

3 パラメータ確率分布及び構造信頼性への応用

陸 昱韜* 蔡 嘉儀** 趙 衍剛***

A New 3-Parameter Distribution and its Application to Structural Reliability

Yu-Tao LU* Jia-Yi Cai** Yan-Gang ZHAO***

1. はじめに

信頼性評価には、確率変数の確率分布が必要である。これらの分布は、一般的に利用可能な統計データのヒストグラムに候補分布を当てはめ、適合度検定を実行することによって決定される。今までに広く使われている正規分布は2パラメータ分布であるため、データの歪度というデータ分布が正規分布からどの程度左右に偏っているかを示す統計量を反映することができないと認識された。歪度はデータの分布にとって非常に重要なので、統計データとのフィッティングなどにおいて、3パラメータ分布はより良い効果が得られると考える。

しかし、3パラメータ分布にも、確率変数の範囲に制限があるという不足がある。この研究では、統計データの平均値、標準偏差、歪度を用いて、三つのパラメータによって決められて、3パラメータ分布を提案する。提案式が十分な柔軟性を持ちながら、確率変数にも制限なし、モーメントの計算も簡単である。ほとんどの場合、一般的に使われている3パラメータより、同等またはそれ以上の効果が得られる。この研究では、提案式の定義、モーメントおよび他の分布との比較を紹介し、コンクリート経年強度を例として、統計データとのフィッティング効果を示す。

2. 提案式紹介

標準化確率変数 X_S が式(1)になる

$$X_S = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \quad (1)$$

ここでは、 μ_x が平均値、 σ_x が標準偏差とする。 X_S と標準正規ランダム変数 U との関係は以下の式で表すことができる。ただし、 a は歪度 α_{3x} に関するパラメータである。

$$X_S = \frac{u}{3} \left[1 + 2e^{\frac{au}{4} \left(1 - \frac{au}{30} \right)} \right] - \frac{a}{6} \quad (2)$$

確率変数 x に対して、式(3)の正規変換式が成立している。ただし、 $\Phi(u)$ は標準正規分布累積分布関数 (CDF)、 $F(x)$ は確率変数 x の累積分布関数である。 X_S に対して偏微分すると、式(4)が得られる。確率密度関数(PDF)は累積分布関数の導関数なので、提案式のPDF

が式(5)で表せる。式(4)(5)によって、PDFが式(6)のように得られる。ただし、 $\phi(u)$ が標準正規分布PDFである。

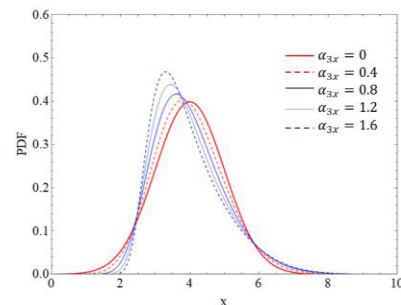
$$\Phi(u) = F(x) \quad (3)$$

$$\frac{dX_S}{du} = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} + \frac{au}{6} \left(1 - \frac{au}{30} \right) \right) e^{\frac{au}{4} \left(1 - \frac{au}{30} \right)} \quad (4)$$

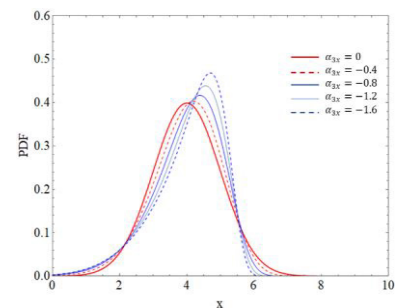
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\Phi(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d\phi(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{\phi(u)}{\frac{\sigma_x}{3} + \sigma_x \left(\frac{2}{3} + \frac{au}{6} \left(1 - \frac{au}{30} \right) \right) e^{\frac{au}{4} \left(1 - \frac{au}{30} \right)}} \quad (6)$$

図2は提案式のPDFが-1.6~1.6範囲で変化する曲線を示している。提案式が歪度を明らかに反映できるという特性がわかる。



(a) $\alpha_{3x} > 0$



(b) $\alpha_{3x} < 0$

図1. 提案式PDF

*大学院 (博士前期課程) 建築学科
Graduate (M.C.), Dept. of Architecture
**大学院 (博士後期課程) 建築学科
Graduate (D.C.), Dept. of Architecture
***教授 建築学科
Professor, Dept. of Architecture

提案式のパラメータを計算するため、パラメータとモーメントの関係を把握する必要がある。式(2)によって、提案式の平均値 μ_x 、

標準偏差 σ_x は2つのパラメータである上で、パラメータ a と歪度 α_{3x} の関係は図3の示すようになる。

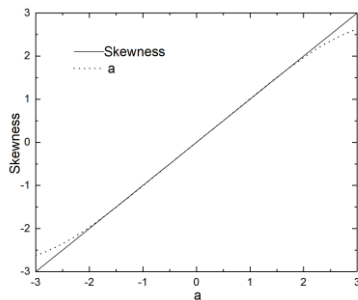


図2. a と α_{3x} の関係

図4によると、歪度が-2~2の範囲で、 a とほぼ同じである。そのため、一般的な状況で提案式の前三次モーメントが以下の式になる。

$$E[X] = \mu_x \quad (7)$$

$$E[(X - \mu_x)^2] = \sigma_x^2 \quad (8)$$

$$E\left[\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}\right)^3\right] = a \quad (9)$$

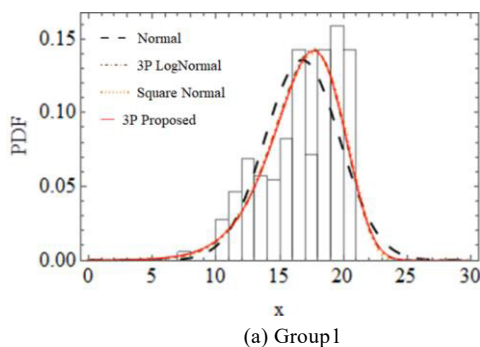
3. 提案式検証

本研究ではコンクリート経年強度を例として、統計データをフィッティングする際に提案式の効果を考察する。コンクリート強度のヒストグラムや分布のPDFは図4に示している。

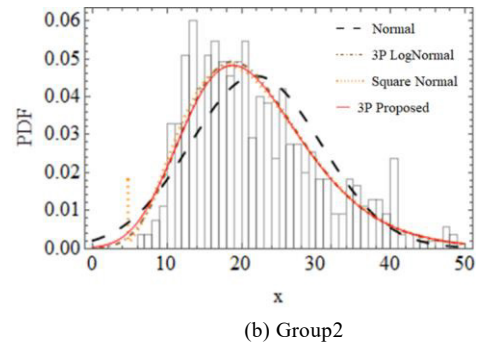
ここでは、提案式、3パラメータ対数正規分布、3パラメータ平方正規分布および正規分布が含まれている。二グループのデータの数量と各モーメントが表3に示す。

表1. データ詳細

	Group1	Group2
データ数	365	550
平均値	16.7603	21.8791
標準偏差	2.9411	8.7764
歪度	-0.6282	0.7860



(a) Group1



(b) Group2
図3. 統計データとのフィッティング

フィッティング効果はカイ二乗検定で比較する。カイ二乗検定値が小さいほど、適合度が良いということで、両グループの検定値が表4に示している。

表2. カイ二乗検定値

	Normal	3P-Log	SN	Proposed
Group1	0.0356	0.0010	0.0096	0.0010
Group2	0.1793	0.0464	0.1018	0.0437

提案式は、これらすべてのケースで2パラメータ分布や3パラメータ分布よりもヒストグラムによく適合し、結果は、この研究で検討した2つのケースの統計データのヒストグラムとよく一致している。表4によると、提案式がこの二つの例では、一番良いである。

4. 結論

本研究では、正規変換に基づいて確率分布を作成し、提案式の確率密度関数と累積分布関数および特性について説明した。次の結論を導き出すことができる：

1. 提案式は柔軟性を持ち、統計の統計データのさまざまな状況に適用できる、確率変数の歪度を十分に反映することができる。
2. 一般的な状況で提案式のパラメータとモーメントの計算が簡単。
3. 提案式は一般性を持ち、統計の応用でも3パラメータ分布より良いフィッティング効果を得られる。
4. 提案式が確率変数の制限がなくて、確率変数のすべての可能な値を含んでいる。適用できない状況がないと認識される。

5. 参考文献

- [1] 鈴木澄江, 榎田佳寛: コンクリートの圧縮強度レベルと確率分布形状, 日本建築学会構造系論文集, 578 (69), 1-6, 2004.
- [2] Y.G. Zhao, T. Ono, H. Idota, T. Hirano: A Three-Parameter Distribution Used for Structural Reliability Evaluation, J. Structural and construction engineering, AIJ, 546, 31-38, (2001).
- [3] Y.G. Zhao, Z.H. Lu: Structural reliability approaches from perspectives of statistical moments, (2021).
- [4] Y.G. Zhao, X.Y. Zhang, Z.H. Lu: A Flexible Distribution and Its Application in Reliability Engineering, Reliability Engineering and System Safety, 2018.