

Palivos-Blanchard-Yaari モデルにおける 出生率・成人の平均余命と経済成長に関する議論

比佐章一*・比佐優子†

Fertility, Adult Mortality and Economic Growth in Palivos Blanchard-Yaari Model

Shoichi Hisa・Yuko Hisa

Kanagawa University・Teikyo University

【要旨】 出生率が内生的に決まる経済成長モデルでは、子供が上級財である場合、一括税を課すと所得の減少効果により出生率は低下し、結果定常均衡における一人当たり資本水準を増加する。同様の効果は、子供の養育費用の増加でも確認される。課税政策は人々の所得水準を引き下げる効果を持つ一方で、人口増加による貧困を抑える効果を持つため、税を徴収して社会インフラ整備などの経済成長が期待される政策に振り分けることは、意義のあることだといえる。また成人の死亡率の低下は、成人の将来への備えとしての貯蓄を促し、一人当たり資本水準が増加させる。またこうした貯蓄の増加は、子供を持つことのコストの増加を意味することから、出生率の低下をもたらす。この結果から、成人の死亡率の低下は、経済成長に正の効果を持つことがいえ、課税政策と公衆衛生政策を組み合わせることは、人口増加による貧困の罠に陥った経済に有効であるといえる。

【キーワード】 平均余命、出生、経済成長、課税政策

【Abstract】 In economic growth model where the fertility is endogenously determined, when children are considered as normal goods, imposing a lump-sum tax reduces in household's income and decreases fertility, and as a result, it increases the capital per capita in the steady-state equilibrium. A similar effect is observed when the rearing cost of child is increased. Taxation policies decrease people's income levels, but mitigate the poverty caused by population growth. Reduction of adult mortality encourages the saving for future, and increases the capital per capita, and it means increasing the cost for child, and therefore fertility is declined. As the results the decline of adult mortality has positive effect for economic growth, and the mixture of tax and sanitary policy is effective for the economy of malthusian trap.

【Keywords】 Longevity, Fertility, Economic Growth, Tax Policy

* 神奈川大学経済学部教授 † 帝京大学経済学部教授

1 序論

本論文では、Palivos(1995)のモデルに成人の死亡率を考慮した、Blanchard-Yaari モデルを組み合わせて、成人の死亡率（すなわち成人の平均余命）と出生率との関係を、経済成長の観点から論じる。

出生を経済学的観点から論じた初期の研究は Malthus(1798) であるといえよう。Malthus(1798) は、所得の増加に伴い人々が出生数を増やし、結果、一人当たりで見た所得水準が減少し、経済成長が止まる可能性があることを論理的に示した。いわゆる「マルサスの罠」(Malthusian Trap) と呼ばれる現象である。これに対し、Becker(1960) は、所得の高い家計よりも所得の低い家計の方が子供の数が少ない傾向になることを指摘し、それを説明するために、ミクロ経済学のフレームワークに「子供の質」という概念を導入した。この子供の質というのは、子供に対する支出であり、子供のための寝室の提供や保育園や大学進学への支出、ダンスや音楽などの習い事などとしている。そして子供に対して上級財の仮定を導入したとしても、所得の上昇が子供の質を増やす、すなわち一人当たりの子供の養育費用を増やすことで、出生数の減少がもたらされる可能性があることを示した。そしてこの家計の効用関数のセッチングが、シンプルな形でマルサスの罠という現象と経済発展に伴う出生率の低下の減少などの、一見すると相反すると思われるこれらの経済現象を、一つのモデルで説明可能であることを示した。

これを発展させる形で、Becker et al.(1990) は経済成長と人口成長の関係を論じ、Becker (1960) が示したフレームワークにより、発展途上国における人口爆発による経済停滞と、先進国における少子化をともなう経済成長という異なる経済状態を、一つのモデルで示すことができることを明らかにした。またこのモデルでは、子供の質を人的資本ととらえることで、教育などの子供にかかる費用が労働生産性を引き上げる効果と、子供の数を減らす効果とをもたらすことを明らかにした。また Palivos (1995) は、一般的な生産関数と効用関数をもとに、人口成長率と経済成長の関係を論じ、人口成長率を生産関数に内生化させることで複数均衡が発生する可能性があること、またそれが高税率や不十分な社会資本投資、政治的不安定性などの政策の失敗によって引き起こされることを論じた。

通常の経済成長モデルでは、人口成長率を外生的に与えて議論をするが、成長モデルの中で人口成長率が内生的に決まると、そこから得られる結論が通常の場合と異なるケースが起こりうるということが知られている。先ほどの議論でもわかるが、家計の効用関数に子供の数を加えることで、複数均衡が発生することが明らかになっている。しかしそれ以外にも、家計に一括税をかけることで、定常均衡において一人当たり資本水準や消費水準が増加する可能性があることが、比佐 (2001) によって明らかになっている。人口成長率が一定の場合、Blanchard and Fischer(1993) では、政府支出の増加が、一人当たり資本水準を変化させず、家計の消費水準のみを増加させ、経済成長に影響を与えないことを指摘しているが、これと同じことは、一括税に関してもいえる。すなわち一括税を課すと、一人当たり資本水準が変化せず、家計の消費水準が減少する結果になる。しかし比佐 (2001) では、人口成長率を生産関数に内生化させた場合、一括税が一人当たり資本水準に影響を与える可能性があることを指摘している。論文では、生産関数に Rebelo(1991) の AK モデルを採用し、Palivos and Scotese(1996) と同様の、相対的リスク回避度が一定となる CRRA 効用関数

による分析を行うと、定常均衡が存在するケースにおいて、それが生じることを明らかにしている。そして一括税の増加は、子供の養育にかかる費用の増加と同じ効果を持つことを明らかにし、一括税が家計の所得の減少を引き起こすことで、人口増加の効果を抑える効果が働くからとしている。そして政府が税金をかけて出生率を抑制しながら、それを財源に社会資本整備を行うことで、経済発展が実現できるとしている。しかしこれは関数形の特徴に依存している可能性もあるため、本論文では、Palivos(1995)のように、企業の生産関数や家計の効用関数をより一般化して議論を行う。

また本論では成人の死亡率と出生率との関係について議論を行う。Barro and Sala-I-Martin(1995)は、各国のマクロデータをもとに、死亡率の低下や平均余命の増加が経済成長率と正の相関を持つことを明らかにしている。また理論的な分析としては、de la Croix and Licandro(1999)、Echevarria(2003)、Chakraborty(2004)やKunze(2014)などがあり、これは死亡率と経済成長の関係を理論的に分析し、死亡率や平均余命の増加が投資を促し、経済成長を促すことを明らかにしている。またOzcan(2002)やBlackburn and Cipriani(2002)は、出生率と乳児死亡率および平均余命との関係を論じている。しかしBlackburn and Cipriani(2002)は、人的資本のみを生産財としたモデルであり、物的資本による遺産としての資産移転を考慮していない。物的資本があるケースで、死亡による世代間の資産移転が経済成長に与える影響を分析したのは、比佐・比佐(2023)である。この論文は、Yaari(1965)の年金保険制度を組み入れたBlanchard(1985)モデル(Blanchard-Yaari=モデル)について議論をしている。そして人口成長率がないケースでは、Benhabib et al.(2016)によって、世代間の資産規模が不均一化し、最終的にベキ則分布になることが証明されているが、比佐・比佐(2023)は、人口成長率が存在する場合について議論を行い、各家計の初期時点の資産規模が均一であれば、それ以降も均一であり続け、代表的個人による分析が可能であることが明らかになっている。さらに比佐・比佐(2023)は、家計が消費と出生数に対しコブ=ダグラス型の瞬時効用関数を持っている状況で、一括税の引き上げが定常均衡における一人当たり資本水準が増加し、出生率が低下する効果を持つことや、成人の死亡率の減少によって、一人当たり資本水準が増加し、出生率も減少することなどを明らかにしている。

こうした研究成果を踏まえ、本論文では比佐・比佐(2023)の議論をより発展させ、出生率すなわち人口成長率が内生化されている場合に、家計の効用関数や企業の生産関数を一般的な形にすることで、一括税などの課税政策や、長寿化などの要因が経済成長や出生率にどのような影響を与えることになるのかをみていく。

2 モデル

本論文では、代表的個人を想定し、各主体は以下の目的関数を最適化するものとする。

$$\max \int_0^{\infty} u(c(t), n(t)) e^{-(\rho+\mu)t} dt \quad (1)$$

$u(c(t), n(t))$ は、 t 時点における瞬時効用関数であり、一人当たり消費水準 $c(t)$ と出生数 $n(t)$ によって決まる。また本論文の設定は Blanchard and Yaari モデルとなっており、無限期間の効用最大化となっているが、確率 μ で死亡するため、時間選好率 ρ に死亡率 μ が加わる形をとる。これは将来の効用水準が割引かれて評価される形となっている。また Palivos(1995) と同様、消費

財と子供に対しては上級財との想定となっている。以下では、このモデルを Palivos-Blanchard-Yaari モデルと以下では呼ぶ。この瞬時効用関数は、 $c(t)$ および $n(t)$ に対して上級財であるという仮定を設ける。これは Becker(1960) と同じ設定となっている。つまり関数 u は連続であり、 $u_c = \frac{\partial u}{\partial c} > 0$ 、 $u_n = \frac{\partial u}{\partial n} > 0$ 、 $u_{cc} = \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0$ 、 $u_{nn} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} < 0$ 、そして $u_{cc}u_{nn} - u_{cn}^2 > 0$ を満たしているものとする (なお $u_{cn} = \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial n} = u_{nc}$ である)。

そして資産蓄積の方程式は、比佐・比佐 (2023) と同様、以下のように設定する。

$$\dot{k} = (r(t) + \mu)k(t) + w(t) - c(t) - n(t)(\phi + k(t)) - \tau \quad (2)$$

$k(t)$ は一人当たり資本水準であり、本論文では閉鎖経済を想定して議論を行うため、一人当たり資産水準と等しくなる。また $r(t)$ は利子率、 $w(t)$ は賃金率、 ϕ は子供一人にかかる養育費用 (一定を仮定)、および一人当たりに対する一括税 τ である。また $\dot{k} = \frac{dk}{dt}$ であり、 k を時間で微分した値、すなわち k の変化量を表している (このモデルセッティングに関する詳しい説明については、Blanchard(1985) や比佐・比佐 (2023) を参照)。なお以下の議論では、一括税として徴収した税金は破棄される (すなわち各個人には還元されない) ものとする。また時間の関数であることを意味する t を省略して表記していく。すると最適化条件は以下ようになる。

$$u_c = q \quad (3)$$

$$u_n = q(\phi + k) \quad (4)$$

$$\dot{q} = (\rho + n - r)q \quad (5)$$

q は共役変数であり、また $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ (すなわち時間 t の関数) である。また u_c は、 $u_c = \frac{\partial u}{\partial c}$ を意味し、関数 u を c で偏微分したものである。同様に u_n は $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ であり、関数 u を n で偏微分したものである。また瞬時効用関数は稲田条件を満たしており、 $\lim_{c \rightarrow 0} u_c = \infty$ 、 $\lim_{c \rightarrow \infty} u_c = 0$ 、 $\lim_{n \rightarrow 0} u_n = \infty$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ を満たしているとする。

また横断条件 (Transversality Condition) として、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} qk e^{-(\rho+d)t} = 0 \quad (6)$$

を満たす。そして (3) 式と (4) 式から、消費水準と出生数が k と q の関数として、すなわち $c = c(k, q)$ 、 $n = n(k, q)$ という形になることがわかる。そして n は k の減少関数となる。というのは (2) 式より、 k が子供にかかるコストになっているからである。ここで効用関数 u に関し、以下の仮定を設ける。

仮定 1 消費財 c は上級財であり、 $u_{nn} - u_{cn} \frac{u_n}{u_c} < 0$ という条件を満たす。

仮定 2 子供は上級財であり、 $-u_{cn} + u_{cc} \frac{u_n}{u_c} < 0$ という条件を満たす。

これらの仮定より c は q の減少関数、また n は q と k の減少関数になることがわかる (詳しくは補論 1 を参照)。そして (3)、(4) 式より、 c と n の派生需要関数が導出できる。すなわち c を q で微分した結果を c_q 、 c を k で微分した結果を c_k 、 n を q で微分した結果を n_q 、 n を k で微分し

た結果を n_k とすると、

$$c_k = -\Delta_u u_{cn} u_c \quad (7)$$

$$c_q = \Delta_u \left(u_{nn} - u_{cn} \frac{u_n}{u_c} \right) < 0 \quad (8)$$

$$n_k = \Delta_u u_{cc} u_c < 0 \quad (9)$$

$$n_q = \Delta_u \left(-u_{cn} + u_{cc} \frac{u_n}{u_c} \right) < 0 \quad (10)$$

となる。なお $\Delta_u = (u_{cc} u_{nn} - u_{cn}^2)^{-1} > 0$ である。そして c は q の減少関数であること、また n は k と q の減少関数であることがわかる。

3 一般均衡における定常均衡解分析

3.1 定常均衡解の安定性分析

次に一般均衡の条件をみてみる。一般均衡では、一人当たり産出水準 $f(k)$ が $f(k) = rk + w$ 、 $r = \frac{df}{dk} = f'(k)$ となることから、一人当たり資本水準 k と共役変数 q の挙動は、(2) 式と (5) 式より

$$\dot{k} = f(k) + \mu k - c(q, k) - n(q, k)(\phi + k) - \tau \quad (11)$$

$$\dot{q} = (\rho + n(q, k) - f'(k))q \quad (12)$$

となる ($\dot{q} = \frac{dq}{dt}$)。そして $\dot{k} = \dot{q} = 0$ となる定常均衡の近傍での線形近似を行うことで、均衡点の安定性を確認する。定常均衡の近傍における (11) 式と (12) 式のヤコビ行列 (J) を求めて分析を行い、均衡における安定性条件をみていく。なお以下では、生産関数は稲田条件 ($\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$ 、 $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$) を満たしているとする。

定常均衡の条件は (11) 式と (12) 式から、以下のようになる。

$$0 = f(k^*) + \mu k^* - c(q^*, k^*) - n(q^*, k^*)(\phi + k^*) - \tau \quad (13)$$

$$0 = (\rho + n(q^*, k^*) - f'(k^*))q^* \quad (14)$$

q^* と k^* はそれぞれ $\dot{k} = \dot{q} = 0$ となる定常均衡における q と k の値である。そして (14) より、定常均衡では $f'(k^*) = \rho + n(q^*, k^*)$ となることがわかる。

定常均衡において \dot{k} の右辺を k で微分したものを J_{11}^* 、 \dot{k} の右辺を q で微分したものを J_{12}^* 、 \dot{q} の右辺を k で微分したものを J_{21}^* 、 \dot{q} の右辺を q で微分したものを J_{22}^* とすると、 $J_{11}^* + J_{22}^* = \rho + \mu (> 0)$ となり、以下のことがいえる。すなわち時間選好率 ρ や死亡率 μ が十分に小さい、あるいは資本の限界生産力 $f''(k^*)$ の絶対値が十分に大きい、あるいは消費の限界効用 u_c^* が十分に小さい場合、行列式 $\det(J^*) = J_{11}^* J_{22}^* - J_{12}^* J_{21}^* < 0$ となり、均衡解は経済学的に意味のある鞍点均衡となる (詳しくは補論 2 を参照)。他方、 $\det(J^*) \geq 0$ の場合、均衡は不安定なものとなる。

3.2 定常均衡解の解の性質

では鞍点均衡において、一括税や子供の養育費用、死亡率や時間選好率の変化は定常均衡解に

どのような影響を与えるかみていく。(13)式と(14)式から、 k^* と q^* は、 τ 、 ϕ 、 μ 、 ρ の関数で表現でき、 q^* 、 k^* 、 τ 、 ϕ 、 μ 、 ρ で全微分をすると、以下の定理が導かれる。

定理 1 一括税 τ と子供の養育費用 ϕ が増加すると、一人当たり資本水準が増える。また成人の死亡率 μ と時間選好率 ρ が増加すると、一人当たり資本水準が減少する。

証明 1 補論 3 より明らか。

これは一括税の増加が家計の所得を減少させることで、上級財である子供の需要を減少させ、一人当たりで見た資本水準を引き上げることが効果が働くからといえる。そしてこれは子供の養育費用も同じ効果を持つことから確認できる。他方、成人の死亡率が一人当たり資本水準を減少させるのは、時間選好率が増加するのと同じ結果をもたらす。すなわち瞬時効用関数を $e^{-(\rho+\mu)t}$ だけ割り引く形で評価することになるので、結果、将来の消費の価値を低く評価する形となり、結果、家計の貯蓄を減らし一人当たり資本水準を引き下げる結果になる。またこれらの結果をもとに、定常均衡における一人当たり消費水準と出生数を分析すると、以下の結果が導かれる。

定理 2 資本の限界生産力が逡減する場合、一括税 τ と養育費用 ϕ の増加によって定常均衡における出生数 n^* を減少させる。

証明 2 補論 4 より $f''(k^*) \leq 0$ の時、 $n_\tau^* \leq 0$ 、 $n_\phi^* \leq 0$ が導かれることから明らか。

また補論 4 より養育費用の増加は、一括税による効果と同じ働きが生じていることがわかる。これは子供の数 n^* が上級財として働くことから、一括税が所得を減少させて子供数を減らす効果をもたらすことによって生じる。つまり仮定 1 により $-u_{cn} + u_{cc} \frac{u_n}{u_c} < 0$ であることが条件となっていることから導かれる。また資本の限界生産力 $f''(k^*)$ も働く。定常均衡における子供の数は(14)式から、 $f'(k^*) - \rho = n^*$ となり、資本の限界生産力によって決まる。そのため定常均衡における資本水準 k^* が高くなれば、資本の限界生産力 $f'(k^*)$ が小さくなり、結果、子供の数 n^* も小さくなる。これは子供一人当たりの養育費用が(2)式からわかるように、 ϕ と一人当たり資本水準 k によって決まるからである。

定理 3 資本の限界生産力が逡減する場合、成人の死亡率 μ の増加によって、定常均衡における出生数 n^* は増加する。

証明 3 補論 4 より $f''(k^*) \leq 0$ の時、 $n_\mu^* \geq 0$ が導かれることから明らか。

これは成人の死亡率が増加することで、家計は生存する確率が減ることから将来への備えになる貯蓄を減らし、結果、資本蓄積が進まなくなる。その結果、定常均衡における資本の限界生産力が増加し、子供の数が増える結果となる。このモデルからいえることは、人々が長生きできるようになると、少子化が進んでいくということを意味する。

他方、消費 c に関して確実にいえることは、以下のことである。

定理 4 時間選好率 ρ の増加により、定常均衡における消費水準 c^* は減少する。

証明 4 補論 4 より $c_\rho^* \geq 0$ が導かれることから明らか。

これは時間選好率 ρ が増加することで、人々の行動が近視眼的になり、資本蓄積が進まなくな

ることで、定常均衡における所得水準が減少するからといえる。しかしながら死亡率 μ の増加の場合は異なる結果となる。というのも目的関数に $e^{-(\rho+\mu)t}$ という形で、効用水準を割り引く効果が働くので、死亡率 μ が増加すると、時間選好率が増加したのと同じ効果が働く。その一方で、(2) 式からわかるように、Yaari 型の保険市場があることで、死亡率の増加によって家計の資本に対する収益率が増加する効果も働き、所得の増加の効果も考慮する必要が出てくるのである。そのため以下のようなことがいえる。

定理 5 一括税 τ と養育費用 ϕ の増加によって、消費や子供の数が上級財であることから、定常均衡における消費水準 c^* が増加する効果が働く一方、資本の限界生産力が逡減することで、減少する効果も働く。

証明 5 補論 4 を参照。

これは定常均衡における一括税 τ と養育費用 ϕ の資本水準を引き上げる効果によって資本水準が増加する効果 (k_τ^* , k_ϕ^*) が働く一方で、資本水準の増加が資本の限界生産力を引き下げ、それによって利子率の低下による利子収入の低下、すなわち $f'(k^*)$ の減少を引き起こすからである。同様のことは、成人の死亡率についてもいえる。

定理 6 成人の死亡率 μ の増加は、消費や子供の数が上級財であることから、定常均衡における消費水準 c^* が減少する効果が働く一方、資本の限界生産力が逡減することで、増加する効果も働く。

証明 6 補論 4 を参照。

つまり定常均衡における成人の死亡率 μ の資本水準を引き下げる効果によって資本水準が減少する効果 (k_τ^* , k_ϕ^*) が働く一方で、資本水準の減少が資本の限界生産力を引き上げ、それによって利子率の上昇による利子収入の増加、すなわち $f'(k^*)$ の増加を引き起こすからである。

4 結論

本論文では、比佐・比佐 (2023) の論文をもとに、Palivos-Blanchard-Yaari モデルを、より一般的効用関数形で議論することで、課税政策や死亡率と、経済成長と人口成長率との関係について論じた。そして Palivos-Blanchard-Yaari モデルで、家計の効用関数が消費財や子供に対して上級財の仮定を想定した場合、限界生産力が資本とともに低減するケースでは、以下のことがいえる。まず家計に還付を行わない一括税が、定常均衡における出生率を引き下げ、一人当たり資本水準を引き上げる。そしてこの効果は、子供の養育費用が増加した場合にも同じ効果が働く。また成人の死亡率が増加（すなわち成人の平均余命の減少）すると、出生率が増加する。これは家計の成人の生存確率の減少により、将来への備えになる貯蓄を減らすなど、近視眼的な行動を取るからである。そしてこのことが、定常均衡における資本の限界生産力が増加し、子供の数を増やす結果となるのである。この結果より、Palivos-Blanchard-Yaari モデルにおいては、成人の平均余命の変化は、出生率にも影響を与えるといえるであろう。ただしいずれの場合においても、限界生産力が一定となるケースで、出生率に影響を与えることはないといえる。

また消費水準に関しては、限界生産力の逡減の度合いに依存する結果となっている。これは比

佐・比佐 (2023) でも明らかになっている。すなわち一括税の引き上げや、成人の平均余命の増加によって資本蓄積が進んだ場合、限界生産力の逓減の度合いが小さければ、資本から得られる利子収入の減少の度合いが小さいので、消費水準が増加する。逆に限界生産力の逓減の度合いが大きければ、逆に、利子収入が減少するので、消費水準が減少する。

これらの結果は、比佐・比佐 (2023) で明らかになった結果とほぼ同じであり、効用関数を一般化したとしても、結論が大きく変わることはないことが確認された。

補論 1

(3) 式と (4) 式より、 $u_c = q$ 、 $u_n = q(\phi + k)$ となる。これらを全微分すると、

$$\begin{pmatrix} u_{cc} & u_{cn} \\ u_{nc} & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc \\ dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & \phi + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk \\ dq \end{pmatrix}$$

となる。そして $u_c = q$ 、 $u_n = q(\phi + k)$ であることを考慮すると、

$$\begin{pmatrix} dc \\ dn \end{pmatrix} = \Delta_u \begin{pmatrix} -u_{cn}u_c & u_{nn} - u_{cn}\frac{u_n}{u_c} \\ u_{cc}u_c & -u_{cn} + u_{cc}\frac{u_n}{u_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk \\ dq \end{pmatrix}$$

となる。また $\Delta_u = \frac{1}{u_{cc}u_{nn} - u_{cn}^2} > 0$ である。よって

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{dc}{dk} = -\Delta_u u_{cn} u_c, & c_q &= \frac{dc}{dq} = \Delta_u \left(u_{nn} - u_{cn} \frac{u_n}{u_c} \right) < 0, \\ n_k &= \frac{dn}{dk} = \Delta_u u_{cc} u_c < 0, & n_q &= \frac{dn}{dq} = \Delta_u \left(-u_{cn} + u_{cc} \frac{u_n}{u_c} \right) < 0 \end{aligned}$$

補論 2

定常均衡 ($\dot{k} = \dot{q} = 0$) において (13) 式の右辺を k で微分したものを J_{11}^* 、 q で微分したものを J_{12}^* とし、(14) 式の右辺を k で微分したものを J_{21}^* 、右辺を q で微分したものを J_{22}^* とする。すると定常均衡におけるヤコビ行列 (J^*) は、 $f'(k^*) = \rho + n^*$ より

$$\begin{aligned} J_{11}^* &= f'(k^*) + \mu - c_k^* - n_k^*(\phi + k^*) - n^* \\ &= \rho + n^* + \mu - c_k^* - n_k^*(\phi + k^*) - n^* \\ &= \rho + \mu - c_k^* - n_k^*(\phi + k^*) \\ J_{12}^* &= -c_q^* - n_q^*(\phi + k^*) > 0 \\ J_{21}^* &= q^* (n_k^* - f''(k^*)) \\ J_{22}^* &= \rho + n^* - f'(k^*) + n_q^* q^* \\ &= n_q^* q^* < 0 \end{aligned}$$

となる。 $f''(k^*) = d^2 f / dk^2 < 0$ である。ここで c_k^* 、 c_q^* 、 n_k^* 、 n_q^* はそれぞれ定常均衡におけ

る dc/dk 、 dc/dq 、 dn/dk 、 dn/dq であり、(7)-(10) 式から導出される。そしてヤコビ行列 J の $\text{Trace}(\text{Tr}(J))$ を求めると、

$$\text{Tr}(J) = J_{11} + J_{22} = \rho + \mu - c_k - n_k(\phi + k) + n_q q$$

となり、

$$\begin{aligned} -c_k - n_k(\phi + k) + n_q q &= -(-\Delta_u u_{cn} u_c) - \Delta_u u_{cc} u_c \frac{u_n}{u_c} + \Delta_u \left(-u_{cn} + u_{cc} \frac{u_n}{u_c} \right) u_c \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることから、この行列の Trace は、常に $J_{11} + J_{22} = \rho + \mu > 0$ となることがわかる。

次に定常均衡における J の行列式、 $\det(J^*) = J_{11}^* J_{22}^* - J_{12}^* J_{21}^*$ を求めると、

$$\begin{aligned} \det(J^*) &= (\rho + \mu - c_k^* - n_k^*(\phi + k^*)) n_q^* q^* - (-c_q^* - n_q^*(\phi + k^*)) q^* (n_k^* - f''(k^*)) \\ &= (\rho + \mu) n_q^* q^* + f''(k^*) q^* J_{12}^* + (c_q^* n_k^* - c_k^* n_q^*) q^* \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} c_q^* n_k^* - c_k^* n_q^* &= \Delta_u^* \left(u_{nn}^* - u_{cn}^* \frac{u_n^*}{u_c^*} \right) \Delta_u^* u_{cc}^* u_c^* - \left(-\Delta_u^* u_{cn}^* u_c^* \Delta_u^* \left(-u_{cn}^* + u_{cc}^* \frac{u_n^*}{u_c^*} \right) \right) \\ &= (\Delta_u^*)^2 (u_{cc}^* u_{nn}^* - (u_{cn}^*)^2) u_c^* \\ &= \Delta_u^* u_c^* \end{aligned}$$

となる。また $q^* = u_c^*$ より、

$$\det(J^*) = (\rho + \mu) n_q^* q^* + f''(k^*) q^* J_{12}^* + \Delta_u^* (u_c^*)^2$$

となり、 $n_q^* < 0$ から $(\rho + \mu) n_q^* q^* < 0$ 、 $f''(k^*) \leq 0$ 、 $J_{12}^* > 0$ であることから、 $f''(k^*) q^* J_{12}^* \leq 0$ 、 $\Delta_u^* u_c^* > 0$ であることから、時間選好率 ρ や死亡率 μ が十分に小さい、あるいは資本の限界生産力 $f''(k^*)$ の絶対値が十分に大きい、あるいは消費の限界効用 u_c^* が十分に小さい場合、行列式 $\det(J^*) = J_{11}^* J_{22}^* - J_{12}^* J_{21}^* < 0$ という条件を満たすといえる。

補論3

(13) 式と (14) 式を全微分することで、以下の式が導かれる。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk^* \\ dq^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -n^* & k^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tau \\ d\phi \\ d\mu \\ d\rho \end{pmatrix}$$

この式は展開することで以下のように書き換えることができる。

$$\begin{pmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk^* \\ dq^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n^* & -k^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tau \\ d\phi \\ d\mu \\ d\rho \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} dk^* \\ dq^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(J^*)} \begin{pmatrix} J_{22}^* & -J_{12}^* \\ -J_{21}^* & J_{11}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n^* & -k^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tau \\ d\phi \\ d\mu \\ d\rho \end{pmatrix}$$

となる。 $\det(J^*) = J_{11}^*J_{22}^* - J_{12}^*J_{21}^*$ である。これをさらに計算すると、

$$\begin{pmatrix} dk^* \\ dq^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(J^*)} \begin{pmatrix} J_{22}^* & n^*J_{22}^* & -k^*J_{22}^* & q^*J_{12}^* \\ -J_{21}^* & -n^*J_{21}^* & k^*J_{21}^* & -q^*J_{11}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tau \\ d\phi \\ d\mu \\ d\rho \end{pmatrix}$$

が導かれ、

$$\begin{aligned} k_\tau^* &= \frac{J_{22}^*}{\det(J^*)} > 0, & q_\tau^* &= -\frac{J_{21}^*}{\det(J^*)}, \\ k_\phi^* &= \frac{n^*J_{22}^*}{\det(J^*)} > 0, & q_\phi^* &= -\frac{n^*J_{21}^*}{\det(J^*)}, \\ k_\mu^* &= -\frac{k^*J_{22}^*}{\det(J^*)} < 0, & q_\mu^* &= \frac{k^*J_{21}^*}{\det(J^*)}, \\ k_\rho^* &= \frac{q^*J_{12}^*}{\det(J^*)} < 0, & q_\rho^* &= -\frac{q^*J_{11}^*}{\det(J^*)} > 0, \end{aligned}$$

となる。なお $k_\tau^* = dk^*/d\tau$ 、 $q_\tau^* = dq^*/d\tau$ 、 $k_\phi^* = dk^*/d\phi$ 、 $q_\phi^* = dq^*/d\phi$ 、 $k_\mu^* = dk^*/d\mu$ 、 $q_\mu^* = dq^*/d\mu$ 、 $k_\rho^* = dk^*/d\rho$ 、 $q_\rho^* = dq^*/d\rho$ である。

補論 4

補論 3 の結果と (7)-(10) 式から、 τ 、 ϕ 、 μ 、 ρ が、定常均衡における消費 c^* と子供の数 n^* に与える影響をみることができる。

最初に一括税 τ が c^* と n^* に与える影響をみていく。

$$c_\tau^* = k_\tau^*c_k^* + q_\tau^*c_q^* = \frac{n_q^*q^*}{\det(J^*)}c_k^* - \frac{n_k^* - f''(k^*)}{\det(J^*)}q^*c_q^*$$

となる。そして補論 3 の結果から、 $n_q^*c_k^* - n_k^*c_q^* = -\Delta_u^*u_c^*$ となることから、

$$c_\tau^* = -\frac{\Delta_u^*(u_c^*)^2}{\det(J^*)} + \frac{f''(k^*)}{\det(J^*)}q^*c_q^*$$

となる。なお第1項は $q^* = u_c^*$ より導かれる。そして $\det(J^*) < 0$ の時、 $\Delta_u^* > 0$ であることから、第1項 $-\frac{\Delta_u^*(u_c^*)^2}{\det(J^*)}$ はプラスとなり、第2項 $\frac{f''(k^*)}{\det(J^*)}q^*c_q^*$ は $f''(k^*) < 0$ 、 $c_q^* < 0$ よりマイナスとなることがわかる。よって一括税の増加が定常均衡の消費水準を増やすか否かは、資本の限界生産力の通減の度合いによって決まることになる。そして限界生産力が一定、すなわち $f''(k^*) = 0$ となる場合、一括税の増加は定常均衡の消費水準を増やすことができる。

次に一括税が定常均衡における出生数 n^* に与える影響をみていく。

$$n_\tau^* = k_\tau^*n_k^* + q_\tau^*n_q^* = \frac{n_q^*q^*}{\det(J^*)}n_k^* - \frac{n_k^* - f''(k^*)}{\det(J^*)}q^*n_q^*$$

となり、これを計算すると

$$n_\tau^* = \frac{f''(k^*)}{\det(J^*)}q^*n_q^*$$

となり、 $\det(J^*) < 0$ ならば、 $f''(k^*) \leq 0$ 、 $n_q^* < 0$ なので、 $n_\tau^* \leq 0$ となる。次に子供の養育費用 ϕ のケースについてみていく。先ほどと同様にして、消費に対する効果を計算すると次のようになる。

$$c_\phi^* = k_\phi^*c_k^* + q_\phi^*c_q^* = n^*\frac{n_q^*q^*}{\det(J^*)}c_k^* - n^*\frac{n_k^* - f''(k^*)}{\det(J^*)}q^*c_q^* = n^*c_\tau^*$$

これをみるとわかるように、子供の養育費用の増加の効果は、一括税が与える効果 c_τ^* に子供の数 n^* を掛け合わせたものに等しいことから、一括税と同じ効果が働いていることがわかる。このことは、同様に出生数に与える効果も求めることができる。

$$n_\phi^* = k_\phi^*n_k^* + q_\phi^*n_q^* = n^*\frac{n_q^*q^*}{\det(J^*)}n_k^* - n^*\frac{n_k^* - f''(k^*)}{\det(J^*)}q^*n_q^* = n^*n_\tau^*$$

これも消費の時と同様に、子供の数 n^* に一括税の効果 n_τ^* を掛け合わせたものと同じ構造になっている。死亡率 μ についてみると、

$$c_\mu^* = k_\mu^*c_k^* + q_\mu^*c_q^* = -k^*\frac{n_q^*q^*}{\det(J^*)}c_k^* - (-k^*)\frac{n_k^* - f''(k^*)}{\det(J^*)}q^*c_q^* = -k^*c_\tau^*$$

となり、一括税が与える効果 c_τ^* に資本水準をマイナスにした $-k^*$ を掛け合わせたものに等しくなっており、一括税と逆の結果をもたらすものになっている。また子供の数に対する効果をみると、

$$n_\mu^* = k_\mu^*n_k^* + q_\mu^*n_q^* = -k^*\frac{n_q^*q^*}{\det(J^*)}n_k^* - (-k^*)\frac{n_k^* - f''(k^*)}{\det(J^*)}q^*n_q^* = -k^*n_\tau^*$$

となり、やはり一括税と逆の結果をもたらすものになっている。

最後に時間選好率 ρ の効果をみてみる。まず消費についてみると

$$c_\rho^* = k_\rho^*c_k^* + q_\rho^*c_q^* = \frac{q^*J_{12}^*}{\det(J^*)}c_k^* - \frac{q^*J_{11}^*}{\det(J^*)}c_q^*$$

となり、

$$J_{12}^*c_k^* - J_{11}^*c_q^* = c_k^*(-c_q^* - n_q^*(\phi + k^*)) - (\rho + \mu - c_k^* - n_k^*(\phi + k^*))c_q^*$$

$$\begin{aligned}
&= -c_k^*c_q^* - c_k^*n_q^*(\phi + k^*) - (\rho + \mu)c_q^* + c_k^*c_q^* + n_k^*(\phi + k^*)c_q^* \\
&= (\phi + k^*)(n_k^*c_q^* - c_k^*n_q^*) - (\rho + \mu)c_q^*
\end{aligned}$$

となる。そして補論2より $n_k^*c_q^* - c_k^*n_q^* = \Delta_u^*u_c^*$ 、 $\phi + k^* = \frac{u_n^*}{u_c^*}$ となるので、

$$c_\rho^* = \frac{q^*}{\det(J^*)}(\phi + k^*)\Delta_u^*u_n^* - \frac{q^*}{\det(J^*)}(\rho + \mu)c_q^*$$

となり、 $\det(J^*) < 0$ の時、第1項は負、第2項は正となるので ($c_q^* < 0$)、 $c_\rho^* < 0$ となる。一方、 n^* についてみてみると、

$$n_\rho^* = k_\rho^*n_k^* + q_\rho^*n_q^* = \frac{q^*J_{12}^*}{\det(J^*)}n_k^* - \frac{q^*J_{11}^*}{\det(J^*)}n_q^*$$

となり、

$$\begin{aligned}
J_{12}^*n_k^* - J_{11}^*n_q^* &= n_k^*(-c_q^* - n_q^*(\phi + k^*)) - (\rho + \mu - c_k^* - n_k^*(\phi + k^*))n_q^* \\
&= -n_k^*c_q^* - n_k^*n_q^*(\phi + k^*) - (\rho + \mu)n_q^* + c_k^*n_q^* + n_k^*(\phi + k^*)n_q^* \\
&= (c_k^*n_q^* - n_k^*c_q^*) - (\rho + \mu)n_q^*
\end{aligned}$$

となり、 $n_k^*c_q^* - c_k^*n_q^* = \Delta_u^*u_c^*$ より

$$n_\rho^* = -\frac{q^*}{\det(J^*)}\Delta_u^*u_c^* - \frac{q^*}{\det(J^*)}(\rho + \mu)n_q^*$$

となる。そして $\det(J^*) < 0$ の時、第1項が負、第2項が正となることから、符号条件は一義的には決まらない。

●参考文献

-
- Barro, Robert J. and Sala-I-Martin, Xavier (1995) "Economic Growth" McGraw-Hill.
- Becker, Gary S. (1960) "An Economic Analysis of Fertility." in *Demographic and Economic Change in Developed Countries*, National Bureau of Economic Research, Inc., pp.209-240.
- Becker, Gary S., Murphy, Kevin M., and Tamura, Robert (1990) "Human Capital, Fertility and Economic Growth." *Journal of Political Economy*, Vol.98, No.5, pp.S12-S37.
- Benhabib, Jess, Bisin, Alberto, and Zhu, Shenghao (2016) "The Distribution of Wealth in The Blanchard-Yaari Model." *Macroeconomic Dynamics*, Vol.20, pp.466-481.
- Blackburn, Keith and Cipriani, Gian Pietro (2002) "A Model of Longevity, Fertility and Growth" *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.26, Issue2, pp.187-204.
- Blanchard, Oliver J.(1985) "Debt, Deficits, and Finite Horizons." *Journal of Political Economy*, Vol. 93, No. 2, pp.223-247.
- Blanchard, Oliver J., and Fischer, Stanley (1993) *Lecture on Macroeconomics*, Sixth Printing. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Chakraborty, Shankha (2004) "Endogenous Lifetime and Economic Growth." *Journal of Economic Theory*, Vol.116, pp.119-137.
- de la Croix, David and Licandro, Omar (1999) "Life Expectancy and Endogenous Growth." *Economic Letters* Vol.65, pp.255-263.
- Echevarria, Cruz A.(2003) "Life Expectancy, Retirement and Endogenous Growth." *Economic Modelling*, Vol.21, pp.147-174.

- Kunze, Lars (2014) “Life expectancy and economic growth.” *Journal of Macroeconomics*, Vol.39, pp.54-65.
- Malthus, Thomas R. (1798) *An Essay on the Principle of Population*. J. Johnson, London.
- Palivos, Theodore (1995) “Endogenous Fertility, Multiple Growth Path and Economic Convergence.” *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 19, pp.1498-1510.
- , and Scotese, C.(1996) “Fertility Growth and Financing Public Education and Health.” *Journal of Population Economics*, Vol. 9, pp.415-428.
- Rebelo, Sergio (1991) “Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth.” *Journal of Political Economy*, Vol. 99, No.3, pp.500-512.
- Yaari, Menahem E. (1965) “Uncertain Lifetime, life Insurance, and The Theory of The Consumer.” *Review of Economic Studies*, Vol.32, pp.137-150.
- 比佐 (小野) 章一 (2001) 「公共政策と人口成長・経済成長」『一橋論叢』第 125 卷、第 6 号、pp.125-137。
- 比佐章一・比佐優子 (2023) 「成人の死亡率が人口成長と経済成長、経済格差に与える影響」『経済貿易研究』神奈川大学経済貿易研究所、第 49 号、pp.61-78。