Singularity 以後の未来を見据えた算数・数学教育の設計
―理念創出に向けて―

根上　生也

1．はじめに

表題にある「Singularity」は日本国内では「技術的特異点」と呼ばれ，人工知能（AI）の知性が人間の知性を越える瞬間を意味している。レイ・カーツワイルがそれを提唱したときには，Singularityは2045年に起こると予想されていたが，近年，ChatGPTのような高性能な生成AIが登場して以来，Singularityの到来はかなり早まったのではないかと言われている。

それと同時に，教育におけるAI利用の危険性についても懸念されるようになった。それに対処するために，文部科学省は初等中等教育における生成AI利用のガイドライン[9]を示している。しかし，そうした懸念は，現在の学校教育の在り方と近年のAIの存在をどうすり合わせるかという発想のもとで生じているように思えてならない。今後もAIは進化を続け，AIが処理できるデータはより膨大なものとなり，見掛け上の「知性」はますます高度化していく。今後も，そういうAIの進化を後追いする形で，学校教育は変化を迫られていくのだろうか…。

そうした呪縛から解放されるためには，Singularity以後のずっと先の未来を見据えて，AIと共存する学校教育の在り方を検討すべきだろう。そこで，本稿では，著者の専門分野である算数・数学教育に限定して，ずっと先の未来の学校教育を設計するための理念創出を目指した議論を展開していく。

2．計算はアプリがする

現在でも，大半の大人たちはタブレットやスマートフォンを携帯し，様々なアプリを利用して生活している。GIGAスクール構想のもと，児童や生徒たちも気軽にPCやタブレットを使って学習を進められるような時代になってきている。

算数・数学について言えば，ウェブ上のアプリを使えば，具体的な数の計算どころか，文字を含んだ式の四則演算はもとより，因数分解や微分積分でさえ容易に行うことができる。自由に変域を変えて関数のグラフを表示させたり，幾何学的図形を作図して，設定した条件を保ったまま自由に変形したりすることもできる。そういうアプリが存在している今，算数・数学を紙と鉛筆の世界に閉じ込めていてよいのだろうか。

今後，そうした数学アプリは生成AIとリンクしてさらに進化していくだろう。そうい

うアプリが手軽に手に入る未来において，すべてを手計算で行うことを強要する算数・数学には，どれほどの意味があるだろうか。いっそのこと，そういうアプリを利用することを前提にした算数・数学教育を設計した方が国民に対して説得力があるのではないか。そこで，計算の習熟に莫大な時間を投資している現行の算数・数学と対峙するために，あえて「計算はアプリがする」というスローガンを用意した。

かつて算数教育において電卓を使うことの是非について議論になった時代があった。あくまで想像でしかないが，はたしてその時代の電卓反対派の方たちは，そのときと同じように，「計算にアプリを使ってよいことにしたら，子どもたちの計算力が低下してしまうではないか」と憤るのだろうか…。

アプリを使って計算することを許せば，計算力低下は当然のことだと思うが，子どもたちを手計算から解放して，「考えること」に力点を置いた教育を実現した方が，算数・数学教育の本来の目的に即しているように思える。計算の意味や原理を教えるとしても，子どもたちには手計算を強要しない。直面している問題を解決するためには，何を計算すればよいのか。それを判断できる知性を育成し，その計算自体はアプリを使ってすればよいとする。具体的な計算をアプリに委ねることで，子どもたちが関わることのできる数学の世界は格段に拡大するだろう。

残念ながら，現状では，数学において計算重視の指導が行われている中学校や高校が多い。一部の優秀な生徒を除き，多くの生徒たちは公式の意味も理解しないまま，機械的な計算によって問題解決する練習を強いられている。その結果，自分自身の発想で数学の問題と向き合おうとする態度を失っている（その悲しい状況については，長年の調査結果をもとに［8］で論じられている）。そのため，現状では，PCやタブレットで提示される問題の中に利用可能なアプリが用意されていても，それを活用することのできない高校生が多い。たとえば，ほとんどの高校生はアプリが提供する関数のグラフを利用して問題を解こうとしない。従来どおりに，何かを計算して答えを導こうとする（［2, 3］参照）。

とはいえ，現状に適合しないからといって，計算をアプリに委ねようとする算数・数学教育を否定するべきではない。なぜなら，この現状は，あくまでアプリを使おうとする態度が持った生徒が少ないというだけのことだからである。実際，［2, 3］の研究で開発した問題は，生徒がその態度を有していれば，簡単に解ける問題ばかりである。つまり，「計算はアプリがする」という態度を育成できれば，大半の生徒がそれらの問題で高得点を獲得することができるのである。

3．新たな教育理念

現在の中等教育における数学のカリキュラムは，1901年にジョン・ペリーが提唱した考えに準拠している。簡単に言うと，微積分を頂点とするピラミッドを想定して，その下に子どもたちが学ぶべき数学の内容を配置するという考え方である。微分積分学と物理学が連携することで大きな成功を収めた20世紀初頭においては，極めて説得力がある考え方であったが，はたして今日にも有効な考え方なのだろうか。

もちろん，理工系の大学に進学する一定数の高校生にとっては，微積分を頂点とするカリキュラムは極めて有効であろう。実際，彼らは，大学入学後，微積分学を駆使して展開

される自然科学や工学における専門の勉強をしていく。そのためには，微積分の計算に対してストレスを感じていては，そうした勉強をスムーズには行っていけない。となれば，入試の際にその能力の有無を問われることは当然である。しかし，その微積分を学ぶべき「一定数」とはどれほどなのか。

現在では，大学に進学する高校生は同世代の50％前後である。その半分が理系の大学に進学すると見積ると，微積分を頂点とするピラミッドを最後まで登り切る必要のある高校生は，全体の1/4程度ということになる。反対に，高校生全体の3/4以上がそのピラミッドを登っている途中で目的を失って離脱していく。それにもかかわらず，彼らはいわゆる受験数学もしくはその劣化版を修得することを強いられている。はたして，こうしたカリキュラムの構造は合理的だと言えるのだろうか。3/4の多数派が学ぶべき数学を本筋としてカリキュラムを構成し，残りの1/4が学ぶべき数学を特殊なものと位置付けるべきではないだろうか。

これと同じような指摘が国立教育政策研究所の報告書［1］の中で述べられている。理工系の生徒が歩むのと同じ道を歩ませるのではなく，別の頂点を目指すようなカリキュラムを作るべきではないか。そして，そのようなカリキュラムを作るためには，いわゆる離散数学の導入を検討すべきではないか。それに先んじて，著者も［4］の中で教育における離散数学の有用性を論じ，［5］や［6］などの書籍を通じてその啓蒙に努めてきた。

離散数学を利用した授業実践については後述するが，本稿で論じるべきことは「何」を教えるかではない。どのような力を育成するべきかである。AIによってさらに強化された数学アプリが存在する遠い未来に，子どもたちはどのような学習体験をするべきなのか。

一般的に，算数・数学教育では，直面する問題を数理的に表現し，計算や論理的な考察によってその問題を解決できるような力を育成しようとしている。このこと自体は普遍的なことであるが，本稿ではあえて次のような教育理念を提案したい。

様々なツールを活用し，自ら現象を発見して，数学的原理を探究する力を育成する。

本稿で再三述べているように，ずっと遠い未来では様々なツール（アプリ）が開発され，誰もがそれを手軽に使えるようになっている。そのような状況では，ツールを使うことを禁じるよりも，それを積極的に使える知性を育成するべきではないか。

子どもたちは，様々なツールを使って新しい事柄を発見していく。それはあくまで子どもの自分史の中で新しい事柄であればよい。すでに大人はいろいろなことを知っていて，それを教示するというスタンスをとらず，子どもたちがツールを使う過程で自ずと大人が教えたい事実を発見していく。さらに，ツールを活用して，その事実が成立する理由，数学的原理を探究していく。すべてがこのようなスタイルで指導できるかどうかは怪しいが，このような理念を軸にしてカリキュラムを構成することを提案する。

現在のAIが提供できる知識は，過去に作られた知識の集大成でしかない。いわば過去に属す知識の習得が学習だと捉えてしまうと，人間はAIにはかなわない。しかし，人間は新しい事柄を創造する力を秘めている。その力を育成・強化していくような算数・数学教育を実現したい。つまり，AIでは代替不可能な人間固有の能力を育てる教育を実現し，

未来に属する知識を生み出すことを志向する人々を社会に送り出したい。
その秘められた能力は，ツールを活用することで表面化する。その能力によって（自分史において）未知の事柄を発見する。それを単なる「発見」に留めず，その発見した事柄が成立する理由，数学的原理を探究する。その数学的原理を突き止めることは，誰もができることではないだろう。しかし，数学的原理を求める心を持つことは，誰にとっても重要だと考える。

４．探究活動の重要性

このような発想に至ったのは，数学者である著者が自身の研究活動を内省した結果だと言っても過言ではない。まず，新たな研究の着想を直観した段階では，頭の中にあるものは曖昧なイメージでしかない。それを具体的なイメージにするまでには，かなり長い時間を費やす。その具体的なイメージが獲得できてしまえば，予想される現象を数学の言葉で「定理」として表現することはそれほど難しいことではない。そこまで到達できれば，専門家としての知識と能力によって様々な思考を巡らし，その定理を証明するための「原理」を探究する。このようなプロセスを経て，先進的な研究成果を生み出していく…。
もちろん，このプロセスは専門家としての知識と能力がないと回らない。しかし，この思考のプロセスは，基本的には子どもの思考のプロセスと類似しているように思える。たとえば，子どもの思考の発達を次の３つの段階に分けて捉えてみるとよい。

- **直観的思考**　目の前にあるものを見て，直観的に「ほんとだ」と思う
- **操作的思考**　いろいろな操作や実験を行うことで，「確かにそうだ」と確信する
- **抽象的思考**　なぜそうなるのか（原理）を理解し，その意味と価値を知る

この思考段階を上の述べた数学者のあり様に重ねてみるとよい。
現行の算数・数学のカリキュラムもこの思考段階の発達に合わせて作られていると言われることが多い。実際，小学校低学年では，具体物とともに起こる目の前の現象を直観的に受け止めて算数を理解する。高学年になると「計算」という操作の結果として問題となっている現象の成否を理解できるようになる。そして，中学生になると，数式の計算や論証などの仕方を知り，抽象的にものごとを理解しようとする。しかし，この思考の発達段階は長い年月を経て進化していくように計画されているため，子ども自身がその進化の全貌を自覚することは難しいだろう。
一方，数学者の場合，長い年月を費やすこともあるが，基本的には，解決すべき問題の提起からその解決までのプロセスの全貌を自身で理解することができる。そして，さらに重要なことは。自分の成し遂げたことの意味と価値を理解した末に，それまで抽象的な理解に留まっていたものが，新たな直観に昇華し，次なる研究へと発展していく。つまり，直観的思考 → 操作的思考 → 抽象的思考という梯子を登り切って終わりなのではなく，再び直観的思考に戻る。もちろん，それは以前よりもレベルの高い直観を操る思考である。つまり，思考段階の発達はいわゆる上昇するスパイラルになっているのである。
これと同じように，子どもたちもこの上昇するスパイラルを体感できるような学びを計

画できるとよいと考える。しかし，学年を越えるような長い時間を必要としては，それを自覚することは難しいだろう。

そこで，重要になってくるのが，いわゆる「探究活動」である。問題の直観的理解から始まって，操作や実験によって現象を理解し，最終的にひとまとまりの理解に到達する。その理解に基づいて，当初の問題を振り返ることで，さらに探究すべき課題を発見する。もちろん，それぞれの段階を解決するために，様々な知識や技能が必要であると，個々の段階が重すぎて，期待するスパイラルがうまく回らないだろう。しかし，ずっと遠い未来では，AI搭載のアプリやツールを使うことが当たり前になっているので，それを使うことでスパイラルを回す際の負荷が軽減されているのである。

5．実践例

残念ながら，未来での出来事をここで再現することはできないので，それを模してある女子高校で実践した授業の内容を紹介する。その授業では，生徒のそれぞれがChromebookを持参しており，ウェブサイト「Nの数学プロジェクト」［10］に掲載されているオンラインのアプリを使用して探究活動を行う。そこに掲載されているアプリは，本研究の一環として，すべて著者自身がJavaScriptを用いてプログラミングしたものである。

①　完全グラフの無交差辺数　まず,「完全グラフの穴」,「ペテルセングラフの復元」にチャレンジして，グラフ理論におけるグラフとは何か，また頂点の位置を変えても同じグラフであると考えることを理解してもらう。次に「完全グラフの交差数，無交差辺数」にチャレンジする。

その初期画面では，５頂点の完全グラフ（図１左）が描かれており，その下部に交差する辺が５組，交差を含まない辺（無交差辺）が５本であることが示されている。そこで，頂点の１つをドラッグしてみると，図１右のように，交差数と無交差辺数の値が変化することを理解してもらい，「この無交差辺数の値を最小にしてみよう」と投げかける。

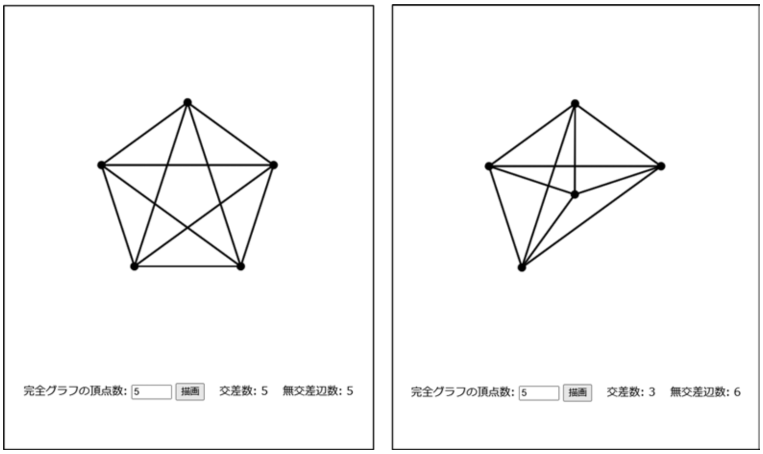


図1　完全グラフの無交差辺数

生徒たちは，しばらく実験を繰り返した末に，最初の正五角形になっているときに無交差辺数は最小になっていることに気づく。そこで，平面に配置された複数の点の集合に対する「凸包」という考え方を説明する。それはその点のすべてを含む最小の凸多角形領域のことである。それが何角形になっているかに注目すると，無交差辺数の最小値が決定できそうであることを確認する。その論証については簡単に触れて，ワークシートにある以下の表（表１）を頂点数が少ない方から順に埋めていくという探究を行う。そして，頂点数が７の場合だけその答えが６になり，その他の場合は５以下になることを確認する。

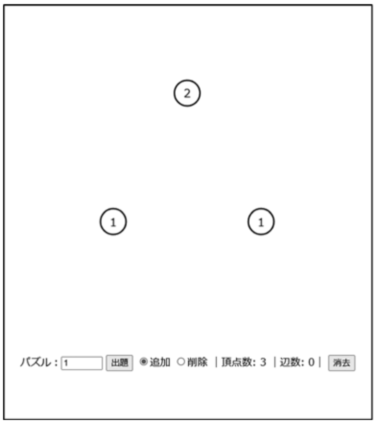
頂点数	3	4	5	6	7	8	9	10
無交差辺数	3	4	5	5	6	5	5	5

表1

その後，「完全二部グラフの交差数，無交差辺数」にチャレンジして，完全二部グラフと呼ばれるグラフの系列について，上と同様の活動を行う。その際はこちらから特段の助言はせず，生徒自身の探究の結果を集約して，最終的な答えを表に埋めていく。

最後に，今回の活動は通常学んでいる数学と関係ないように思えるかもしれないが，こういうアプリを作るためには，連立方程式の解の存在判定や場合の数などの考え方が重要であること，さらに私たち数学者はここで議論を止めずにとことん考え抜いて論文［11］にまとめるという活動をしていることなどを話し，数学を研究することのよさを示唆した。

②　次数列判定　まず「次数パズル」にチャレンジし，頂点の次数とは何かを理解してもらう。図２左はその初期画面である。○をクリックしてからドラッグすると，そこから線が伸びてきて，他の○とその線で結ぶことができる。○から出ている線の本数がそこに書かれている数と一致すると，○は黄色になり，すべての○が黄色くなれば，パズルの完成である。つまり，○にから出ている線の本数がその○（頂点）の次数である。



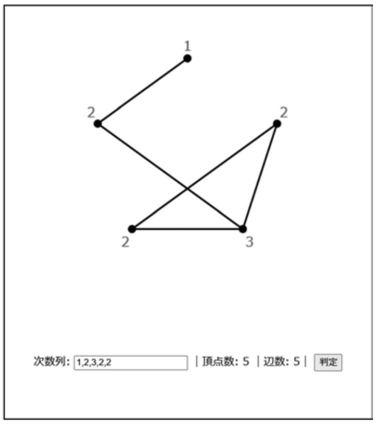


図2．次数列パズル，次数列判定

ひとしきりパズルを楽しんだところで，「次数列判定」（図２右）にチャレンジする。開始当初は図にあるようなグラフは現れていないが，［判定］をクリックすると，次数列の欄に入力した数値が頂点の次数となるグラフが現れる。次数列の欄に入力した数値がグラフの頂点の次数として実現できないときには，大きな✕が現れる。この機能を利用して，どのような数列がグラフの次数列となるのかどうかを探究する。

ワークシートには,「こうならば，次数列になる」「こうならば，次数列にならない」「次数列になるならば，こうなる」「次数列にならないならば，こうなる」という欄を設け，そこに実験してわかったことを記入してもらったが，最後の２つの欄に何かを記入する生徒はほとんどいなかった。実際，それらは最初の２つの対偶にあたるので，不要だったかもしれない。最初の２つについても，具体的な数値の列を記入する生徒が多く，「法則」を見抜いて記載する生徒はあまりいなかった。

最後に，いわゆる「握手補題」（頂点の次数の総和は辺数の２倍に等しい）を解説し，生徒たちが記入した数列や法則の正当性が握手補題から導かれることを理解してもらった。

このような実践を見て，はたして生徒は何を学んだのかと疑問に思う方もいるかもしれない。なぜなら，グラフ理論という現行の数学のカリキュラムの中にはない内容を扱っているからである。正確に言うと，平成25年から登場した新教科「数学活用」の教科書［7］の中では，グラフ理論をはじめとする離散数学が扱われている。しかし，それに触れた生徒はほとんどいないのが現状である。

しかし，ここで重要なことは，どのような項目を学んだかではない。生徒たちが学んだことは，探究的な活動をすることの「よさ」である。生徒たちは，既存の知識を理解することではなく，アプリを使った実験を通して，自ら知識を生み出すという経験をしてくれた。そして，どちらの実践でも，どの生徒もアプリを使って黙々と実験を続けていて，通常の数学の授業では見ることのできない光景を目の当たりにした。

特に，実践①は，すでに国内外のいろいろな場所で実践しているので，完成度の高いものになっているが，実践②は，生徒が次数列になる条件としてどのようなものを挙げるかを知るための予備調査として実施したものなので，完成形ではない。残念ながら，生徒たちのワークシートには具体的な数で実験した結果ばかりが書かれており，それを抽象的な命題にまとめ上げたものを記載する生徒は稀であった。この実践の完成度を高めるためには，生徒たちの実験結果を集約して，法則としてまとめ上げるという活動を追加する必要があるだろう。

また，残念なことではあるが，実践②において「握手補題」の解説をした後に，ワークシートに書いた内容を修正している生徒がいた。協働で行う探究活動に馴染めず，提出物には正解しか書いてはいけないという強迫観念にとらわれていたのかもしれない。

６．未来のアプリの要件

上述のいずれの実践も,「直観的思考」（アプリを使った問題の理解）→「操作的思考」（アプリによる実験）→「抽象的思考」（一般論の理解）という過程を経て，さらなる問題へ

と誘い，スパイラルを登っていくという展開になっており，大半の生徒たちは最後まで興味を持続できたようである。そして，最後には専門家の知見に触れ，さらなら高みを目指す余地があることを示唆した。もちろん生徒の全員ができるとは思わないが，数学の研究論文（通常，英語で書かれている）や専門書などを読むことにチャレンジし，生徒自身で計画した自由研究を展開してくれるとうれしい。

今回の実践とは異なるが，直観的な操作を用いて実験し，そこで起こる現象を見出し，最終的にその現象を理解する上で必要な数学的概念を定義するという流れも意味があるだろう。まず概念を定義し，それを用いて論理を展開していくことが数学であるかのように思っている方も少なくないだろうが，そのようなスタイルは出来上がった数学を理解するためのものでしかない。そういうスタイルで数学と向き合っていたのでは，過去に属す知識の集大成を生み出すことを得意とするAIにいずれは負けてしまう。

すでに述べたように，数学者が研究をする上で最も大切にしていることは，何をどう定義すればよいのかを見極めることである。その定義がうまくできれば，その後の論証はスムーズに展開できる。なので，そうした定義が得られる前の段階で，どれだけ自分の直観と向き合えるか。新しい研究を生み出すためには，それが必須である。

もちろん，一般的な児童や生徒たちが専門家レベルの数学を自ら生み出す必要はないが，アプリの助けを得て，直観と向き合う部分を強化することで，数学概念の定義の意味やその「よさ」を知り，その後の定着も図れるのではないだろうか。定義の意味もわからないまま，その先の事柄を学ばされていても，何をやっているのかわからなくて当然である。

このようなスタイルの学びを実現するためには，未来のアプリはどのような要件を満たすべきだろうか。詳細の検討については今後の研究に委ねるが，ここでは思いつくものを列挙しておく。

- 基本操作を実行するものであり，単に問題の解決を自動化するものではないこと
- 個別の問題に特化する仕組みを備えた汎用性のあるシステムであること
- 実験結果等を共有し，協働して問題解決ができる仕組みを有すること

一つ目は当然のことであるが，自動的に与えられた解決の結果を見て，新たな問題を設定して探究活動につなげられるのであれば，問題解決の自動化も意味がある。たとえば，実践②の「次数列判定」はそれに相当している。

二つ目。問題ごとに１つのアプリをプログラムして用意するとなると，授業者の負担が大きい。「GeoGebra」や「Cabri-Geometry」のような汎用アプリが存在し，授業者の意図に合わせて個別にファイルを作成することのできる仕組みがあるとよい。「Nの数学プロジェクト」［10］に掲載されているアプリは，個々の問題に対応するように作られているだけだが，いずれは汎用的なシステムとして提供できるように改造を図りたい。

今日，「個別最適な学び」と並んで「協働的な学び」の大切さも叫ばれている。三つ目はそれに対応するものである。上述の実践では，当初は個々の生徒が自分のペースで実験を繰り返していくが，その後に授業者が生徒たちの実験結果を集約して，１つの理解に導いていった。現在でも「ロイロノート」のように子どもたちの意見をまとめて比較できる

ようなアプリもあるが，数学的内容に対してもそれができる仕掛けがあるとよい。これはアプリの問題というよりも，学校が備えるべきコンピュータシステムの問題かもしれない。

7．まとめ

実は，実践①と実践②の最後には，生徒たちの感想などを問うアンケートを実施した。しかし，ここではあえてその結果を記さない。なぜなら，本稿で問題としたいことは，遠い未来の子どもたちの学びだからである。「計算はアプリがする」というスローガンのもとで，「様々なツールを活用し，自ら現象を発見して，数学的原理を探究する力を育成する」という算数・数学教育の是非である。ジョン・ペリーの提言以来，多少の出し入れはあるにせよ，従来の算数・数学の教科内容は基本的には固定されていた。その中で何をどう教えるかではなく，AIには生成することのできない未来に属す知識を生み出す知性を育成するためにはどうすべきかを議論したい。

本稿は，そうした議論の出発点となることを目的に執筆されている。したがって，未来の教育理念の完全形を提供しているわけではない。今後，多くの方たちと議論を交わし，理念をブラッシュアップして，その理念に沿った教材の開発に努めていきたい。現在の学校教育の在り方にとらわれずに，ずっと先の未来の教育を議論したい方たちの参画を期待しています。

●参考文献

1. 長尾篤志，景山三平，長崎栄三，『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』，国立教育政策研究所，2006年2月.
2. 西村圭一，安野史子，根上生也，祖慶良謙，高橋広明，伊藤伸也，伊藤仁一，浪川幸彦，高橋聡，高大接続におけるタブレット端末利用のCBTの開発:数学問題の可能性，日本科学教育学会年会論文集，第42巻 (2018)，pp.119－120.
3. 西村圭一，安野史子，根上生也，高橋聡，祖慶良謙，高橋広明，伊藤仁一，浪川幸彦，伊藤伸也，タブレット端末利用型CBTのための数学問題の開発－選抜試験への実装可能性の検討－，日本科学教育学会年会論文集，第44巻 (2020)，pp.123－126.
4. 根上生也，離散数学で変わる数学教育，『日本の算数・数学教育1998 算数・数学カリキュラムの改革へ』(日本数学教育学会編)，産業図書，pp.129－146，1999年3月17日.
5. 根上生也，中本敦浩，『基礎数学力トレーニング』，日本評論社，2003年10月25日.
6. 根上生也，『計算しない数学 —見えない“答え”が見えてくる』，青春出版社，2007年3月15日.
7. 根上生也編，桜井進，佐藤大器，清水克彦，妹尾活也，中本敦浩，『数学活用』，全128ページ，新興出版社啓林館，2012年3月16日検定済.
8. 根上生也，渡部禎郎，高校数学教育の負の影響，『神奈川大学　心理・教育研究論文集』第39巻 (2016)，pp.41－54.

9. 文部科学省，生成AIの利用について，(2023年7月5日）
https://www.mext.go.jp/a_menu/other/mext_02412.html
10. Ｎの数学プロジェクト（Seiya Neami），http://sites.google.com/view/ns-math
11. S.Negami and M.Shinohara, The minimum non-crossing edge numbers of graphs, preprint, 2023.

＊本研究はJSPS科研費 JP22K18619の助成を受けたものです。