1 次関数 y ＝ ax+b のグラフが直線になることを納得させる指導

沖山　義光

1．はじめに

教育実習生指導の担当者として，実習生の研究授業を参観させてもらう機会が多い。今年の県立高校での実習生の研究授業を拝見していたら，幾つかのｘの値を入れるとｙの値が出てくるという「関数ボックス」を自作しての関数指導が行われた。3個の組 (x, y) から一次関数，2次関数などを推理して求めそれをグラフにかくという指導だった。具体的に出てくる数値の組は単純で推理も容易にできるものだったので生徒たちは疑問なく予定通り授業はうまく進んでいった。私はこれを見ていて，3個の数値の組から1次関数や2次関数が一意に決まるはずはないのに生徒の方から質問や疑問はないのか気になり観察していたが生徒からその表明はなかった。授業の後半では $y = ax+b$ のグラフを描くのに格子点をプロットしその間の点も細かくとるとそれらはすべて一つの直線上にのるという説明をしていた。私も中学生の頃このように教わったが，途中の点をいくら細かくとって確かめても点は無数にあるのですべてを確かめることはできないじゃないかと疑問をもっていた。教師になってからもそのことは疑問として残っていた。今回指導したいと注目したのは格子点以外の点もすべて一直線上にのるということへの疑問の解決である。

私はこれまで中高生を長年教えて，日々実践の結果から指導法の工夫の11個の観点[1]から

⑧問題作りをさせる。
の実践例として中3生対象にした「因数分解の指導」[2]，

⑨作業や実験を通した指導をする。
の観点を中心に③，⑥，⑩を包含した指導事例として「中高生におけるMahtematicaを使った指導」[3] を発表した。

今回は

⑦数学の厳密性，普遍性を意識して指導する。
を観点にして，「1次関数 $y = ax+b$ のグラフの指導」について考察しようと思う。

2．最近の教科書での指導法

啓林館の文部科学省検定済教科書「数学Ⅰ」[4] を見ると，変化と対応の章のあらましは次のようになっている。

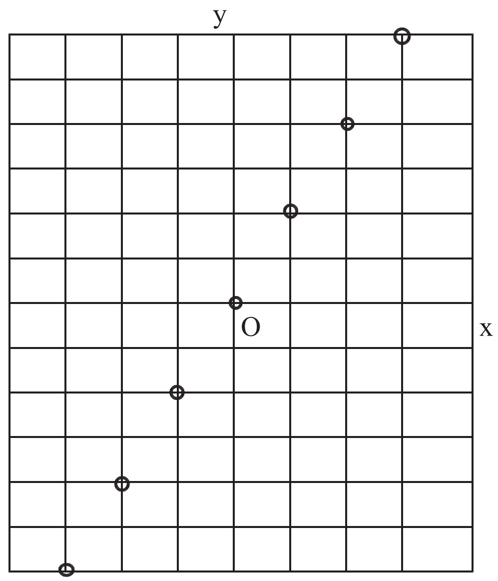
３．正比例グラフ

正比例 $y=ax$ のグラフの例に

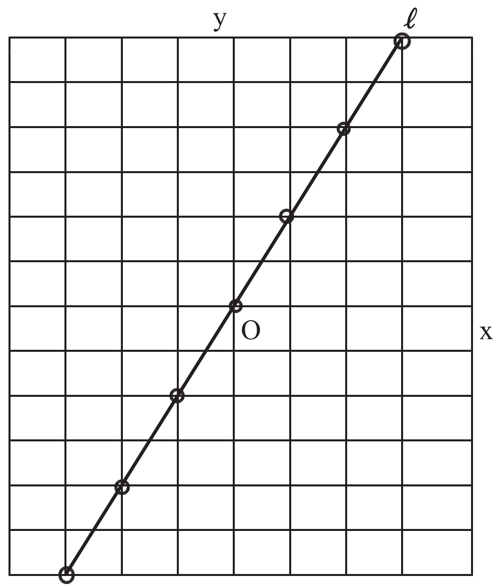
$y=2x$ を取り上げ，対応する x, y の値を表にし

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	...

座標軸をきめ，表の対応する x, y の値の組を座標にもつ点を取ると



となり，これらの点は一つの直線上にならぶ。
次に-4から4まで，0.5おきにとり，x，yの値の組を座標にもつ点がどのようにならぶか調べることを「問」として生徒にさせる。
その結果とった点はみな下のような直線ℓの上にありxのすべての値に対応する点の全体が，直線ℓをうめつくすことになる。



この直線ℓを**関数**　y=2x **のグラフ**という。

ここで私の問題提起は，すべての点をこのようにして取ることは現実的にはできないのではないかと生徒が疑問を感じるということである。

なお，教科書ではその前に

1．ともなって変わる量

2．正比例

のところで，容器に水を一定に入れるときの水の深さと時間，はば20cmのトタン板を折り曲げて長方形の切り口を作るときの深さと切り口の面積，つるまきばねの長さとおもりの重さの関係などを表にすることを学ぶ。これは関数y=2xのグラフを描く準備として，あとは負数への拡張を新しく学ばせようという意図ではあるが，これらの例でも無数に点を取ることに関しては直接触れてはいない。

中学1年生のこの時期は数学の世界が単なる数（自然数）の世界から新たに負の数を学んだり，文字式や1次方程式の解法など抽象性がまし思考が広がる時期であり，論理性も意識するようになる。単純に事実を説明しているようなことでは疑問が残り学習はそこで滞ってしまうのではないか。

また，1次関数のグラフを利用して，連立1次方程式を解くには，1次関数をみたすすべての点(x, y)は一つの直線上にあり，逆にその直線上のすべての点が1次関数をみたすということを理解できていないと納得はできないだろう。このようなきちんとした説明をしないで，連立1次方程式の解は2直線の交点の座標だという結果を強調しても生徒には納得・理解されないだろう。

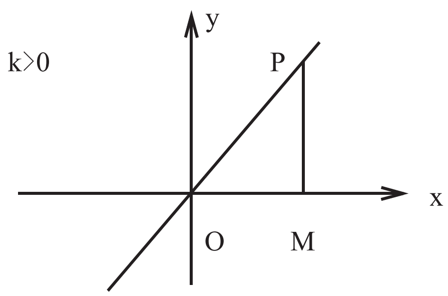
東京書籍の文部科学省検定済教科書「新しい数学1」[5]をみても，指導の仕方は全く同じである。違いと言えば，教科書の大きさがA4版になったせいもありグラフの大きさも大きくなりまた点をプロットする作業も少し丁寧になっている。しかし整数点から0.5刻みにするとこ

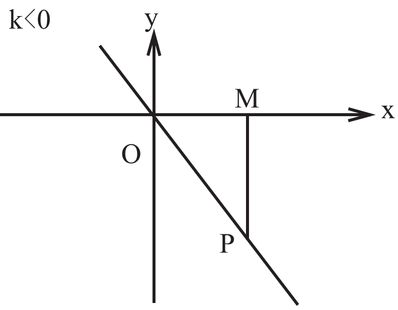
ろからそのあとはすべての点を取ると直線になると結論を説明しているだけである。

3．過去の教科書の指導法

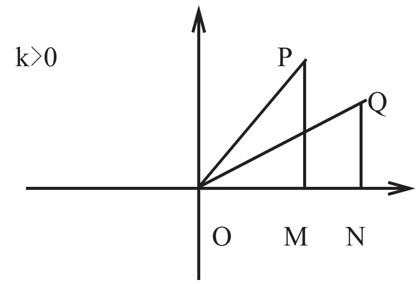
それでは，一昔前の教科書ではどのような指導をしているのか。国立国会図書館の近代デジタルライブラリーを検索しいくつかの教科書から正比例，1次関数のグラフの指導を抜出し考察してみる。

●田中光彦：「三年生の代数学」文進堂書店[6)]
第五章　函数ノグラフ
２．正比例ノ場合ノグラフ
（以下現代文に適宜表記する）
yがxに正比例するとき，両者の関係をグラフで示すと下の図の如く原点を通る直線となる。





［証明］　先ず$y = kx$に於いて$x = 0$とき$y = 0$となるからそのグラフは原点Oを通る。
次に次の図においてPおよびQをグラフ上の任意の２点とし，PおよびQからx軸に下した垂線の足をそれぞれM，Nとすれば



$MP=k \cdot OM, NQ=k \cdot ON$

$$\therefore \quad \frac{MP}{OM} = \frac{NQ}{ON} = k$$

かつ　$\angle PMO = \angle QNO = \angle R$

$\therefore \triangle POM \backsim \triangle QON$

$\therefore \angle POM = \angle QON$

故に直線OP，OQは重なる。よってグラフ上のすべての点は原点を通る同一直線上にある。すなわち$y=kx$のグラフは原点を通る直線である。

●帝國書院編輯部：改訂「代數學教科書」帝國書院[7)]
この教科書では附録目次としてぐらふを取り上げ
第１章　座標
第２章　ぐらふ
第３章　一次方程式の解法
第４章　二次方程式のぐらふ及び解法
とある。
第２章　ぐらふ　4．一次方程式のぐらふ
で以下のように指導している。
【例1】　$y=2x$のぐらふ
解　与えられたる方程式に適合するx，yの値の数組を求めこれを表に示せば

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	…

この表中において相対応するx，yの値をそれぞれ座標とする諸点

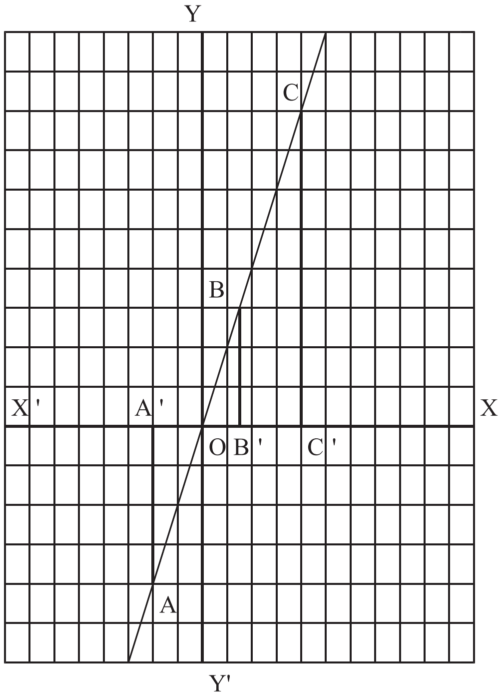
$A(-2,-4)$，$O(0,0)$，$B(1\frac{1}{2},3)$，$C(4,8)$ を作り
これら点の縦線をAA', BB', CC'とする。
またA, B, Cの各々を原点Oと結び直角三角形AOA', BOB', COC'を作ればいずれも直角を夾む二辺において縦線は横線の二倍になるを以て

$AA' : OA' = BB' : OB' = CC' : OC' = 2:1$

$\therefore \quad \triangle AOA' \backsim \triangle BOB' \backsim \triangle COC'$

$\therefore \quad \angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC'$

故にA, B, Cは何れも原点を過ぎる直線上にあり，



逆にAC上に任意の一点Bをとり，OXに垂線BB'を引けば

$BB' : OB' = CC' : OC' = 2 : 1$

$\therefore BB' = 2OB'$

$\therefore AC$上の総ての点の座標は方程式

$y=2x$　　を満足する。

故に所要のぐらふは原点を過ぎる直線なり。
<u>一般に$y=mx$なる形を有する一つの方程式のぐらふは原点を過ぎる一つの直線なり</u>

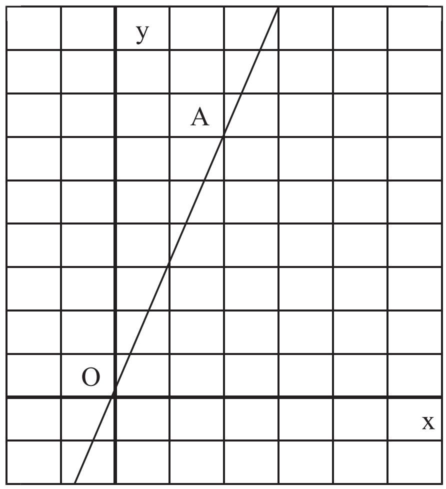
●三守 守：「代數學教科書　下巻」
山海堂出版部[8)]

この教科書でも附録の一つとして「ぐらふ」を掲載している。折れ線グラフなどから表を作成してグラフ書くことから，1つの方程式を満足する点の軌跡なる線をその方程式のグラフというと定義し，以下のように説明している。

１４．一次方程式ノぐらふ

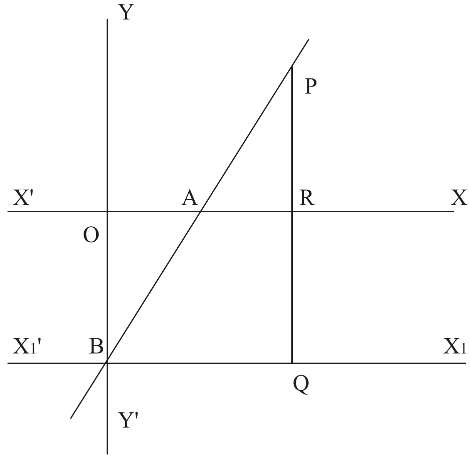
例１．$y=3x$のぐらふ

$y=3x$に適合する１点を例えば$A(2,6)$とする。しかるときは点Aと原点Oとを通ずる直線の上の縦線はすべて横線の3倍なれども，この直線外の点にては然らず。故にこの方程式のぐらふは直線OAなり。



例２　$2x-y=4$のぐらふ

この方程式において$x=0$とすれば$y=-4$となり，$y=0$とすれば$x=2$となる。



ここで2点$A(2,0)$, $B(0,-4)$を通じる直線およびBを通じてX, X'に平行なる直線X_1X_1'を引きX_1X_1'，YY'を座標軸とすれば$A(2,4)$となるが故に例1にて知れるが如く，直線AB上に任意の点PよりXX'に垂線PQを引けば$PQ=2\cdot BQ$

故にPQ, XX'の交点をRとすれば

$$QR+RP=2\cdot OR$$

よって　$2\cdot OR-RP=QR$

これはP点が$2x-y=4$を満足することを証明するものなり。而して直線ABの外の点よりX_1X_1'に引ける垂線はその足とB点との距離の2倍に等しくならず。故に方程式$2x-y=4$のぐらふは直線ABなり。

３冊の教科書を年代の新しい順にみてきたが，最近の教科書との違いが浮き彫りになった。

それは点をプロットして細かくしていけばしていけば直線になるというのが最近の教科書指導の要点であるということに対して，1920年代には，点をいくつかとっているがそれを元に平面図形の性質を利用して1次関数のすべての点が1つの直線上にくること，また逆に1つの直線上の点は1次関数の形になるということ示している。相似をこのように利用することは，子どもにとっては他の分野とのつながりに新鮮さと驚きをもたらすし，数学の世界の広さを知ることからも有意義なことである。その意味で過去の教科書指導法が優れていると判断する。点を無限にとるという指導で発生する疑問はこのようにすれば解決できるであろう。

このような指導を受けた生徒と現在の生徒の受けとめ方を考えてみる。現在の生徒はこれで満足するとは思えない。例えば，小学生の頃文章題で頭を悩ましていたが中学に入って一次方程式を学びその素晴しさを知って数学を好きになっているような生徒は疑問は感じるが飲み込んで先へ進むことになろう。また要領の良い生徒もそこに疑問を感じている暇ではないと判断するだろう。したがって何も問題は無いようにみえる。しかし，ここで気になるのはまじめで純粋な生徒である。疑問は解けずそのことが頭から離れず悩み，結局数学は暗記するするしかないと判断するものも多いのではないか。数学の厳密性というのは単に数学という学問上での厳密性だけではなく，生徒にとっての厳密性を含めてたい。平たく言えば，生徒の生活上の約束のようなものである。教科書で明確に書いてあるのだから説明を覚えろと言われるのでは生徒は納得できないのではないだろうか。そして多くの生徒はまじめで純粋なのである。例えば円錐の体積が，底面の円の半径も高さも等しい円柱の体積の3分の1になるのかなどは，小学校、中学校では厳密な説明はないが最終的に区分求積法・積分で解決する。

今回のテーマは平面図形の相似形を使えば，十分に生徒にはとっても納得できる論理的厳密性があり，現在の中学生にもこの方法で説明することは有意義なことであると主張したい。少なくとも教科書を元に授業を計画するときに，生徒の実態に応じてこれらの方法があることを考慮して指導法を考えてほしい。

４．高校教科書での指導

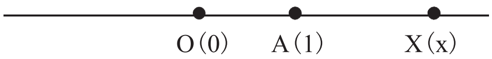
今回のテーマは平面図形の相似比を用いて説明できるが，中学生のとってはその論理性は難しく実感をもって理解する生徒は多くないかも知れないという懸念がある。これを十分に納得して「無限に点を取って直線になる」という事実を実感をもって解決することはさらに高校段階での指導が必要であり，現在の指導内容で可能である。　このことを高等学校学習指導要領（平成21年3月告示）に対応して提案する。

（1）実数の連続性の概念

「数学Ⅰ　(1) 数と式　ア数と集合　（ア）実数
　数を実数まで拡張する意義を理解し，簡単な無理数の四則計算をすること。」

ここで，数直線を学び，数直線上の点と実数が1対１に対応していること強調しておく。でき

れば有理数の稠密性，実数の連続性なども数学の厳密な理論として紹介しながら説明しておく。循環小数，循環しない無限小数，デデキントの切断，有理数や実数の濃度など生徒にとって中学校では学ばない興味深い話しから数直線上の点と実数が1対1に対応していることを実感するように指導する。



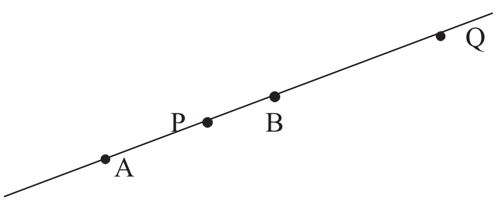
（2）内分点，外分点

「数学Ⅱ　(2) 図形と方程式　ア直線と円

（ア）点と直線

座標を用いて，平面上の線分を内分する点，外分する点の位置や二点間の距離を表すこと。また，座標平面上の直線を方程式で表し，それを二直線の位置関係などの考察に活用すること。」

二点A, Bを$m : n (m>0,\ n>0)$に内分する点Pを平面上の図形として求めたり，Pの座標をA, Bの座標で表すこと。同じように，$m : n (m>0,\ n>0)$に外分する点Qについても学び，外分点はm, nのうち一方を負にすれば内分も外分も統一できることも学ぶ。すなわちm, nが同符号ならば内分，異符号ならば外分になる。またm, nの内どちらかが0ならばPはそれぞれA, Bになる。また，$m+n=0$のときは，m, nは異符号であるから外分点に相当する。$|m|=|n|$だからこれは1 : 1に外分すると考え$AQ : QB$が1 : 1に近づいていくときを見ていけばQは無限遠点になる。このようにしてm, nをいろいろな値にとるとP, Qはすべて直線AB上の点になる。



$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$とするとP, Qの座標(x, y)は

$$(x, y) = \left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n} \right)$$

と統一される。

（3）媒介変数表示による表示

「数学Ⅲ　(1) 平面上に曲線と複素数平面

ア　平面上の曲線　（イ）媒介変数表示による表示

媒介変数の意味及び曲線が媒介変数を用いて表されることを理解し，それらを事象の考察に活用すること」

例えば$A((1, 2),\ B(3, 4)$としてABを$m : n$に分ける点P（内分・外分を統合して，分ける点と称する）の座標(x, y)求めれば

$$(x, y) = \left(\frac{1 \cdot n + 3 \cdot m}{m+n}, \frac{2 \cdot n + 4 \cdot m}{m+n} \right)$$

ここで，

$$\frac{m}{m+n} = t \quad \text{とおけば} \quad \frac{m+n}{m+n} = 1$$

であるから

$$\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1 \quad \therefore \quad \frac{n}{m+n} = 1 - t$$

これより

$$(x,\ y) = ((1-t)+3t,\ 2(1-t)+4t)$$
$$= (1+2t,\ 2+2t)$$

これから，媒介変数tを消去すれば

$$x - 1 = y - 2$$
$$\therefore \quad y = x + 1 \cdots ①$$

と一次関数の式になる。

内分・外分での指導から$m,\ n$をすべての実数にとれば，tはすべての実数であることがわかり実数の連続性を考えれば一次関数①を満たす点$(x,\ y)$は直線AB上の点と１対１に対応していることが納得できる。

5．終わりに

ある私立中高一貫校の校長が次のような文章

を通信[9]に掲載している。

「『中学の頃から厳しい勉強を強要するのは可哀想だ』という声があるかも知れぬ。それは間違いだ。もともと青春とは，自らに厳しく生きることによってのみ，幸福と充実を感じ取る事ができる，ストイックな時代なのだ。」

数学Ⅰでの「実数」の指導は教科書ではかなり浅く，連続性，濃度など教師が補わなければならないだろう。今回の例のように数学Ⅱ，数学Ⅲと３学年を横断してようやく納得できることもあり疑問をいつまでも疑問のまま想いながらここで解決したことの感動・喜びを与えられるといいのではないだろうか。

参照文献

１）沖山義光：″2006年度公開研究会「数学Ⅰ」″ お茶の水女子大学附属高等学校研究紀要 (2006)

２）沖山義光：″因数分解の指導法の試み″ 神奈川大学心理・教育研究論集第30号P35-40(2011/3)

３）沖山義光：″中高数学におけるMathematicaを使った指導内容と指導事例″ 神奈川大学心理・教育研究論集第34号P93-99(2013/11)

４）橋本純次：文部科学省検定済中学校教科書「数学１」 新興出版社啓林館(1980/3)

５）藤井斉亮：文部科学省検定済中学校教科書「新しい数学１」東京書(2013/2)

６）田中光彦：「三年生の代数学」文進堂書店 (1934/昭和９年)

７）帝國書院編輯部：改訂「代數學教科書」 帝國書院　(1926/大正15年９月)

８）三守　守：「代數學教科書　下巻」 山海堂出版部(1921/大正10年12月)

９）小川義男：「狭山ヶ丘通信」狭山ヶ丘高等学校(2014/8 No.125)

「私のふるさと」

潮の香とハイビスカス
「おじゃりやれー（いらっしゃい)」

浜辺に打ち寄せる波
ヤドカリとたわむれ幼き頃を想う

強い日差しに天気雨
磯カニのハサミの痛さもなつかしい

山の展望台はそよ吹く風
遠くで鳴く鳥と蝉の声に静寂が沁みる

焼酎、くさや、黄八丈サブレ
島の情けに彩られ、あすへの活力に満たされる

好きです　私の八丈島！

（沖山義光）