高等学校における「二項定理」の指導を通して

榎本　里志

1．はじめに

平成21年３月に告示された，高等学校数学の現行の学習指導要領では，
三次の乗法公式，$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$は，数学Ⅱで指導することになった。二次の乗法公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$と比べ，数学Ⅰの「数と式」で扱うには複雑であるとの配慮かと思われるが，数学Ⅱでは，二項定理
$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdot\cdot+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdot\cdot+{}_nC_nb^n$
とあわせて指導することになった。この二項定理の指導について，学習指導要領の変遷の中で考えていきたい。

2．学習指導要領の変遷と二項定理

昭和23年からの新制高等学校発足に伴い，昭和22年に告示された高等学校普通科の数学の学習指導要領は「解析Ⅰ，Ⅱ　幾何」からスタートし，昭和24年に「一般数学」が加わり，昭和26年に，この４科目で改変，昭和30年には「数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，応用数学」の４科目に改変された。さらに，昭和35年に「数学Ⅰ，ⅡA，ⅡB，Ⅲ，応用数学」，昭和45年に「数学一般，数学Ⅰ，ⅡA，ⅡB，Ⅲ，応用数学」に改変されたが，ここまでは，必修科目の上にたち，将来の進路との関係から科目選択の余地は殆どなく，高等学校の初年級から順に学んでいく指導要領であった。

昭和53年に「数学Ⅰ，Ⅱ，代数幾何，基礎解析，確率統計，微分積分」の６科目となり，領域別の選択科目が設定されたが，ここでも殆どの高等学校の指導はこれまでの指導形態には大きな変化は見られなかった。

平成元年に，「多様化した生徒の実態により的確に対応できるようにするため」（学習指導要領解説）に，「数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，A，B，C，数学基礎」の７科目に改変され，各科目の中でも分野選択も加わり，選択の巾が広がったことにより，指導形態にも差が出てきた。

平成11年には，この７科目で改変され，平成21年には，「数学C」が姿を消し，「数学基礎」が「数学活用」に変わって実施されている。

昭和53年までの学習指導要領では，どの項目とも，ほぼ教科書の配列順に指導していくことで特に問題はなかったが，平成元年からは，指導順序に問題がおこってきた。

その中で，近年の学習指導要領において「二項定理」を扱う分野を見てみると，昭和53年の学習指導要領では，確率統計の「場合の数」で，平成元年では，数学Aの「数列」の中で，平成11年では，数学Aの「場合の数と確率」の中で，そして，平成21年には前述のとおり，数学Ⅱの「式と証明」の中で扱われている。

「二項定理」では，「組合せの記号」${}_nC_r$の指導が欠かせないが「数列」や「式と証明」の分野で指導することになると，履修の順序に配慮しなくてはならない。

平成元年の学習指導要領では，記号${}_nC_r$は，必修科目の数学Ⅰの「個数の処理」で扱ってい

たが，平成21年度からは，選択科目である数学Aで扱うことになっている。このことについては，「なお，記号$_{n}C_{r}$については，「数学A」の「(1)場合の数と確率」で扱うこととなっているが，この内容を履修していないことも考えられるので，指導に当たっては配慮が必要である。」と学習指導要領解説にも記述されている。

かつて「数列」の単元で二項定理が扱われていたとき，次のような説明も見られたが，「数列」との表現に違和感が残った。それは，

「例えば，$(a+b)^4$の展開式の係数を考えるとき，$(a+b)^3$の展開式の係数を並べてできる数列，1, 3, 3, 1において，隣り合う項の和を考えて，4, 6, 4 という数列が得られる。ここに，初項の係数1と末項の係数1をつけ加えると，$(a+b)^4$の展開式の係数の数列，1, 4, 6, 4, 1 が得られる。(以下，略)」

3．パスカルの三角形と二項定理の証明

高等学校において，二項定理を早々に扱うには，議論の余地も残ると思うが，順列や組合せは実社会で遭遇する場面も多く，記号$_{n}P_{r}$や$_{n}C_{r}$を早期に導入することは無理なことではないと思われる。

パスカルの三角形は，教科書によっては，項を立てて扱っているものもあれば，二項定理を示したあとに紹介程度のものもあったが，パスカルの三角形は，ふしぎな数として数千年前から石碑などに刻まれていたという数学史的な側面からみても，生徒にとっても興味ある「数の配列」であり，重視したいテーマである。

二項定理の証明をみて見ると，多くは次のように証明している。

「たとえば，$(a+b)^5$の展開式を考えるとき，$(a+b)^5$は5個の $a+b$ の積

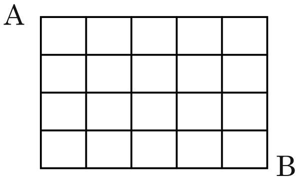
$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$

である。この展開式は，5個の因数の各々から，aかbのどちらかをとって掛け合わせた積の和である。例えば5個の因数のうち3個のa，残りの2個からbをとって掛け合わせると，その積はa^3b^2になる。このような積から得られる場合の数は，5個の因数からbをとる2個の因数を選ぶ選び方になる。すなわち，$_{5}C_{2}$に等しい。

したがって，展開式におけるa^3b^2の係数は$_{5}C_{2}$である。同様に考えると，･･･（以下略)」という流れで，一般化しているが，生徒にとっては，この二項定理の説明は理解度が低い。

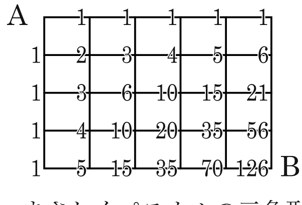
ところが，二項定理が順列や組合せの考え方を学んだ後に配列してあると，教科書には，必ず次のような例題があることに着目したい。

「図のように，東西に5本，南北に6本の道路がある。地点Aから地点Bまで，遠回りしないで行く経路は何通りあるか。」というものであるが，



この解答は，結果的には同じであるが，教科書の解答は，→5本，↓4本の同じものを含む順列の考え方を使って，$\dfrac{9!}{5!4!}$=126（通り）とするか，組合せの考え方を使って，$_{9}C_{4}$=126（通り）とするかであるが，生徒は次のような解答をすることが少なくない。

それは，図のように地点Aから順に道順の数え上げていく方法である。

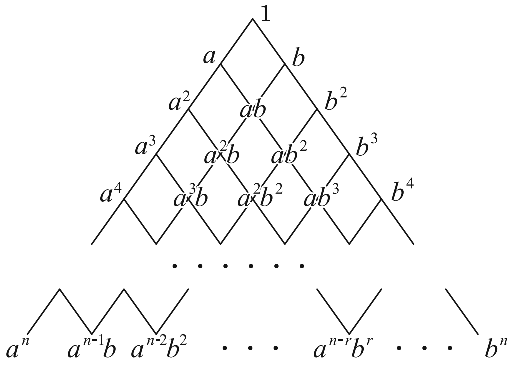


これは，まさしくパスカルの三角形を用いた解答であるが，生徒にとっては公式を用いるより，簡単で理解しやすい。

二項定理への導入に関しても，この図式した考え方が分かりやすい。私は，教職に就いたときからずっとパスカルの三角形をもとにした次のような図を用いた証明をしてきたが，生徒の

理解度は高かったと思う。

すなわち，図のような格子状の各地点に行く経路の方法は，前述の[例]と同じである。そこに，1からスタートして，左下（↙）方向に進むときは×a，右下（↘）方向に進むときは×bとして地点名を定義すると，そこには，$(a+b)^n$ の展開式の各項が順にあらわれるから，各地点までの経路の個数が各項の係数となる。



このような視覚を交えた説明により，パスカルの三角形から二項定理の説明に発展していくことは容易である。

4．関数 $f(x)=x^n$ の微分

関数 $f(x)=x^n$（n は自然数）の微分の公式は，数学Ⅱでは「三次までの多項式関数を中心とする」（学習指導要領解説）とされているので一般の $f'(x)=nx^{n-1}$ を導く必要はないが，数学Ⅲの教科書では証明されており，その証明方法には様々なものがある。

二項定理を使う方法以外に，数学的帰納法を用いた証明もあるが，その手法には次のようなものがある。

「$n=k$ のときの仮定から，$n=k+1$ のときにも成り立つことを示す」ために，

一つには積の微分法を扱ってから

$x^{k+1}=x\cdot x^k$ であることを用いて示す方法，

一つには，$\Delta y=(x+\Delta x)^{k+1}-x^{k+1}$

$$=((x+\Delta x)^k-x^k)(x+\Delta x)+x^k\cdot\Delta x$$

のように，やや技巧的な変形をする方法も見られるが，これらと比べて，微分の定義を，そのままの計算で示すことができる二項定理を用いることは自然な方法である。

さらに，物理でも多用される，近似式

$(1+x)^n \geqq 1+nx+\frac{1}{2}x^2 \quad (x \geqq 0)$ や，

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ や $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の極限を求めるときに用いる関係として，二項定理の重要性を認識させておく必要がある。

確率分布の基本となる二項分布を学ぶ上でも，二項定理の重要性は述べるまでもない。

5．二項定理を用いた興味ある等式

二項定理を用いて，生徒に紹介したい興味ある等式をまとめてみた。

二項定理

$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$

において，$a=1$，$b=x$ とすると，

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots+{}_nC_{n-1}x^{n-1}+{}_nC_nx^n$ ①

が得られ，

①で，$x=1$ とすると，

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_r+\cdots+{}_nC_n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k=2^n$$

$x=-1$ とすると

$${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^r{}_nC_r+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(-1)^k=0$$

これにより，

${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5\cdots$

ここまでは，教科書でも扱われている。

さらに，①の両辺に x をかけてから x で微分して，$x=1$ とすると，

$${}_nC_0+2{}_nC_1+3{}_nC_2+\cdots+(n+1){}_nC_n=(n+2)2^{n-1}$$

①の両辺を0～1まで定積分すると，

$${}_nC_0+\frac{1}{2}{}_nC_1+\frac{1}{3}{}_nC_2+\cdots+\frac{1}{n+1}{}_nC_n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

①の両辺に x をかけてから，0～1まで定積分すると，

$$\frac{1}{2^n}C_0+\frac{1}{3^n}C_1+\frac{1}{4^n}C_2+\cdots+\frac{1}{n+2^n}C_n=\frac{2^{n+2}-1}{n+2}-\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

また，${}_nC_k={}_nC_{n-k}$であることと，

$$(x+1)^n(x+1)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}{}_nC_kx^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}{}_nC_kx^k\right)$$

および，$(x+1)^n(x+1)^n=(x+1)^{2n}$であることから，この等式の両辺$x^n$の係数とを比べると，

$$({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^3+\cdots+({}_nC_n)^2={}_{2n}C_n$$

これらは，大学入試の問題としてもよく出題されているが，中には，次のような考えさせる問題もあった。それは，

「$\displaystyle\sum_{k=10}^{50}{}_{60}C_k\,{}_{40}C_{50-k}={}_nC_k$を満たす　自然数$n$，$k$を求めよ。」というものであったが，左辺が，${}_{60}C_{10}\,{}_{40}C_{40}+{}_{60}C_{11}\,{}_{40}C_{39}+\cdots+{}_{60}C_{50}\,{}_{40}C_0$であることから，$(x+1)^{60}(1+x)^{40}=(x+1)^{100}$であることを利用して，この展開式の$x^{50}$の係数に着目する問題である。$x^{50}$の係数は，

左辺は$(x+1)^{60}$と$(1+x)^{40}$の展開式の積から，　${}_{60}C_{10}\,{}_{40}C_{40}+{}_{60}C_{11}\,{}_{40}C_{39}+\cdots+{}_{60}C_{50}\,{}_{40}C_0$が得られ，右辺は$(x+1)^{100}$の展開式から，${}_{100}C_{50}$であることから，$n=100$，$k=50$を導くことができるが，この解答ではヒントがなくては難問である。

この問題は，内容的には「60個の白玉と40個の赤玉の入った袋から，50個の玉を取り出す場合の数を求めよ。」という問題と実質同じ問題に帰着できることから，二項定理の面白さを伝える上では興味ある問題である。

６．自然数の和，平方の和，立方の和の公式

数列の基本となる公式である，自然数の和，平方の和，立方の和の公式を，二項定理から導いてみよう。そこで，次の等式に着目する。

$$(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+(1+x)^{n+2}+\cdots+(1+x)^{n+m}$$
$$=\frac{(1+x)^n\left((1+x)^{m+1}-1\right)}{x}$$
$$=\frac{(1+x)^{n+m+1}-(1+x)^n}{x}$$

この等式の両辺のx^nの係数を求めてみると，左辺は，それぞれの展開式の各項でx^nの係数の和であり，右辺は，分子のx^{n+1}の係数を求めれば良いから，次の関係式を得ることができる。

$${}_nC_n+{}_{n+1}C_n+{}_{n+2}C_n+\cdots+{}_{n+m}C_n={}_{n+m+1}C_{n+1}\cdots②$$

②で，$n=1$，$m=n-1$と置き換えると，

$${}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_nC_1={}_{n+1}C_2$$

すなわち，$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$を得る。

さらに，

$$k^2=(k^2-k)+k=k(k-1)+k=2{}_kC_2+{}_kC_1$$

であるから，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)=\sum_{k=2}^{n}2{}_kC_2+\sum_{k=1}^{n}{}_kC_1$$
$$=2({}_2C_2+{}_3C_2+\cdots+{}_nC_2)+({}_1C_1+{}_2C_1+\cdots+{}_nC_1)\cdots③$$

②で，$n=2$，$m=n-2$と置き換えると，

$${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2={}_{n+1}C_3=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

であるから，③の右辺は，

$$2\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

となり，

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$を得る。

同様にして，

$$k^3=k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k$$
$$=6{}_kC_3+6{}_kC_2+{}_kC_1$$

であることと，②で$n=3$，$m=n-3$と置き換えた式を用いて計算すると，

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$が得られ，簡単な計算で，累乗和への拡張も容易である。

7．おわりに

先日，ある大学生から，数列の極限計算での変形がわからないとの質問があり，二項定理の確認をしたところ，「高等学校で飛ばされて理解していない。」との回答に驚いたことがある。

二項定理は，高等学校の指導要領の改変の都度，一貫した指導がされてきたわけではないが，数学史的側面からも，発展性からも，高等学校での最重要定理の位置づけされても良い定理である。指導方法を工夫し，生徒の理解や興味を図りながら，体系化した指導が必要な重要な定理の一つである。