高等学校・学習指導要領からみる「図形の回転」の指導について

榎本　里志

1．はじめに

直角双曲線のグラフは，反比例（$xy=a$）のグラフとして，現行の学習指導要領では，中学校第１学年で学んでいる。高等学校では，数学Ⅲの「関数とその極限」の中で，簡単な分数関数として，関数$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$を，さらに「平面上の曲線」の中で双曲線の定義を学んでいる。ここで，たとえば関数$y=\dfrac{1}{x}$のグラフが，双曲線本来の定義から得た$x^2-y^2=2$のグラフを回転したものと同じであることを発見すると，新鮮な驚きを示す生徒も多い。この図形の回転について学習指導要領の変遷に伴って，その指導を検証してみた。

2．座標軸の回転として扱い

昭和35年改定の数学ⅡＢでは，座標軸を回転することにより図形の性質を調べることを学んでいる。すなわち，xy座標軸を原点を中心に，θ回転した座標軸をXY座標とすると，

$X=x\cos\theta+y\sin\theta,\ Y=-x\sin\theta+y\cos\theta$

の関係があるから，xy平面上で，$x^2-y^2=2$の関係がある図形は，座標軸を45°回転すると，

$x=\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}},\ y=\dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}}$となるから，代入して，$XY=1$を得る。すなわち，$XY$平面上で$Y=\dfrac{1}{X}$で表される直角双曲線が導かれる。

3．行列を用いて一次変換としての扱い

昭和45年改定の学習指導要領では，数学ⅡＢで「行列と一次変換」の応用として回転後の図形の方程式を求めることを学んでいる。

すなわち，点（x, y）が原点を中心にθ回転して点（x', y'）に移ったとすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の関係があるから，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\theta=45°$として，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

を$x^2-y^2=2$に代入して整理すると，$x'y'=1$。すなわち，$y=\dfrac{1}{x}$を得る。昭和53年改定の学習指導要領でも，扱う科目が代数幾何に変わったが同様な扱いをしてきた。

4．複素数の回転として

平成元年の改定では，数学Ｃで「行列」の基本計算は扱うものの，一次変換は姿を消し，点の回転は数学Ｂの「複素数と複素数平面」の項目で扱うことになったが，複素数による図形の移動の扱いは十分なものではなく，複素数の諸

演算が平面上の図形の移動などと関連付けられることを認識させるため，複素数を活用して，たとえば，次のような指導することはなかった。

複素数平面上で，点$x+iy$をθ回転した点$x'+iy'$は，$x'+iy'=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)$として与えられるから，点$x+iy$は，点$x'+iy'$を$-\theta$回転したものである。すなわち，

$x+iy=(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))(x'+iy')$

これより，

$x=x'\cos\theta+y'\sin\theta$，$y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta$を得ることができるから，$\theta=45°$を代入すれば，前述の行列を用いた計算と全く同様に，

$x^2-y^2=2$と$y=\dfrac{1}{x}$が同じ形の双曲線であることを紹介することができる。

5．点の回転移動のみで考える

平成11年改定では，複素数平面が消え，数学Cの「行列」で座標平面上での点の回転が復活したが，平成21年告示の現行の学習指導要領では行列が消え，再び，数学Ⅲの複素数平面で点の回転のみを扱うことになった。

したがって，平成元年の改定からは，行列を用いるか，複素数平面での点の回転を扱うものの，図形の回転を扱うことはなくなった。そのため，前述したように座標平面上で，同じ形の図形が，まったく別な姿で表されることを学ぶ機会はなくなった。しかし，点の回転移動のみを用いて，次のような指導も可能であり，機械的に回転の公式を用いて導く方法以外の手法を紹介することも，貴重な体験ではないかと考える。

たとえば，双曲線$x^2-y^2=2$について，この双曲線の焦点の座標は，(±2, 0) であるから，この点を45°回転させると，行列を用いるなら，

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \end{pmatrix}$を計算して，

複素数を用いるなら，

$x'+iy'=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)(\pm 2+i0)$を計算すると，

いずれからも，$(x', y')=(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$を得ることができる。すなわち，もとの図形を原点を中心に45°回転すると，焦点の座標 (±2, 0) は，点 $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ に移ることがわかる。

さらに，元の図形は，焦点からの距離の差が一定値$2\sqrt{2}$である点の軌跡であるから，回転した図形も，焦点からの距離の差が一定値$2\sqrt{2}$である点の軌跡である。したがって，この方程式は，

$$\left|\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}\right|=2\sqrt{2}$$

であるから，

$$\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2}=\pm 2\sqrt{2}+\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}$$

として，両辺を二乗して整理すると，

$$\pm\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}=x+y+\sqrt{2}$$

この両辺をさらに，二乗すると，

$$x^2+2\sqrt{2}x+2+y^2+2\sqrt{2}y+2$$
$$=x^2+y^2+2+2xy+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y$$

から，$xy=1$すなわち，$y=\dfrac{1}{x}$を得ることができる。

6．おわりに

座標平面上の図形の回転によってx, yの複雑な形で表わされた式が，実は馴染み深い式であることを，三角関数や行列，複素数を用いて示すことは，数学へのあらたな感動を起こすものであり，数学が多面的に考えることのできる教科であることを示すものである。

数学の指導が，項目ごとの途切れた指導に陥ることのないように，各分野との関連性を深め，総合的な指導をしていくことは重要である。

図形の回転の例以外にも，学習指導要領の意図を尊重した指導方法を検証してみたい。