

# 高等学校の積分法における 区分求積法の指導について

榎本 里志

## 1. はじめに

高等学校数学Ⅱで、微分法に続いて学ぶ積分法は、現行の高等学校の数学の学習指導要領解説にも「微分の逆演算としての不定積分を導く」と記載されており、不定積分に続いて、定積分や面積、体積を学んでいくという流れで指導することが定着している。

ところが、数十年前には、平面図形の面積を求めるために区分求積法の概念を説明し、定積分を定義してから、不定積分を導入するという時代もあった。

私自身、高等学校で教鞭をとるようになって以来、教科書の記述に従って、前者のような指導を繰り返してきたが、「積分」の意味を直感的に説明する上でも、歴史的な意味合いから、区分求積法の概念を、積分学習の早い段階からの指導が必要ではないかとの思いが捨てきれない。

現行の学習指導要領解説の数学Ⅱには、「区分求積法の考えに基づいて定積分の定義を直感的に理解させることも考えられる。」と記載されているが、実際の高等学校での指導は、数学Ⅲの定積分の応用として、初めて区分求積法の考え方を学習するのが現実であり、数学Ⅱまでしか履修しない多くの高校生は、区分求積法という概念を知らないままに微分積分の学習を終えていくことになる。

しかも、数学Ⅲを学ぶ生徒においても、区分求積法が定積分の応用問題のようなものに見

え、数式の複雑さと相まって、定積分の本来の重要な概念が理解できないままの生徒も多いのが現実である。

この区分求積法と積分の指導について振り返ってみた。

## 2. 区分求積法

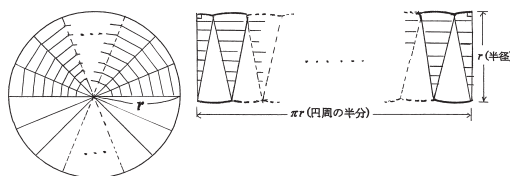
四角形や三角形の面積は「かけ算」で簡単に求めることができるが、曲線に囲まれた面積を求めることは古代エジプト時代からの課題であった。

たとえば、ナイル川の氾濫によってできた川べりの土地を測量するために、人々はその土地を細かく分けて計算できる図形に分割して、その和を求めたとされている。

また、小学校で円の面積公式である  $S = \pi r^2$  を初めて習ったときのことを思い出してみよう。

おそらく、円を多数の合同な扇形に分割し、半数ずつを逆さまに組み合わせることにより、縦の長さが半径、横の長さが円周の半分の長方形の面積に近づいていくことを学んだと思う。

図1



細かく分割することにより、直接的に求められない図形の面積を求めるという区分求積の概念は、すでに小学校でも学んでいるのである。視覚的に捉えた概念的な説明ではあるが、極限の考え方をを用いた説明に児童は新鮮な感覚を感じるようになる。

ここで、基本的な数列の和の計算を学んでいることが前提となるが、「放物線  $y = x^2$  と  $x$  軸、および直線  $x = 1$  と  $x = 3$  とで囲まれた部分の面積  $S$ 」について区分求積法の考え方を振り返ってみよう。

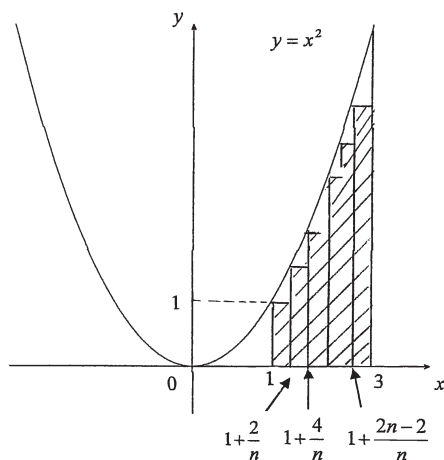
区間  $1 \leq x \leq 3$  を  $n$  等分すると各小区間の長さは、すべて  $\frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$  であり、 $1 \leq x \leq 3$  における各小区間の  $x$  座標の値は、順に、  
 $1 + \frac{0}{n}, 1 + \frac{2}{n}, 1 + \frac{4}{n}, 1 + \frac{6}{n}, \dots, 1 + \frac{2(n-1)}{n}, 1 + \frac{2n}{n}$   
 である。

したがって、各小区間の左端における関数の値は、それぞれ、順に、

$$1^2, \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2, \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2, \left(1 + \frac{6}{n}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{2(n-1)}{n}\right)^2$$

であるから、斜線部分の  $n$  個の長方形の面積  $S_n$  は、

図2



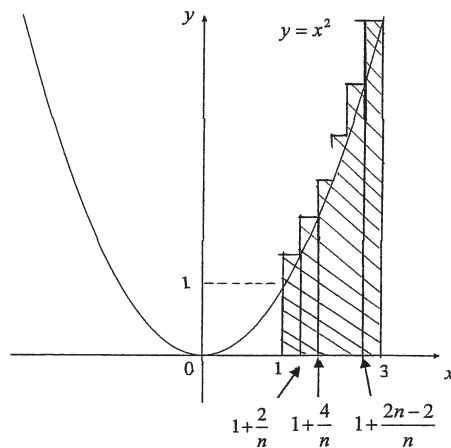
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n} \left\{ 1^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(1 + \frac{2(n-1)}{n}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{2}{n} \left\{ n + \frac{4}{n} (1 + 2 + \dots + (n-1)) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{4}{n^2} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \right\} \\ &= \frac{2}{n} \left\{ n + \frac{4}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{4}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right\} \\ &= \frac{2(13n^2 - 12n + 2)}{3n^2} \text{ となる。} \end{aligned}$$

同様にして、各小区間の右端における関数の値は、それぞれ、順に、

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2, \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2, \left(1 + \frac{6}{n}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{2n}{n}\right)^2$$

であるから、斜線部分の  $n$  個の長方形の面積  $S_n$  は、

図3



$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n} \left\{ \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{6}{n}\right)^2 \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(1 + \frac{2n}{n}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{2}{n} \left\{ n + \frac{4}{n} (1 + 2 + \dots + n) + \dots \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdots + \frac{4}{n^2} (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \Big\} \\ &= \frac{2}{n} \left\{ n + \frac{4}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\ &= \frac{2(13n^2 + 12n + 2)}{3n^2} \text{ となる。} \end{aligned}$$

ここで、 $n$ の値を順に変化させたとき $s_n, S_n$ の値の変化の様子を調べてみると次のようになる。

$n$	$s_n$	$S_n$
10	7.88	9.48
100	8.5868	8.7468
1000	8.658668	8.674668
10000	8.66586668	8.66746668
100000	8.666586667	8.666746667
1000000	8.666658667	8.666674667
10000000	8.66666587	8.666667467
100000000	8.66666659	8.666666747
1000000000	8.66666666	8.666666675
10000000000	8.666666667	8.666666667

この結果からわかるように、分割の数 $n$ の値を大きくしていくと、その値は、

$$8.6666666\cdots = \frac{26}{3}$$

に近づいていくことがわかる。

このことは、 $s_n \leq S \leq S_n$ であることと、数列 $\{s_n\}$ 、 $\{S_n\}$ の極限が、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left( 13 - \frac{12}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = \frac{26}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left( 13 + \frac{12}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = \frac{26}{3}$$

となることから、求める部分の面積 $S$ が $\frac{26}{3}$ となることを説明することができる。

立体の図形の体積も同様な考え方で計算できる。

たとえば、半径 $r$ の球の体積の公式を求めてみよう。

次の図のように、半球を $n$ 等分し、 $n$ 個の円板を球の内側につくって、その和を考える。

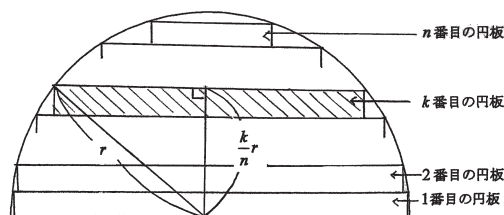
ここで、 $k$ 番目の円板についてみると、

$$\text{半径は、} \sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{n}r\right)^2} \quad \text{厚みは} \frac{r}{n}$$

であるから体積は

$$\pi \left\{ \sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{n}r\right)^2} \right\}^2 \times \frac{r}{n} = \pi r^3 \left( \frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3} \right)$$

図4



$k = 1, 2, \dots, n$ であるから、これら $n$ 個分の円板の体積の和 $v_n$ は

$$\begin{aligned} v_n &= \pi r^3 \left( \frac{1}{n} \times n - \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} \right) \\ &= \pi r^3 \left\{ 1 - \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\ &= \pi r^3 \left\{ 1 - \frac{1}{6} \times \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \right\} \end{aligned}$$

となるから、

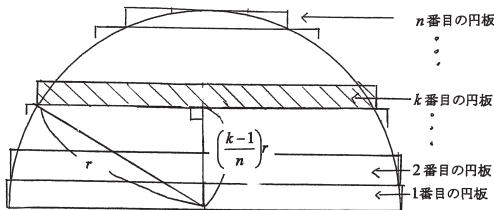
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi r^3 \left\{ 1 - \frac{1}{6} \times \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= \pi r^3 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

に近づいていくことから、これを2倍して、球

の体積は、 $\frac{4}{3} \pi r^3$ であることがわかる。

同様に、 $n$ 個の円板を、球の外側につくったときを考えると、

図5



$k$  番目の円板の

$$\text{半径は, } \sqrt{r^2 - \left(\frac{k-1}{n}r\right)^2} \quad \text{厚みは } \frac{r}{n}$$

であるから体積は,

$$\pi \left\{ \sqrt{r^2 - \left(\frac{k-1}{n}r\right)^2} \right\}^2 \times \frac{r}{n} = \pi r^3 \left\{ \frac{1}{n} - \frac{(k-1)^2}{n^3} \right\}$$

$k=1, 2, \dots, n$ であるから, これら  $n$  個分の体積の和  $V_n$  は

$$\begin{aligned} V_n &= \pi r^3 \left\{ \frac{1}{n} \times n - \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} \right\} \\ &= \pi r^3 \left\{ 1 - \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right\} \\ &= \pi r^3 \left\{ 1 - \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi r^3 \left\{ 1 - \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

となり, この場合も, 小さめに考えたときの円

板と同様に  $\pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi r^3$  に近づいていくことから, 球の体積が  $\frac{4}{3} \pi r^3$  であることが説明できる。

このように, いくつかのなめらかな曲線や曲面で囲まれた平面図形や立体図形においては, 内部から近似した図形と外部から近似した図形

の面積や体積は, 極限において一致することを確かめることは容易である。

一般には, 座標平面の関数  $f(x)$  と  $x$  軸, 直線  $x=a$ ,  $x=b$  とで囲まれた部分の面積は, 区間  $[a, b]$  を  $n$  等分して, その両端と分点を順に,

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n} \\ &\dots, \quad x_{n-1} = a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, \quad x_n = b \end{aligned}$$

とすると, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

を計算して求めることができる。

区分求積法の概念はさほど難しいものではないが, 数列の和や極限の性質の学習が不可欠であり, 複雑な計算を強いる場合が多い。そのため, 実際の計算が大変になることから, 区分求積法が初等段階で敬遠されてきたことはやむを得ないことであるが, その考え方を指導することは, 多くの生徒の興味を起こさせるに値するのではないと思う。

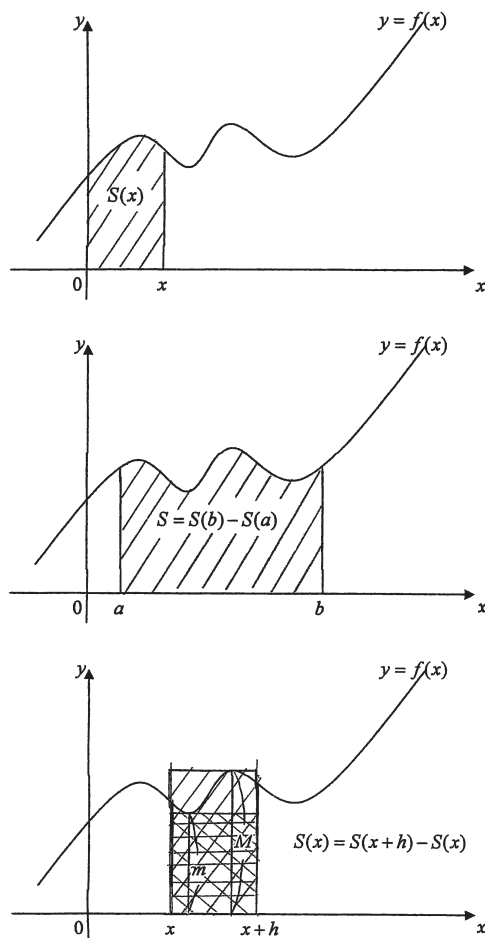
### 3. 面積から定積分へ

時は経て, 微分の創始者ニュートンは面積  $S(x)$  と曲線の方程式の間に, ある関係を見出したことにより, その後の積分をより簡単なものとし, 発展させている。それが『微分積分学の基本定理』と呼ばれており, 高等学校の教科者にも記載されていることが多いが, この定理について再確認しておこう。

次の図において, 関数  $y=f(x)$  と  $x$  軸及び,  $x=a, x=b$  ( $0 < a < b$ ) とで囲まれた部分の面積  $S$  は, 次のように求められることが示される。ここでは,  $f(x) > 0$  であるとするが,  $f(x) < 0$  などの場合も同様である。

関数  $f(x)$  と  $x$  軸,  $x=0$  から  $x$  までの部分の面積を  $S(x)$  とすると,  $S = S(b) - S(a)$  であり,

図 6



$S(x)$ には、次のような面積に関する不等式が成り立つ。

すなわち、区間 $[x, x+h]$ における関数 $f(x)$ の最大値を $M$ 、最小値を $m$ とすると、

$$m \cdot h \leq S(x+h) - S(x) \leq M \cdot h \quad \cdots \text{①}$$

①の全体を $h$ で割ると

$$m \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leq M$$

ここで $h \rightarrow 0$ とすると、

$$m \rightarrow f(x), M \rightarrow f(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = S'(x)$$

であるから、

$$f(x) \leq S'(x) \leq f(x)$$

すなわち、 $S'(x) = f(x)$ となることから、 $S(x)$ は、微分すると $f(x)$ となる一つの関数であることがわかる。

この定理を使って、前述した区分求積法で考えた「 $y = x^2$ と $x$ 軸、直線 $x = 1$ 、 $x = 3$ とで囲まれる部分の面積」を求めてみると、

この定理から、 $S'(x) = x^2$ であり、微分して $x^2$ となる関数は、 $\frac{1}{3}x^3 + C$  ( $C$ は定数) の形で

あることから、 $S(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ となることが

わかる。これにより、求める面積 $S$ は、

$$\begin{aligned} S &= S(3) - S(1) \\ &= \left( \frac{1}{3} \times 3^3 + C \right) - \left( \frac{1}{3} \times 1^3 + C \right) = \frac{26}{3} \end{aligned}$$

となり、定数 $C$ には影響しない値になる。

このような計算を、ドイツの数学者ライプニッツは、記号 $\int$  (インテグラル) を用いて、次のように表した。

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 = \frac{1}{3} \times 3^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{26}{3}$$

記号 $\sum$ が、離散変量の和を表すのに対して、記号 $\int$ は、ドイツ語「Summation」の頭文字 $S$ を縦に引き伸ばしたものといわれている。

もともと積分とは区分求積法に見られるように、いくつもの長方形に分け、ひとつひとつの面積を計算し、最後にそれらを合計することであり、ライプニッツは細かく分けた長方形のうち、あるひとつの長方形の面積を $x^2 dx$ で表し、長方形を端から端( $a$ から $b$ まで)までたすことを記号 $\int_a^b$ で表した。

このように、積分の記号には「細かく分けて、かけて、たす」という積分の歴史的、本質的な意味が含まれているということも指導しておきたい。

#### 4. 不定積分と定積分

一般に、その導関数が、与えられた関数  $f(x)$  に等しい関数を  $f(x)$  の不定積分 (または原始関数) といい、記号  $\int f(x)$  で表す。ここで、ある関数の不定積分は唯一には決まらないが、 $F(x)$  と  $G(x)$  を、ともに  $f(x)$  の不定積分とすると、

$$\frac{d}{dx}\{F(x)-G(x)\}=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$$

であるから、 $F(x)-G(x)=C$  ( $C$  は定数) すなわち、一つの関数  $f(x)$  の不定積分は、定数だけしか差がないことから、 $f(x)$  の不定積分の一つを  $F(x)$  とすると、

$\int f(x)dx = F(x) + C$  (この  $C$  を積分定数という。)

一般に、 $F(b)-F(a)$  の値を関数  $f(x)$  の  $x=a$  から  $x=b$  までの定積分といい、

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す。すなわち、 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$  であり、定積分では積分定数  $C$  は無視して良いことがわかる。

イギリスのニュートンやドイツのライプニッツは、微小な変化を調べるための「微分法」と面積や体積などの求積のための「積分法」との関係をあきらかにし、結果「不定積分は微分の逆演算」であることを示されてから、以後、微分積分学の急速な発展がなされることになる。

#### 5. 球の表面積に関する一考察

球の表面積を求める方法にもいくつかの考え方があがるが、区分求積と定積分の関係

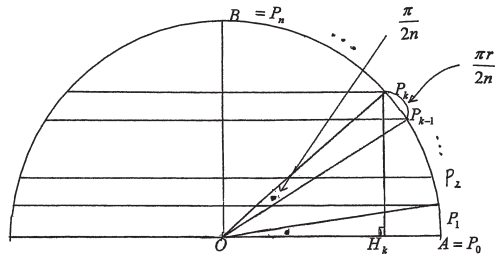
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_a^b f(x)dx$$

より、次のような方法を考えることができる。

図のように、半径  $r$  の半球を  $n$  等分し、大円の弧  $AB$  上の点を順に、

$P_0 = A, P_1, P_2, \dots, P_n = B$  とする。

図7



弧  $P_{k-1}P_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) の長さは、 $\frac{\pi r}{2n}$

$$\angle P_k OP_{k-1} = \frac{\pi}{2n} \text{ であるから, } \angle P_k OA = \frac{k\pi}{2n}$$

点  $P_k$  から、半径  $OA$  に下した垂線の足を  $H_k$  とすると、

$$\begin{aligned} OH_k &= \sqrt{OP_k^2 - PH_k^2} = \sqrt{r^2 - (r \sin \angle P_k OA)^2} \\ &= r \sqrt{1 - \sin^2 \angle P_k OA} = r \cos \angle P_k OA = r \cos \frac{k\pi}{2n} \end{aligned}$$

半球の底面の円を除く表面積を  $S$ 、

$$s_n = \frac{\pi r}{2n} \times 2\pi (OH_1 + OH_2 + \dots + OH_n)$$

$$S_n = \frac{\pi r}{2n} \times 2\pi (OH_0 + OH_1 + \dots + OH_{n-1}) \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2 r^2}{n} \left( r \cos \frac{\pi}{2n} + r \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + r \cos \frac{n\pi}{2n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2 r^2}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} = \pi^2 r^2 \int_0^1 \cos \left( \frac{\pi}{2} x \right) dx \\ &= \pi^2 r^2 \left[ \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 = 2\pi r^2 \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  も同様であり、 $s_n \leq S \leq S_n$  であるから、球の表面積が、 $2 \times S = 4\pi r^2$  であることを得ることができる。

#### 6. 区分求積法のような問題

区分求積法と定積分の概念を深めるために、代表的な例題について触れておこう。

[例題] 次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n})$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + 3e^{\frac{3}{n}} + \cdots + ne^{\frac{n}{n}} \right)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} \pi$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left( 1 + \frac{3n}{n} \right)$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k+1}{n} \pi$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{2n+k}$$

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} + \cdots + \frac{1}{2n+(2n-1)} \right\}$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \sqrt{(2n)^2 - 1^2} + \sqrt{(2n)^2 - 2^2} + \sqrt{(2n)^2 - 3^2} + \cdots + \sqrt{(2n)^2 - (2n-1)^2} \right\}$$

[略解] (1)から(4)は、すべて0から1までの区間を $n$ 等分することで、容易に適する関数が決定できるから、それを定積分すればよい。

$$(1) \text{ 与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$$

$$(2) \text{ 与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \\ = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2$$

$$(3) \text{ 与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 x e^x dx = 1$$

$$(4) \text{ 与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} \pi = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}$$

(5)は、(2)と同じ関数であるが、積分の区間の設

定に注意させる問題である。

$$\text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \log \left( \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \right) \\ = \int_0^2 \frac{1}{1+x} dx = \log 3$$

(6)は対数の真数の積は、対数の和に変形できるという性質を使い、積分区間に注意させる問題である。

$$\text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{3n} \log \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \\ = \int_0^3 \log(1+x) dx = 8 \log 2 - 3$$

(7)は、根号の外の $\frac{1}{n}$ を根号の中に入れてから、対数をとって計算することで(6)と同様に処理できることに着目する。

$$N = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)} \text{ とすると,} \\ N = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)}{n^n}} \\ = \left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left( 1 + \frac{n}{n} \right) \right\}^{\frac{1}{n}} \text{ である}$$

から、両辺の自然対数をとると、

$$\log N = \frac{1}{n} \left\{ \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \log \left( 1 + \frac{2}{n} \right) + \cdots + \log \left( 1 + \frac{n}{n} \right) \right\}$$

となるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log N = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \\ = \int_0^1 \log(1+x) dx = \log \frac{4}{e}$$

$$\text{したがって、与式} = \frac{4}{e}$$

なお、本問は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{(2n)!}{n!} \right\}^{\frac{1}{n}}$ と見かけの形を変えた問題として目にする問題である。

(8)は(4)と酷似しているが、区間設定が公式とおりにはいかないので、その部分をまず処理することが必要になる。

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{2}{n} \pi + \sin \frac{3}{n} \pi + \cdots + \sin \frac{n+1}{n} \pi \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{1}{n} \pi + \sin \frac{2}{n} \pi + \sin \frac{3}{n} \pi + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{n}{n} \pi + \sin \frac{n+1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\sin \frac{n+1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi &= \sin \left( \pi + \frac{1}{n} \pi \right) - \sin \frac{\pi}{n} \\ &= -\sin \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} = -2 \sin \frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} \pi - 2 \sin \frac{\pi}{n} \right) \text{となり、} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} 2 \sin \frac{\pi}{n} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} \pi &= \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

であるから、与式 =  $\frac{2}{\pi}$  となり、(4)と同様な結果が得られる。

(9)は、分割区間のスタートの値に注意する。

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{2 + \frac{k}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{2 + \frac{k}{n}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_0^3 \frac{1}{2+x} dx - \int_0^1 \frac{1}{2+x} dx = \log \frac{5}{3}\end{aligned}$$

となるが、最初から  $\int_1^3 \frac{1}{2+x} dx$  を計算してもよい。

(10)は変化する部分が奇数番目の値だけであることに注意する。

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+2k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2 + \frac{k}{n}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right)\end{aligned}$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2+x} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{2} \log 2$$

(11)は(8)と同様に、過不足分についての極限を考えることになる。

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n-1} \sqrt{4 - \left( \frac{k}{n} \right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^{2n-1} \sqrt{4 - \left( \frac{k}{n} \right)^2} - \sqrt{4 - \left( \frac{0}{n} \right)^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \sqrt{4 - \left( \frac{k}{n} \right)^2} - \frac{2}{n} \right)\end{aligned}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$  であるから、

$$\text{与式} = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \pi$$

この定積分は、半径2の円の面積の  $\frac{1}{4}$  であることから、定積分と面積の関係を表す例としてよく使われる。

## 7. 終わりに

高等学校では、積分が微分の逆演算として考えていくことが定着している中、区分求積法は定積分の定義そのものであり、積分が無限数列の和で表現されるものとする、積分独自の定義ができることになり、微分が積分の逆演算という考え方も可能である。これは、積分法が微分法の結果として考えられたものでなく、独立した数学の分野であると紹介することは、多感な高校生の知的好奇心を高めるものになる。

現行の学習指導要領では、「数列」は選択教科となっている数学Bで、「数列の極限」は数学Ⅲで学ぶことになっており、数学Ⅱで初めて学習する「微分・積分」と分断されていることが指導上で難しい面もあるが、生徒の状況に応じた柔軟な指導ができる教材ではなかろうか。