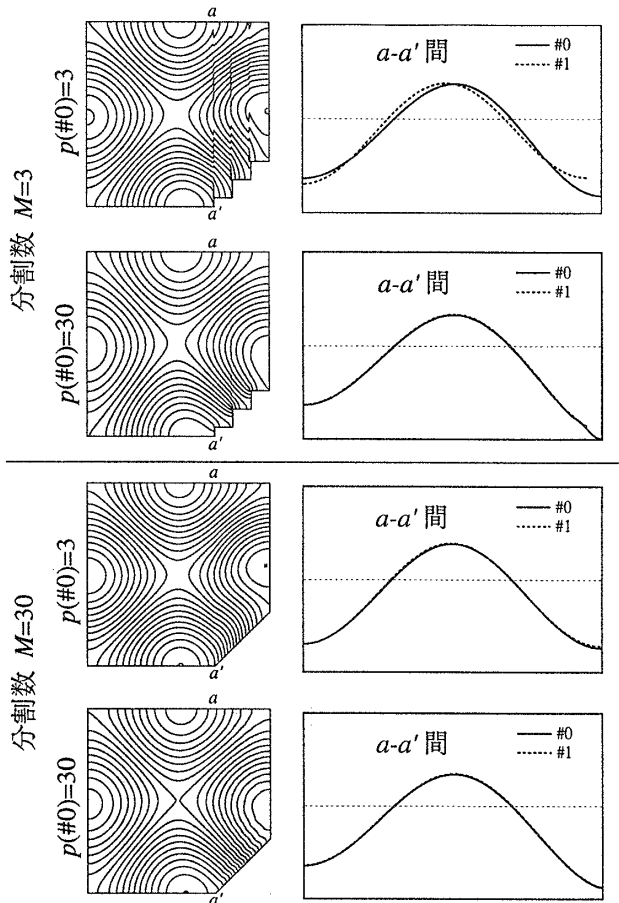


図6 不連続での電圧分布の連続性 (C=0.3, mode4)

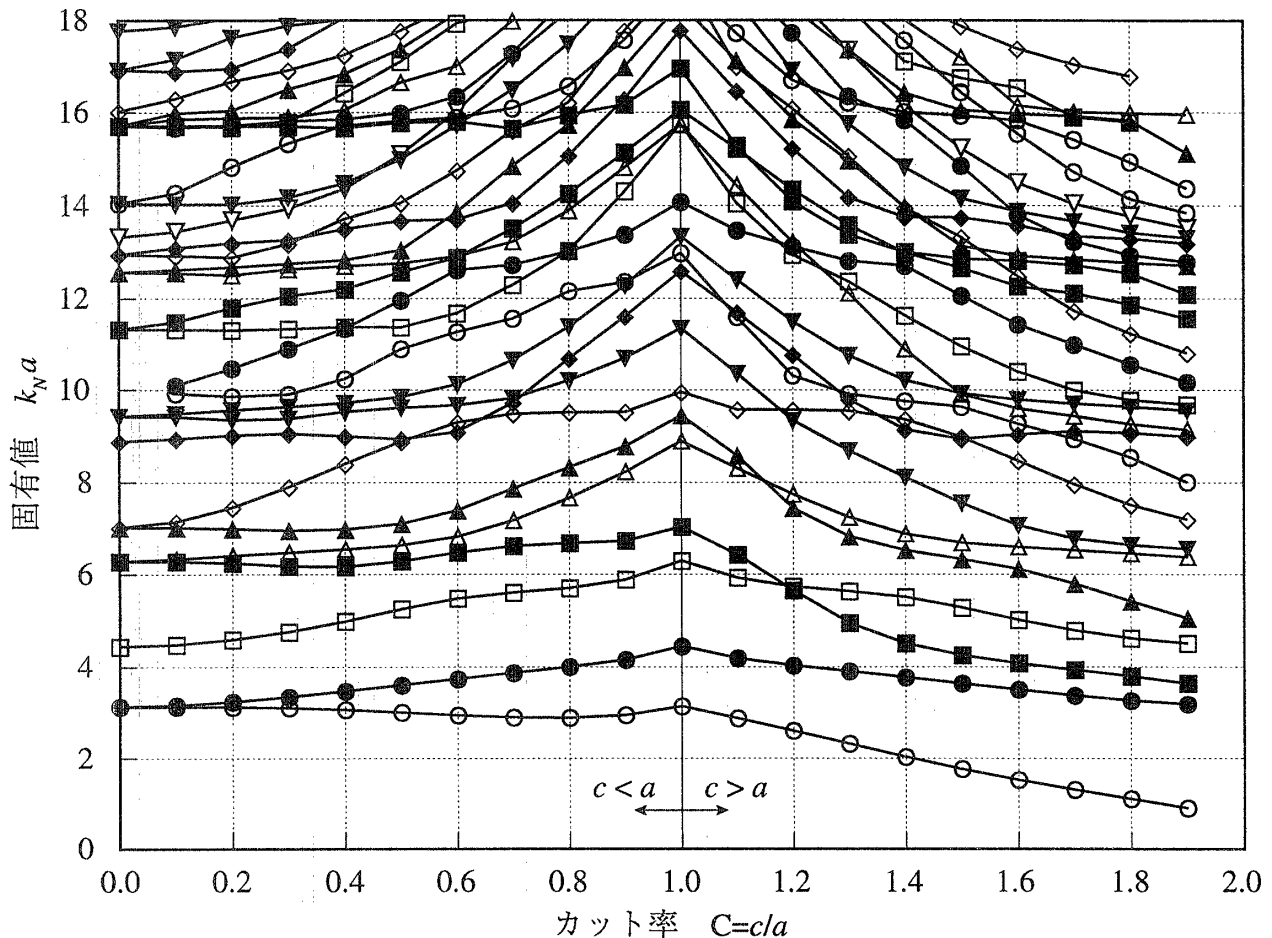


図7 各切断率ごとの固有値の推移 (伝送線路の長さ $\ell=a/100$, 考慮高次モード数 $p(\#0)=30$)

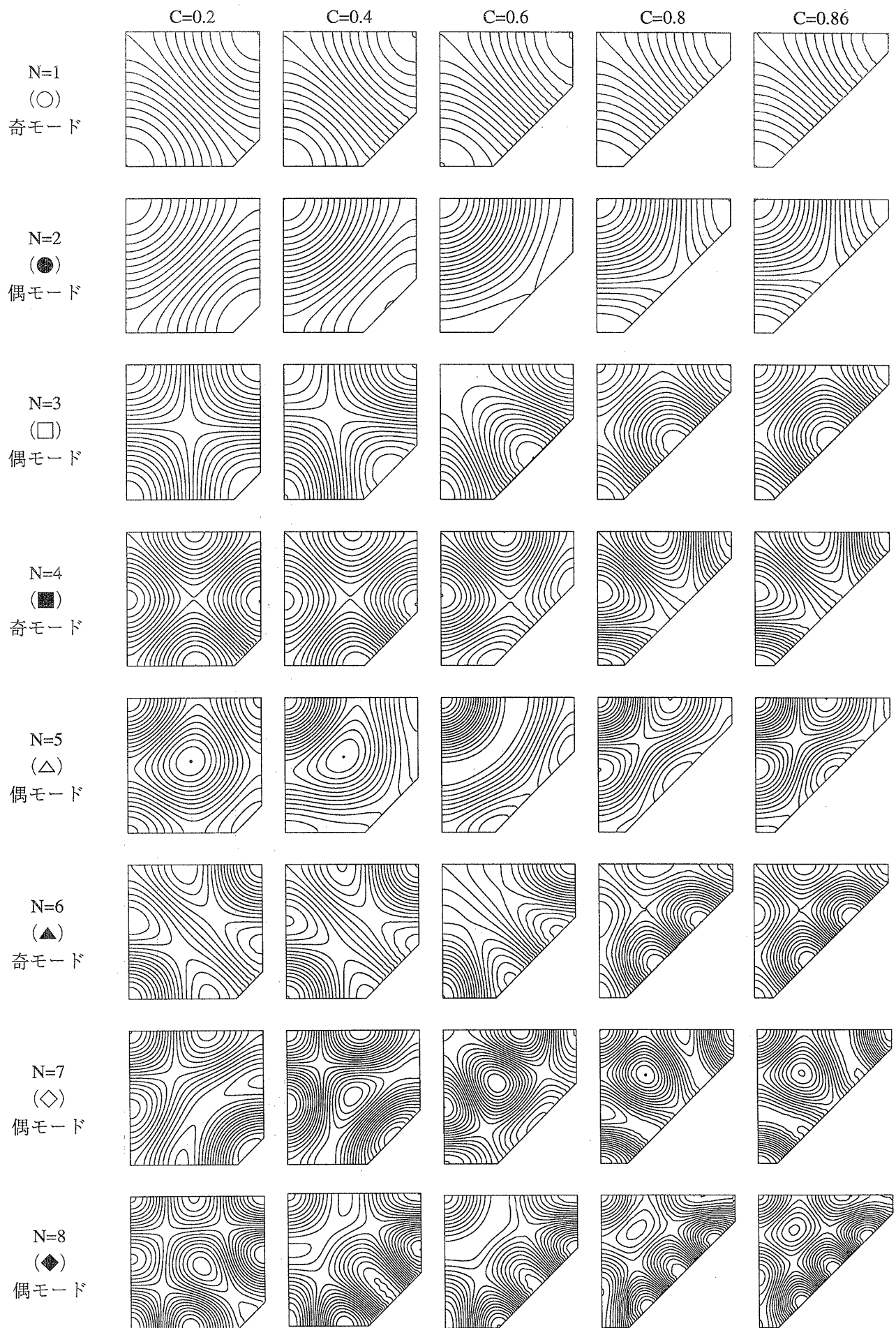


図8 角斜め切断正方形平面回路の固有モードの電圧分布 (1) ($N=1\sim 8, C=0.2\sim 0.86$)

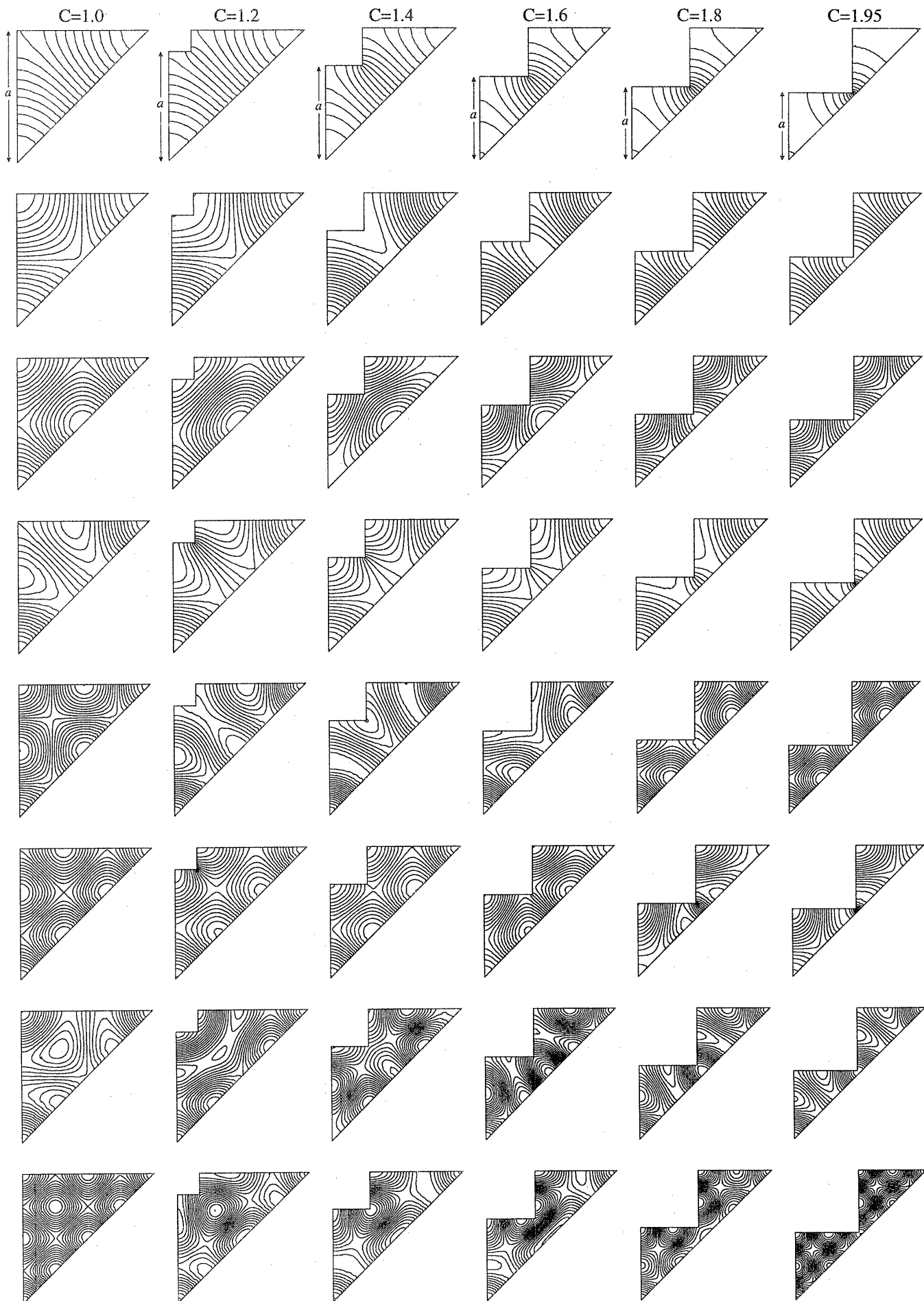


図8 角斜め切断正方形平面回路の固有モードの電圧分布(2) (N=1~8, C=1.0~1.95)

表3 角斜め切断 (切断量 c) 正方形平面回路 (一边 a) の固有値表 ($K_N = k_{Nd}$)

モード 数	切断率 $C=c/a$																													
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9											
1	3.141240	3.136073	3.116339	3.074878	3.015686	2.953458	2.906767	2.896165	2.952865	3.149357	2.885442	2.608829	2.321447	2.033600	1.766279	1.527257	1.311529	1.112249	0.911446											
2	3.171176	3.248559	3.356661	3.481509	3.613023	3.745330	3.875457	4.004801	4.158184	4.448205	4.189938	4.035637	3.906798	3.776502	3.643029	3.510336	3.383269	3.273648	3.195307											
3	4.483905	4.592846	4.760769	4.986172	5.249031	5.478084	5.607387	5.704083	5.887034	6.298532	5.927827	5.65863	4.947589	4.510854	4.253315	4.080373	3.937250	3.798612	3.642773											
4	6.280526	6.248567	6.179656	6.167603	6.287842	6.479399	6.621858	6.685759	6.730894	7.041432	6.431410	5.734402	5.634508	5.508397	5.282019	5.018214	4.790689	4.620327	4.511798											
5	6.331273	6.410928	6.482312	6.551081	6.641596	6.825985	7.180531	7.666388	8.227034	8.895983	8.305461	7.445307	6.832724	6.530834	6.332927	6.122238	5.800621	5.415216	5.052446											
6	7.022208	6.995510	6.961299	6.984707	7.106611	7.399444	7.869576	8.327477	8.783005	9.447874	8.580145	7.742686	7.249070	6.885191	6.695095	6.603185	6.533133	6.460405	6.379275											
7	7.148480	7.462046	7.903008	8.406288	8.887957	9.094634	9.483444	9.515548	9.524082	9.958110	9.575965	9.340113	8.687794	8.113835	7.56529	7.074632	6.783733	6.466686	6.560312											
8	8.943558	9.019913	9.059204	9.001763	8.936277	9.296145	9.724929	10.213277	10.699111	11.353339	10.365571	9.568405	9.547373	9.143206	8.943255	8.472668	7.963258	7.517179	7.201047											
9	9.416571	9.351635	9.379135	9.528666	9.614580	9.668812	9.823881	10.688388	11.611231	12.597501	11.598667	10.311793	9.795055	9.363890	8.985482	9.040279	8.944188	8.543098	8.005706											
10	9.485768	9.564424	9.633749	9.720164	9.852660	10.127014	10.656679	11.387463	12.281459	12.983956	11.702912	10.769628	9.912309	9.756399	9.637325	9.268835	9.107287	9.071220	8.996526											
11	9.922970	9.861009	9.909728	10.247246	10.896145	11.271169	11.564532	12.154653	12.357588	13.343042	12.409824	11.501821	10.756774	10.214608	9.907323	9.599419	9.435619	9.259643	9.141791											
12	10.099409	10.473487	10.904340	11.347524	11.682490	12.296798	13.022193	13.381895	13.381895	14.082700	13.474752	12.947707	12.115668	10.894353	9.929570	9.792239	9.704678	9.635748	9.557339											
13	11.323379	11.308900	11.338196	11.383976	11.962446	12.619349	12.730153	13.029378	14.309129	15.741952	14.058294	13.128518	12.368769	11.633979	10.959307	10.408833	9.997770	9.783776	9.684889											
14	11.487283	11.798218	12.056376	12.202265	12.575715	12.888158	13.228612	13.898631	14.816956	15.747955	14.438068	13.219388	12.817182	12.714178	12.062913	11.438640	10.996426	10.558755	10.176651											
15	12.549132	12.506849	12.637797	12.704433	12.766060	12.914416	13.513455	14.259310	15.133666	16.057615	15.219517	14.095212	13.382618	12.994837	12.665760	12.266186	11.738351	11.237680	10.807837											
16	12.623535	12.678856	12.756027	12.835651	13.050799	13.707325	14.062321	15.071362	16.169100	16.958182	15.278958	14.345590	13.588853	13.007242	12.866478	12.490733	12.113855	11.869602	11.565978											
17	12.927251	12.891192	13.186141	13.505621	13.680721	13.865335	14.853173	15.732356	16.287956	17.788894	16.463729	15.224460	14.178660	13.759428	13.140462	12.820140	12.729577	12.545522	12.093159											
18	13.095200	13.199533	13.268727	13.723384	14.059662	14.752991	15.613160	15.941323	16.982045	18.359892	17.001294	15.859015	14.966609	13.960222	13.30272	12.927663	12.850489	12.774626	12.719424											
19	13.446522	13.692676	13.938866	14.363624	14.991562	15.721522	15.648961	16.217382	17.573521	18.897961	17.133730	16.082288	15.059132	13.977702	13.753334	13.582272	13.239150	12.943061	12.795185											
20	14.035185	14.030917	14.176748	14.482462	15.092885	15.803268	16.086824	16.567689	17.771918	19.156182	17.725935	16.704139	15.762464	14.821992	14.157977	13.808242	13.350958	13.293523	13.195063											
21	14.266451	14.830945	15.335258	15.667000	15.775618	15.886546	16.495767	17.492186	18.728751	19.916823	18.452548	16.915907	16.209219	15.837809	14.860326	13.883829	13.669628	13.422622	13.312795											
22	15.675203	15.679024	15.697875	15.716885	15.817041	16.018401	17.189285	18.199156	18.952271	20.156674	19.045502	17.729914	16.354991	16.005860	15.229922	14.489569	14.043490	13.780781	13.523307											
23	15.707725	15.707780	15.789816	15.850848	15.990592	16.345581	17.276880	18.498096	19.743094	21.122452	19.097501	18.287815	17.347522	16.158010	15.929608	15.544445	14.722913	14.146817	13.852119											
24	15.707963	15.712903	15.809959	16.051211	16.651303	16.998722	17.982229	18.726929	20.199749	22.048900	19.931478	18.619334	17.362891	16.426723	16.052470	15.828200	15.410974	14.932630	14.370624											
25	15.848003	15.876630	15.887721	16.423541	17.100231	17.934930	18.223293	18.893518	20.384892	22.233005	20.393620	18.887953	18.108419	17.113015	16.443565	15.965735	15.898972	15.789607	15.130190											
26	15.979109	16.037857	16.503556	16.837552	17.374830	18.144921	19.047415	19.372626	20.440761	22.269644	20.635961	19.054965	18.304593	17.563359	16.752592	16.152005	15.921583	15.824714	15.953047											
27	16.300156	16.672024	16.914805	17.248656	17.777883	18.358166	19.128069	20.054057	21.380288	22.702185	20.753069	18.614121	17.532262	18.024574	17.196222	16.533399	16.005796	15.964216	16.013895											
28	16.890601	16.948525	17.383916	18.026447	18.297746	18.882838	19.260299	20.272018	21.571878	22.926610	21.579894	20.221037	19.227013	18.292260	17.444630	16.963513	16.508130	15.982986	16.422773											
29	17.150767	17.626421	17.885903	18.060821	18.833068	19.127149	19.735436	21.085109	22.589435	23.980482	22.489400	20.591520	19.271602	18.480895	17.886708	17.389687	16.663946	16.157496	16.816220											
30	17.859468	18.057370	18.314265	18.419237	18.870493	19.263310	20.374150	21.194479	22.622548	24.581029	22.756258	21.056836	19.326774	18.889056	18.293809	17.733476	17.043293	16.791676	17.282773											