高等学校での「対数の定義と性質」の指導を通して

榎本　里志

1．はじめに

「数学は実生活を営む上で何の役に立つのですか」･･･この素朴な質問に，数学の授業中に問われた経験を持つ教員は少なからずいるのではないかと思う。

その質問に対し，「将来，役にたつことがきっとある」とか「考えること自体が重要である」とか「高校にきたから当然だ」とか，その回答も様々であると思う。

そのような中で，具体的に数学を学ぶ意義を体得させる分野に「対数」がある。この対数の定義と一つの性質について考える。

2．実生活での対数

平成23年３月11日に発生した東北関東大震災のマグニチュード（magnitude）の値は，当初の発表では 8.8 であったがその後, 9.0 に修正された。

報道では，地震の専門家がマグニチュードが 8.8 から 9.0 になると地震のエネルギーは２倍になるといっていたが，そのコメントに対してどれだけの人が納得しただろうか。

マグニチュードの計算は，対数を用いているが，これを紹介することでも，高等学校での数学を学ぶ意義の一端を紹介することができる。

地震が発するエネルギーの大きさをE（単位:ジュール)，マグニチュードをMとすると，$\log_{10}E = 4.8 + 1.5M$の関係があるとされている。

マグニチュードが8.8，9.0のときの地震のエネルギーをそれぞれ，E_1，E_2とすると

$$\log_{10} E_1 = 4.8 + 1.5 \times 8.8 = 18.0$$

$$\log_{10} E_2 = 4.8 + 1.5 \times 9.0 = 18.3$$

より，$E_1 = 10^{18}$，$E_2 = 10^{18.3}$であるから，

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{18.3}}{10^{18}} = 10^{0.3} = 1.99 \cdots \fallingdotseq 2\ (倍)$$

地震のエネルギーのような巨大な数を扱うときに，対数が用いられていることを紹介することは，対数の定義を学んだ直後の生徒に，新たな興味を起こさせることと思う。

数学の学習が，単に公式や定理を当てはめて問題を解くことと思っている生徒にとって，日常で起こっている様々な問題を解決することに役立っていることを示すことは重要であり，数学を学ぶ意義を理解させ，力を養うことになる。

3．対数の定義について

教科書で対数の指導をする中で，いつも疑問に感じる問題がある。それは，教科書の節末などに載っている，たとえば「$10^{\log_{10}3}$の値を求めよ。」という問題である。

これは，対数の定義そのものであるが，次のような解答をよく目にする。

[解] $10^{\log_{10}3} = x$とおき，両辺の底を10とする対数をとると，$\log_{10}10^{\log_{10}3} = \log_{10}x$

$\log_{10}3\log_{10}10 = \log_{10}x$

すなわち，$\log_{10} 3 = \log_{10} x$ よって，$x = 3$

教科書では，対数の定義は，

「任意の正の数 M に対して，$a^p = M$ となる実数 p を a を底とする M の対数といい，$\log_a M$ と書く。」すなわち，

「$a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M (a > 0, a \neq 1, M > 0)$」と書かれているのみで，「$a^{\log_a M} = M$」であることを述べていない。

「指数が対数で表された指数関数の底と，指数となっている対数の底が一致すれば，その指数関数の値は対数の真数部分と同じ値になる。」ということは，対数関数と指数関数を結びつける上でも重要な定義である。これは，後に学ぶ底が a の指数関数 a^x の微分の説明にも利用できる。高校生は，$(e^x)' = e^x$ であることは，よく覚えているが，底が a の指数関数の微分 $(a^x)'$ となると戸惑うことが多い。そこで，対数の定義を用いて，次のような説明も効果的である。

すなわち，
$$\begin{aligned}(a^x)' &= \left(e^{\log a^x}\right)' = \left(e^{x \log a}\right)' \\ &= (x \log a)' e^{x \log a} \\ &= (\log a)\, e^{x \log a} \\ &= e^{\log a^x} \log a = a^x \log a\end{aligned}$$

4．対数の一つの性質について

同様なことが，対数の性質にもある。対数の性質の中で，

$$\log_a M^n = n \log_a M \cdots ①$$

であることはどの教科書にも記載されているが，

$$\log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M \cdots ②$$

が成り立つことは，どの教科書にも記載されていない。「真数が累乗の形をしていれば，その指数は対数の前に出されるが，底が累乗の場合は･･･」という素朴な疑問である。

かつて，高等学校の教科書編集に携わっていたとき，指導書にはその旨記載したことがあったが，授業で紹介すると，生徒が興味を抱いて聞いていた記憶がある。

①の証明の骨子は，「$p = \log_a M$ とおくと，$a^p = M$ であるから，この両辺を n 乗すると，$a^{pn} = M^n$，すなわち，$np = \log_a M^n$ であるから，$n \log_a M = \log_a M^n$」というものであるが，

②では，「$\log_{a^n} M = p$ とすると，$(a^n)^p = M$ ゆえに，$a^{np} = M$ より，$np = \log_a M$

すなわち，$p = \frac{1}{n} \log_a M = \log_{a^n} M$」

二つの証明を比べると，①では両辺の n 乗という操作が必要であることに比べ，②では指数法則を注意させながら直接的に証明できることにも着目したい。

この性質を用いれば，「$\log_8 2$ の値を求めよ。」という問いの場合には，

［解］$\log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3}$ となるが，この性質を使わなければ，

「$\log_8 2 = x$ とおくと，$8^x = 2$ から $(2^3)^x = 2^1$ より，$3x = 1$ ゆえに，$x = \frac{1}{3}$」とするか，後に学ぶ，底の変換公式を用いることになる。

5．おわりに

以前ある大学の入試問題に「対数の定義を述べよ。」という問題が出題されたときの正解率が23％程度だったということを聞いたことがある。その後も，「一般角の三角関数の定義を述べよ。」「sin，cosの加法定理を証明せよ。」等の入試問題に対して，受験生の点数差が大きかったとの話もある。これは，定理を知っていて，それを使っての問題は解けるが，定義そのものを理解していないことが要因の一つである。このことは，初等教育での算数・数学教育の指導法にも課題があるが，数学離れを増やさず，数学に興味を持たせるために，指導内容や素朴な疑問への丁寧な指導が重要である。