演算と平均に関する指導法

高橋　眞映

概要：小学生から馴染みの深い加法と乗法から出発し，演算とは何かまた演算から定義される平均とは何かを議論する。更に演算と平均及び平均の大小関係を高校生に認識させる指導法を提唱する。また平均から定義される凸関数を論じ，新しい見方を提唱する。
最後に演算が先か平均が先かを考察してみる。

1. 演　算

演算と言えば直ぐ加法と乗法が思い浮かぶであろう。いま集合X 上の演算を直積集合$X \times X$ からX への写像：$(x, y) \to x \circ y$ で結合律：

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \ (x, y, z \in X)$$

を満たすものを言うことにする。つまり$(X, \circ)$ が半群となる事である。
特に$x \circ y = y \circ x$ $(x, y \in X)$ を満たすとき，可換半群であると言う。ここでは正数全体の集合R_+上の可換な演算のみを考えてみよう。このとき演算は加法と乗法ばかりではないのである。例えば

$$x \diamond y = x + y + xy \ (x, y \in R_+)$$

と定義すると，$\diamond$ はR_+ 上の可換な演算となる事が分る。これは加法及び乗法が可換律を満たす事と乗法が加法を保存する事，つまり $x + y = y + x, xy = yx$ 及び $x(y + z) = xy + xz$ $(x, y \in R_+)$ が成り立つ事に起因しているのである。実際可換律を満たす事は明らかである。また

$$\begin{aligned} x \diamond (y \diamond z) &= x + (y \diamond z) + x(y \diamond z) \\ &= x + y + z + yz + x(y + z + yz) \\ &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \end{aligned}$$

且つ

$$\begin{aligned} (x \diamond y) \diamond z &= (x + y + xy) \diamond z \\ &= x + y + xy + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \end{aligned}$$

が成り立つから，この演算$\diamond$ は結合律を満たすので，$(R_+, \diamond)$ は可換半群となる。また

$$x \star y = \frac{xy}{x + y} \ (x, y \in R_+)$$

と定義すると$\star$もR_+ 上の可換な演算となる。これもやはり加法及び乗法が可換律を満たす事と乗法が加法を保存する事に起因しているのである。実際可換律を満たす事は明らかである。また

$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= \frac{x(y \star z)}{x + y \star z} \\ &= \frac{x(\frac{yz}{y+z})}{x + \frac{yz}{y+z}} \\ &= \frac{xyz}{x(y + z) + yz} \\ &= \frac{xyz}{xy + xz + yz} \end{aligned}$$

且つ

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= \frac{(x \star y)z}{x \star y + z} \\ &= \frac{(\frac{xy}{x+y})z}{\frac{xy}{x+y} + z} \end{aligned}$$

$$= \frac{xyz}{xy + z(x + y)}$$

$$= \frac{xyz}{xy + zx + zy}$$

が成り立つから，この演算$\star$は結合律を満たすので，$(R_{+}, \star)$ は可換半群となる。

2. 平　均

A君とB君の身長がそれぞれ$a\ cm$, $b\ cm$ のとき，二人の身長の平均は $\frac{a+b}{2}\ cm$ とするのが自然であろう。これをa とb の相加平均または算術平均と言う。これを一般化して，
「もし$x, y \in X$に対して$x \circ y = h \circ h$となる$h \in X$が存在すれば，このhを演算$\circ$に関するxとyの平均と呼ぶ」のは自然な定義であろう。この伝で行くと$x, y \in R_{+}$の積に関する平均は，hに関する方程式：$xy = h^2$を解いて$h = \sqrt{xy}$である。これが所謂相乗平均あるいは幾何平均と呼ばれるものである。この2つの平均は高校生には大変なじみ深いものであろう。それでは$x, y \in R_{+}$の$\diamond$に関する平均は何であろうか？それはhに関する方程式：$x + y + xy = h \diamond h$を解いて，$h = \sqrt{(x+1)(y+1)} - 1$である。これは1だけずらして相乗平均を取りもとに戻したものであるが，これが日常生活とどんな関係があるのか分らない。次に$x, y \in R_{+}$の$\star$に関する平均はなんであろうか？それはhに関する方程式：$\frac{xy}{x+y} = h \star h$を解いて，$h = \frac{2xy}{x+y}$である。これが所謂調和平均と呼ばれるものである。これは日常生活的には次のような例として出現する：横浜駅から東京駅まで車で往復するとき，行きは時速$x\ km$で，帰りは時速$y\ km$で戻れば，往復の平均時速は丁度それらの調和平均となっている。

3. 高校生への指導，I

これは前節でも見て来た事であるが，具体的なものを一般化する事により多くの具体的なものを発見しようとするのは人間の知恵であろう。

さて高校生に演算を認識させるには次のような手順を踏む事を提唱する。

（1）小学生のときから慣れ親しんだ加法と乗法に共通の法則（交換法則と結合法則）を発見させる。
（2）その様な共通の法則を持つ他の演算を発見させる。
（3）発見できない時は1節で与えた二つの演算$\diamond$と$\star$を示し，これらが交換法則と結合法則を満たす事を証明させる。

以上の手順で高校生は演算に興味を持つと思われるが，実は上で考察した乗法や演算$\diamond$と$\star$はみな加法とある種の関数の組み合わせで実現する事が出来るのである。更にこれはもっと一般化する事が出来，更なる理論へと展開するのであるが，そこは感覚だけに留めるのが望ましいであろう。

次に高校生に平均を認識させるには次のような手順を踏む事を提唱する。

（1）正数aとbの加法に関する平均は$\frac{a+b}{2}$と定義するのが自然である事を認めさせる。
（2）正数aとbの加法に関する平均hは$a + b = h + h$を満たす事を確認させる。
（3）正数aとbの演算$\circ$に関する平均hは方程式$a \circ b = x \circ x$の解として定義されるべきである事を認めさせる。
（4）乗法及び演算$\diamond$と$\star$に関する平均を求めさせ，これらの平均について前節のような解説をする。

以上の手順で高校生は平均にも興味を持つと思われる。しかし上でも述べたように平均も更なる理論へと発展するのであるが，これも感覚だけに留めるのが高校生には望ましいであろう。

4. 平均の大小

平均の大小で最も有名なものは，相加・相乗平均不等式：$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ であろう。
ところがもっと一般に不等式：

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \sqrt{(x+1)(y+1)}-1 \leq \frac{x+y}{2}$$

$$(x, y \in R_+)$$

が常に成り立つのである。実はRを実数全体の集合とし，$x, y \in R_+$ を任意に固定し，各$p \in R$ に対して，

$$\|(x,\ y)\|_p = \begin{cases} \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p} & (p \neq 0) \\ \sqrt{xy} & (p = 0) \end{cases}$$

と定義する。このとき$\|(x,\ y)\|_p$ は$x \neq y$ ならばp の関数として連続かつ狭義単調増加となり，調和平均，相乗平均，相加平均はそれぞれ$p = -1$，$p = 0$，$p = 1$ に対応しているので，不等式：調和平均$\leq$ 相乗平均$\leq$ 相加平均が出現するのである。この$\|(x,\ y)\|_p$ はx とy のp-乗平均と呼ばれるが，これもある可換な演算に関するx とy の平均となっている。実際

$$x \circ_p y = (x^p + y^p)^{1/p} \ (x, y \in R_+)$$

と定義すると，(R_+，$\circ_p$) は可換半群となり，上述のp-乗平均はこの演算$\circ_p$ に関する平均となっている。また不等式：

$$\sqrt{xy} \leq \sqrt{(x+1)(y+1)}-1 \leq \frac{x+y}{2}$$

は相加･相乗平均不等式の一つの細分であるが，これはまた別の理由で成り立つのである（参照［2]）。

今までは2個の平均を定義したが，勿論n 個の平均も考えられ，そのような平均に関する不等式は沢山ある（参照［1]）。興味ある読者は独自の考えからそれらの不等式や，あるいは全く新しい不等式を導き出される事を願っている。

5. 凸関数と凹関数

I とJ をR上の区間とするとき，
連続関数$f: I \to J$ が

$$f\left(\frac{x\ +\ y}{2}\right) \leq \frac{f(x)\ +\ f(y)}{2} (x, y \in J)$$

を満たせば，凸であると言う。また不等式が逆ならば凹と言う。視覚的には関数のグラフが下に出っ張っておれば凸関数であり，上に出っ張っておれば凹関数と言う事になる。凸関数と凹関数は有名なJensenの不等式を導く事は良く知られている。

所でここには加法に関する平均が現れているので，これを一般化して見よう。
先ず（I, ∗），(J, ∘）をそれぞれ唯一つの平均を持つ可換連続半群としよう。また唯一つの平均をそれぞれ

$(x * y)^{(1/2)*}$ $(x, y \in I)$，$(a \circ b)^{(1/2)\circ}$ $(a, b \in J)$

で表す事にする。
このときもし連続関数$f: I \to J$ が
$f((x * y)^{(1/2)*}) \leq (f(x) \circ f(y))^{(1/2)\circ} (x, y \in I)$
を満たせば，それを（∗，∘)-凸関数と呼ぼう。また不等式が逆ならば（∗，∘)-凹関数と呼ぼう。このときやはり（∗，∘）-凸関数と（∗，∘）-凹関数はJensen型不等式を導くのである（参照［2])。

さて凸かつ凹である関数はアフィン関数でそのグラフは直線である。それでは（∗，∘)-凸かつ（∗，∘)-凹である関数を（∗，∘)-アフィン関数と呼べば，その関数のグラフはやはり直線的であろうか？答えは勿論否である。
実際$I = R_+$，$J = R$とし，∗を乗法演算，∘を加法演算とすると，

$$\log\sqrt{xy} = \frac{\log x\ +\ \log y}{2} \ (x, y \in R_+)$$

が成り立つから，$y = \log x$ は（∗，∘)-アフィン関数であるが直線的ではない。勿論このlog関数は通常の視覚を持ってすれば直線ではないが, 見る人が観ると直線なのである (参照［3])。

6. 高校生への指導，II

様々な平均には大小関係が成り立つ事が多くまた応用範囲も広い。高校生に平均の大小関係を認識させる為に次の手順を踏む事を提唱する。

（1）４節で述べた大小関係：
調和平均≤ 相乗平均≤ 相加平均を証明させる。

（2）４節で述べたp-乗平均 $\|(x, y)\|_p$ は$p = -1, 0, 1$ のときそれぞれ調和平均，相乗平均，相加平均となっている事を確認させる。

(3)　$\|(x, y)\|_p$ はp に関して狭義単調増加である事を証明させる。

（4）４節で述べた相加・相乗平均不等式の細分を確認させる。

以上の手順で高校生は平均の大小に関心を持つと思われる。しかし平均の大小も更なる理論へと発展するのであるが，これも感覚だけに留めるのが高校生には望ましいであろう。

ところで現代数学の一分野に凸解析学があり現在も盛んに研究がなされているが，この分野の基本概念は凸関数と凹関数である。これらの関数は前節で見られるように平均と密接な関係があり，特にJensen型不等式を導き，更なる理論へと発展するのである。しかしながら高校生はそこまで深く立ち入らないで，図形的な意味合いを理解するだけに留めておく事が望ましい。

7. 演算が先か平均が先か

今までの考察は演算が先にあり，それから平均が定義された。しかしもしかしたら平均が先にあり，それから演算が定義されるかも知れない。しかしながら平均とは何かは難しい問題であり，確固とした定義はない。それ故平均をどのように定義すれば，それから演算が生まれるかは面白い問題であると思う。賢明な読者の知恵をお借りしたい。

References

[1] Y.Nakasuji, K. Kumahara and S.-E.Takahasi, A new interpretation of Jensen's inequality and geometric properties of ϕ-means, J. Inequal. Appl., 2011, 2011:48 doi:10.1186/1029-242X-2011- 48.

[2] Y.Nakasuji, A reconsideration of Jensen's inequality, preprint.

[3] 髙橋眞映，中筋康夫，金子みすゞの世界における Jensen の不等式，数学教育研究，41 (2012), 65-70.