

マルサスの罠におけるビッグ・プッシュと公衆衛生政策

比 佐 章 一*・比 佐 優 子†

1 序論

本論文では、公共政策が出生率や経済成長に与える影響について明らかにする。比佐（小野）(2001)では、公共政策としてマクロの生産性を向上させる社会資本整備を中心に議論をしたが、本論文では、成人の死亡率を減少させる公衆衛生の環境整備が、経済成長に与える影響についても考察する。

発展途上国では、高出生率による経済停滞を経験してきた。そのため、発展途上国では家族計画などの人口抑制政策が実施されてきた。中国の「一人っ子政策」はその代表的なものといえる。しかし多くの先進諸国は、そうした政策をとらずとも、高い経済成長と低出生率を実現した。そのため経済成長論では、経済成長と出生率の関係を議論することで、人口増加による貧困の罠がなぜ起こるのか、またどうすればそこから抜け出せるのかを考察してきた。

Becker et al. (1990) は、資本（特に人的資本）の収益率が不十分な状況で、人口増加による経済停滞（いわゆるマルサスの罠）が発生することを明らかにした。これは資本収益率が低い状況では、人々は子供に資本投資をしなくなるためである。そして子供への資本投資は、親にとっては子供を育てるための費用になるため、それが少なくなるほど、子供にかかる費用は小さくなり、結果、子供を多く持つという結果を導く。逆に、資本の収益率が高い状況では、子供に対する投資が増加するが、それにより子供に対する費用は増加し、子供の数を減らすという結果になるとしている。そして子供が所得に対して需要が増える上級財であったとしても、子供に対する投資が増加することで経済成長が起こるのであれば、低出生率が実現することを明らかにした。

また Palivos (1995) は、Becker et al. (1990) と同様の議論をしながら、高税率や社会資本の欠如、政治的不安定性など、政策要因から貧困の罠に陥る可能性があることを指摘した。そして政策の失敗がマルサスの罠を引き起こすことを議論とともに、マルサスの罠から抜け出せる政策についても明らかにした。

* 神奈川大学 経済学部 教授

† 帝京大学 経済学部 教授

他方、政府の社会資本投資による経済開発政策により、経済停滞から抜け出し経済発展を実現する「ビッグ・プッシュ」について考察した論文に、Murphy et al. (1989) がある。この論文は、政府が鉄道、電力、道路や空港などの社会資本整備を積極的に行うことで、経済停滞から永続的経済成長経路へと移行することが起こりえることを、理論的に示した。また Barro (1990) や Barro and Sala-I-Martin (1992) は、混雑現象が生じる公共財としての社会資本が経済成長に与える影響と、最適な課税政策について議論を行った。本論文では、Barro and Sala-I-Martin (1992) をもとに、マルサスの罠における社会資本による「ビッグ・プッシュ」と課税政策について議論する。

死亡率と経済成長の関係を理論的に分析した論文として、Blanchard (1985) がある。Blanchard (1985) は Yaari (1965) をもとに、成人が確率的に死亡するモデルを提示した。また出生が内生的に決まるモデルとしては、de la Croix and Licandro (1999), Echevarria (2003), Chakraborty (2004) や Kunze (2014) があり、これらの論文は、乳児死亡率の低下や平均余命の増加が投資を促し、経済成長を促すことを明らかにしている。なぜなら子供への人的資本投資が高いと、子供の養育費用が高くなり、出生率が減少するが、乳児死亡率の低下は子供への投資にとってプラスに働くことから、出生率を引き下げる効果を持つ。また Ozcan (2002) は、出生率を内生化して人口転換をモデル化し、経済水準が低い状況で、乳児死亡率の減少とともに出生率が低下することを明らかにしている。さらに Blackburn and Cipriani (2002) は、物的な資産が存在せず人的資本のみが存在するモデルをもとに、成人の平均余命の増加と出生率について議論している。

これらの論文は、乳幼児や成人の死亡率の減少が、経済成長にとってプラスになることを明らかにしている。本論文では、物的な資産が存在する場合における、出生率と死亡率および経済成長との関係を分析する。そして死亡率を減少させる政策、たとえば公衆衛生のような人々の福利厚生を改善する政策も、社会資本投資と同様、経済成長を促して出生率を減少させ、マルサスの罠から抜け出す可能性があることを明らかにする。

以下の議論において、第2節では Blanchard-Yaari モデルをもとに、成人の死亡率と出生率、そして経済成長の関係について議論するためのモデルを提示する。第3節では、定常均衡分析を行い、マルサスの罠が起こる条件などについて議論する。第4節では、社会資本投資や公衆衛生政策と経済成長の関係を論じ、ビッグ・プッシュの可能性について論じる。

2 モデル

以下では、成人の死亡を考慮した Blanchard (1985) 論文をもとに分析を行う。Blanchard (1985) は、成人が死亡する状況を考慮した経済成長モデルを提示しており、その中で Yaari (1965) による保険制度をモデルに組み込んでいる。そしてこの Blanchard-Yaari モデル¹ をもと

1 Benhabib et al. (2016) は、このモデルを Blanchard-Yaari モデルと呼んでおり、本論文でも同じようにこの名称を使う。

に、出生を内生化させたモデル分析を行う。なお保険制度をモデルに組み込むのは、代表的個人を用いた分析を行うためである。この制度を導入しないと、資産格差が発生し、代表的個人による分析ができなくなる（詳しくは比佐・比佐（2023）を参照）。またこれに合わせ、以下の分析では各主体の初期時点で保有する資産はすべて等しいと仮定する。さらに各主体が直面する資産収益率や死亡率は全て等しく、さらに選好パラメータも全て等しいと仮定する。これらの設定により代表的個人による分析が初めて可能となる。各経済主体は、以下の最適化問題を解くとする。

$$\max \int_0^{\infty} \frac{(c^\beta(t) + n^{(1-\beta)}(t))^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-(\rho+d)t} dt \quad (1)$$

$$\dot{a}(t) = (A + d)a(t) - c(t) - n(t)(f_c + a(t)) - T \quad (2)$$

$c(t)$, $n(t)$ はそれぞれ、 t 時点における一人当たりの消費水準および出生数（または出生率）である。そして各主体にとってこの2つの変数が制御変数となる。 ρ は時間選好率、 d は死亡率である。そして(1)式において、死亡率は時間選好率と同じ効果を持つ形となっている（詳しくは Blanchard (1985) を参照）。さらに瞬時効用関数 (Instantaneous Utility Function) は、Palivos and Yip (1993) や Palivos and Scotese (1996) とほぼ同様のものである。また β , σ はそれぞれ選好パラメータであり、以下では、 $0 < \beta < 1$, $\sigma > 1$ を仮定する。

次に(2)式についてみていく。 $a(t)$ は t 時点における一人当たり資産水準である。そして生産関数に Rebelo (1991) の AK モデルを導入する。そして各個人の資産は、物的資本のみならず人的資本も含んだものとする。また $A > \rho$ という条件を満たしているものとする。これは資本の限界生産力が時間選好率よりも高いという条件であり、経済的意味がある定常均衡の存在を保証するためである。なお以下の議論では、閉鎖経済を想定し、海外との資産の流出入はないものとする。よって一人当たり資本水準が $k(t)$ とすると、 $a(t) = k(t)$ となる。また \dot{a} は $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ を意味し、資本の変化を意味する。そして $a(t)$ ないし $k(t)$ が状態変数となる。

また $d \times a$ は、Yaari (1965) が提唱した保険制度より導かれる。Yaari (1965) や Blanchard (1985) は、各経済主体が保有する資産 1 単位に対し ϵ だけの給付をおこない、その期に死亡した場合、故人から資産 1 単位を没収する保険をモデルに取り入れている。そして保険会社は資産の運用はしないが、こうした状況で、保険市場が競争的で、保険会社の利潤が 0 となるならば、 $\epsilon = d$ としている。

f_c は子供を一人養育するのに必要な費用であり、 T は経済主体に課せられる一人当たりの一括税である。なお以下では、表記を簡略化するため、時間の関数であることを示す表記である (t) を省略する。以上のモデルから最適化条件を求めると、以下のようになる。

$$\beta c^{\beta(1-\sigma)-1} n^{(1-\beta)(1-\sigma)} = \lambda \quad (3)$$

$$(1 - \beta)c^{\beta(1-\sigma)}n^{(1-\beta)(1-\sigma)-1} = \lambda(k + f_c) \quad (4)$$

$$\dot{\lambda} = \lambda(\rho + n - A) \quad (5)$$

また収束条件は、以下のようになる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda k e^{-(\rho+d)t} = 0 \quad (6)$$

なお $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$ である。そして(3)式と(4)式から、 c 、 n をそれぞれ k と λ の関数にすると、次のようになる（なおこれらの式の導出については、補論1を参照）。

$$c = D_0 \lambda^{-\frac{1}{\sigma}} (f_c + k)^{-\frac{(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma}} \quad (7)$$

$$n = D_1 \lambda^{-\frac{1}{\sigma}} (f_c + k)^{-\frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma}} \quad (8)$$

そしてこれらの(7)式と(8)式を、(2)式と(5)式に代入すると、以下のようになる。

$$\dot{k} = (A + d)k - \frac{D_0}{\beta} \lambda^{-\frac{1}{\sigma}} (f_c + k)^{-\frac{(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma}} - T \quad (9)$$

$$\dot{\lambda} = \lambda \left(D_1 \lambda^{-\frac{1}{\sigma}} (f_c + k)^{-\frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma}} + \rho - A \right) \quad (10)$$

3 定常均衡分析

次に定常均衡条件を分析する。最初に $\dot{\lambda} = \dot{k} = 0$ のケース、すなわち経済成長が止まるケースをみていく。この時の k 、 λ の定常均衡の値をそれぞれ k^* 、 λ^* と表記すると、(9)式、(10)式より、

$$\left(\frac{D_0}{\beta((A+d)k^* - T)(f_c + k^*)^{\frac{(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma}}} \right)^{\sigma} = \left(\frac{D_1}{(A-\rho)(f_c + k^*)^{\frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma}}} \right)^{\sigma}$$

となり、これを解くと、

$$\begin{aligned} k^* &= \frac{(A-\rho)f_c + (1-\beta)T}{\rho - \beta A + (1-\beta)d} \\ n^* &= A - \rho \\ c^* &= \frac{\beta}{1-\beta} n^* (f_c + k^*) = \frac{\beta}{1-\beta} (A-\rho)(f_c + k^*) \end{aligned} \quad (11)$$

となる（詳しくは補論2参照）。これにより以下のことがいえる。

命題1：生産パラメータ A が増加すると、定常均衡における資本水準 k^* 、消費水準 c^* および出

生率 n^* は増加する。

証明) (11)式より, $\frac{\partial k^*}{\partial A} > 0$, $\frac{\partial n^*}{\partial A} > 0$ であることは明らか。また $\frac{\partial c^*}{\partial A} = \frac{\beta}{1-\beta}(f_c + k^*) + \frac{\beta}{1-\beta}(A - \rho) \frac{\partial k^*}{\partial A} > 0$ となる。

命題 2: 一括税 T が増加すると, 定常均衡における資本水準 k^* , 消費水準 c^* は増加する。

証明) (11)式より, $\frac{\partial k^*}{\partial T} > 0$ であり, さらに $\frac{\partial c^*}{\partial k^*} > 0$ であることから, $\frac{\partial c^*}{\partial T} > 0$ となる²。

命題 3: 死亡率 d が増加すると, 定常均衡における資本水準 k^* , 消費水準 c^* は減少する。

証明) (11)式より, $\frac{\partial k^*}{\partial d} < 0$ となることは明らか。また $\frac{\partial c^*}{\partial k^*} > 0$ であることから, $\frac{\partial c^*}{\partial d} = \frac{\partial c^*}{\partial k^*} \frac{\partial k^*}{\partial d} < 0$ となる。

命題 4: 定常均衡は鞍点均衡である。

証明) 補論 3 を参照。

(11)式より, 定常均衡 k^* , c^* が正の値を取るためには, $\rho - \beta A + (1 - \beta)d > 0$ を満たしている必要がある。つまり資本の限界生産力を意味する生産パラメータの値が, 時間選好率に比べ相対的に低いか, あるいは死亡率 d が十分に大きい場合, 定常均衡に収束して, 経済成長が止まる。また A が十分に増加するか, d が十分に減少すれば, 定常均衡状態から抜け出して, 経済成長を実現する。

次に経済が成長し続けるときの均斉成長経路を求めると, 次のようになる (導出過程は補論 4 を参照)。

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\beta A - \rho - (1 - \beta)d}{\sigma \beta} \\ n^* &= \frac{1 - \beta}{\sigma \beta} (\rho - \beta(1 - \sigma)A + (1 - \beta(1 - \sigma))d) \end{aligned} \tag{12}$$

θ は一人当たり資本の均斉成長率であり, 一人当たり消費水準の均斉成長率もこれに等しい。そして以下の命題が導かれる。

2 なおこの結果は, 成人の死亡を考慮しない比佐 (小野) (2001) 論文と同じ結論となっている。

命題5：生産パラメータ A が増加すると、一人当たり資本および消費の均斉成長率 θ は増加する。

命題6：死亡率 d が増加すると、一人当たり資本および消費の均斉成長率 θ は減少する。

証明) (12)式より, $\frac{\partial \theta}{\partial A} > 0$, $\frac{\partial \theta}{\partial d} < 0$ となることから明らか。

命題7：死亡率 d が増加すると、定常均衡の出生率 n^* は増加する。

証明) $\frac{\partial n^*}{\partial d} > 0$ より明らか。

乳児死亡率が増加すると、出生率が増加することは予想できるが、成人の死亡率は出生率には直接は関係がないように、直観的には思える。しかし実際は、出生率に影響を与えることがわかる。この理由は次のとおりである。成人の死亡率が上がると貯蓄をして、投資を行うインセンティブが薄れる。すると子供を生むことで生じる遺産額が小さくなり、子供を持つことの費用が低くなる。つまり(2)式から、子供を持つ総費用は $n(f_c + a)$ となるが、この $a (= k)$ の部分が小さくなるのである。

また生産パラメータ A を増加させ、死亡率 d を低下させることで、定常均衡が存在し経済成長が止まる状態から、持続的な経済成長へと移行することができるといえる。そしてこれを実現する政策としてどのようなものが考えられるかをみていく。

4 ビック・プッシュ政策

生産パラメータに対する政策として、Barro (1990) や Barro and Sala-I-Martin (1992) がある。この論文は、政府による公共財サービスを資本の限界生産力を増加させる形で、公共財の供給を定式化している。これらの論文は、混雑現象が起こるような社会資本への投資の場合、所得税を財源としたほうが社会的に好ましいことを指摘し、その分析を可能とするモデルを提示した。たとえば鉄道や道路の整備や、国防力、司法制度の整備などを念頭に置いた分析となっている。

しかし感染症対策や上下水道の整備などの、成人の死亡率を減少させるような公衆衛生などの政策には、生産パラメータに直接影響を与えないものもあるであろう。たとえば上下水道の整備は、資本の限界生産性を上昇させるというよりは、むしろ国民の福利厚生にとってプラスになると思われる。そして本論文のこれまでの議論から、国民の福利厚生の実現を目的とする政策が、成人の死亡率を減少させることで、経済成長にプラスになることがいえる。また公衆衛生政策もまた混雑現象が存在するであろう。以下では、こうした混雑現象が生じる場合の政策についてみていく。

具体的なモデルの設定は以下のようなものである。政府が均衡財政を実施すると考える。そして人的資本を含む、資本からの所得 $Ak = y_A$ に対して $\tau_A (0 < \tau_A < 1)$ の比例税を課し、 g_A の支出を、また保険収入 $dk = y_d$ に対して $\tau_d (0 < \tau_d < 1)$ の比例税を課し、 g_d の支出を行うとする。そして混雑現象が起こるため、 $A = A(g_A/y_A) = A(\tau_A)$ 、 $d = d(g_d/y_d) = d(\tau_d)$ となる仮定する³。そして A の一階微分の条件が正 ($A' > 0$)、二階微分条件が負 ($A'' < 0$)、 d の一階微分の条件が負 ($d' < 0$)、二階微分条件が負 ($d'' > 0$) とする。

すると $\rho - \beta(1 - \tau_A)A(\tau_A) + (1 - \beta)(1 - \tau_d)d(\tau_d) \geq 0$ の条件のときに、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 k^* &= \frac{((1 - \tau_A)A(\tau_A) - \rho)f_c + (1 - \beta)T}{\rho - \beta(1 - \tau_A)A(\tau_A) + (1 - \beta)(1 - \tau_d)d(\tau_d)} \\
 n^* &= (1 - \tau_A)A(\tau_A) - \rho \\
 c^* &= \frac{\beta}{1 - \beta}n^*(f_c + k^*) = \frac{\beta}{1 - \beta}((1 - \tau_A)A(\tau_A) - \rho)(f_c + k^*)
 \end{aligned} \tag{13}$$

またそれ以外のときは、次のように均斉成長経路をとる。

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{\beta(1 - \tau_A)A(\tau_A) - \rho - (1 - \beta)(1 - \tau_d)d(\tau_d)}{\sigma\beta} \\
 n^* &= \frac{1 - \beta}{\sigma\beta}(\rho - \beta(1 - \sigma)(1 - \tau_A)A(\tau_A) + (1 - \beta(1 - \sigma))(1 - \tau_d)d(\tau_d))
 \end{aligned} \tag{14}$$

すると(13)式や(14)式より、 $(1 - \tau_A)A(\tau_A)$ を最大に、また $(1 - \tau_d)d(\tau_d)$ を最小にする政策を行うことで、一人当たり消費ないしその成長率を引き上げることができる。これらの条件は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 -A(\tau_A) + (1 - \tau_A)A'(\tau_A) &= 0 \\
 -d(\tau_d) + (1 - \tau_d)d'(\tau_d) &= 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

つまり(15)式の条件を満たす τ_A 、 τ_d を求めればよい。この条件を満たす税率をそれぞれ τ_A^* 、 τ_d^* と表現すると、これらの最適な税率を実施することで、 $\rho - \beta(1 - \tau_A^*)A(\tau_A^*) + (1 - \beta)(1 - \tau_d^*)d(\tau_d^*) < 0$ という条件が実現できれば、最大の定常均衡水準ないし経済成長率を実現することができる。よって生産性を引き上げる経済開発だけでなく、死亡率を引き下げる公衆衛生政策も、経済成長に大きく貢献する可能性があることがわかる。

³ $d = d(g_d/y_d)$ ではなく、 $d = d(g_d/y)$ 、 $y = (A + d)k$ のほうがより正しい設定かもしれない。今回は議論を簡単化するために、 $d = d(g_d/y_d)$ とする。 $d = d(g_d/(y_A + y_d))$ とすると、 A の増加が y_A の部分を増加させ、 d が減少するであろう。つまり経済開発を重視して、道路や鉄道などの経済発展を促す社会資本整備に偏った政策を行うことで、人々の健康状態を悪化させて、死亡率を引き上げ、社会厚生を減少させる場合、このような設定が適切であろう。ただこの分析は複雑になることから、本論文ではこの分析は割愛させていただく。

Murphy et al. (1989) は、政府が鉄道・電力・道路及び空港などの社会資本整備を積極的に行うことで、経済停滞から持続的な経済成長を実現できることを理論的に示し、政府による「ビック・プッシュ」の可能性を論じているが、本論文のモデルにより、経済発展に直接結びつかないように思われる公衆衛生の改善も、政府による「ビック・プッシュ」に貢献する可能性を示したといえよう。

5 結論

本論文では、成人の死亡を考慮した Blanchard-Yaari モデルに、出生率が内生的に決定される要素を加えて、経済成長とマルサスの罫との関係を論じた。そして生産パラメータが不十分な経済においては、マルサスの罫が生じること、さらにそして成人の死亡率が高い場合も、マルサスの罫を引き起こすことを示した。これは死亡率が高いと、人々は貯蓄をするインセンティブが弱くなるが、それによって子供に残す遺産水準が低くなるので、子供一人当たりの費用が低くなり、出生率を増加させるからである。また比佐(小野)(2001)は、一括税がマルサスの罫における一人当たり資本水準を引き上げることを明らかにしているが、成人の死亡を考えた場合でも同じ結論が導かれることが明らかになった。

また Barro (1990) や Barro and Sala-I-Martin (1992) の、社会資本関係の公共財供給モデルから、政府による「ビック・プッシュ」の可能性を論じるとともに、成人の死亡率を引き下げる公衆衛生政策でも、経済成長に大きく貢献し、マルサスの罫から抜け出す「ビック・プッシュ」をもたらす可能性があることを示した。

6 参考文献

- Barro, R. (1990) "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, Vol.98, No.5, pt.2, pp. S103-S125.
- Barro, R., and Sala-I-Martin, X. (1992) "Public Finance in Models of Economic Growth", *The Review of Economic Studies*, Vol.59, Issue 4, pp.645-661.
- Becker, Gray S., Murphy, Kevin M., and Tamura, Robert (1990) "Human Capital, Fertility and Economic Growth", *Journal of Political Economy*, Vol.98, No.5, pp. S12-S37.
- Benhabib, Jess, Bisin, Alberto, and Zhu, Shenghao (2016) "The Distribution of Wealth in The Blanchard-Yaari Model", *Macroeconomic Dynamics*, Vol.20, Issue 2, pp.466-481.
- Blackburn, Keith, and Cipriani, Gian Pietro (2002) "A Model of Longevity, Fertility and Growth", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.26, Issue 2, pp.187-204.
- Blanchard, Oliver J. (1985) "Debt, Deficits, and Finite Horizons", *Journal of Political Economy*, Vol.93, No.2, pp.223-247.
- Chakraborty, Shankha (2014) "Endogenous Lifetime and Economic Growth", *Journal of Economic Theory*, Vol.116, Issue 1, pp.119-137.
- de la Croix, David, and Licandro, Omar (1999) "Life Expectancy and Endogenous Growth", *Economic Letters*, Vol.65, Issue 2, pp.255-263.
- Echevarria, Cruz A. (2003) "Life Expectancy, Retirement and Endogenous Growth", *Economic Modelling*, Vol.21, Issue 1, pp.147-174.

- Kunze, Lars (2014) "Life Expectancy and Economic Growth", *Journal of Macroeconomics*, Vol.39, Part A, pp.54-65.
- Murphy, Kevin, Shleifer, M. Andrei, and Vishny, Robert W. (1989) "Industrialization and the Big Push", *Journal of Political Economy*, Vol.97, No.5, pp.1003-1026.
- Ozcan, Sebnem Kalemli (2002) "Does the Mortality Decline Promote Economic Growth?", *Journal of Economic Growth*, Vol.7, pp.411-439.
- Palivos, Theodore (1995) "Endogenous Fertility, Multiple Growth Path and Economic Convergence", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.19, Issue 8, pp.1489-1510.
- , and Scotese, C. (1996) "Fertility Growth and Financing of Public Education and Health", *Journal of Population Economics*, Vol.9, pp.415-428.
- , and Yip, Chong K. (1993) "Optimal Population Size and Endogenous Growth", *Economic Letters*, Vol.41, Issue 1, pp.107-110.
- Rebelo, Sergio (1991) "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol.99, No.3, pp.500-512.
- Yaari, Menahem E. (1965) "Uncertain Lifetime, life Insurance, and The Theory of The Consumer", *The Review of Economic Studies*, Vol.32, No.2, pp.137-150.
- 比佐 (小野) 章一 (2001) 「公共政策と人口成長・経済成長」『一橋論叢』第 125 巻, 第 6 号, pp.125-137.
- 比佐章一・比佐優子 (2023) 「成人の死亡率が人口成長と経済成長, 経済格差に与える影響」『経済貿易研究』第 48 号, pp.61-78.

7 補論

7.1 補論 1

(1)式と(2)式より, ハミルトン方程式 H は次のようになる。

$$H = \frac{(c^\beta(t) + n^{(1-\beta)}(t))^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-(\rho+d)t} + \hat{\lambda}((A+d)a - c - n(f_c + a) - T)$$

H を c で微分した条件は, 次のようになる。

$$\beta c^{\beta(1-\sigma)-1} n^{(1-\beta)(1-\sigma)} e^{-(\rho+d)t} - \hat{\lambda} = 0$$

そして $\lambda = \hat{\lambda} e^{(\rho+d)t}$ とすると, (3)式が導かれる。同様にして, H を n で微分したときの条件は, 以下のようになり, (4)式が導かれる。

$$(1-\beta)c^{\beta(1-\sigma)} n^{(1-\beta)(1-\sigma)-1} e^{-(\rho+d)t} - \hat{\lambda}(k + f_c) = 0$$

また H を a で微分すると, 以下のようになる。

$$\dot{\hat{\lambda}} = -\hat{\lambda}(A + d - n)$$

$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{\hat{\lambda}}}{\hat{\lambda}} + \rho + d$ であることを考慮すると, (5)式が導出される。また収束条件は次のようになるので, (6)式が導かれる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\lambda} k = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda k e^{-(\rho+d)t} = 0$$

次に(3)式と(4)式の両辺を自然対数に変換すると、以下の式が導かれる。

$$\begin{pmatrix} \beta(1-\sigma)-1 & (1-\beta)(1-\sigma) \\ \beta(1-\sigma) & (1-\beta)(1-\sigma)-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln c \\ \ln n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) \\ \ln\left(\frac{\lambda(f_c+k)}{1-\beta}\right) \end{pmatrix}$$

これを展開すると、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \ln c \\ \ln n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} (1-\beta)(1-\sigma)-1 & -(1-\beta)(1-\sigma) \\ -\beta(1-\sigma) & \beta(1-\sigma)-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) \\ \ln\left(\frac{\lambda(f_c+k)}{1-\beta}\right) \end{pmatrix}$$

そして $\ln c$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \ln c = & \frac{1}{\sigma}(-\ln \lambda + (1 - (1 - \beta)(1 - \sigma)) \ln \beta \\ & - (1 - \beta)(1 - \sigma) \ln(f_c + k) + (1 - \beta)(1 - \sigma) \ln(1 - \beta)) \end{aligned}$$

よって(7)式が導かれる。なお $D_0 = \beta^{\frac{1-(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma}}(1-\beta)^{\frac{(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma}}$ である。

また同様にして、 $\ln n$ について解くと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \ln n = & \frac{1}{\sigma}(-\ln \lambda + \beta(1-\sigma) \ln \beta \\ & - (1 - \beta(1 - \sigma)) \ln(f_c + k) + (1 - \beta(1 - \sigma)) \ln(1 - \beta)) \end{aligned}$$

そしてこれを解くと(8)式が導かれる。なお $D_1 = \beta^{\frac{\beta(1-\sigma)}{\sigma}}(1-\beta)^{\frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma}}$ である。そして以上のことから、 $\frac{D_0}{D_1} = \frac{\beta}{1-\beta}$ となることがわかる。

7.2 補論2

$\dot{\lambda} = \dot{k} = 0$ の場合、(9)、(10)より、以下のようになる。

$$\left(\frac{D_0}{\beta((A+d)k^* - T)(f_c + k^*)^{\frac{(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma}}} \right)^\sigma = \left(\frac{D_1}{(A-\rho)(f_c + k^*)^{\frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma}}} \right)^\sigma$$

これを解くと、 $\frac{D_0}{D_1} = \frac{\beta}{1-\beta}$ より、次のようになる。

$$\frac{D_0}{\beta((A+d)k^* - T)(f_c + k^*)^{\frac{(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma}}} = \frac{1-\beta}{\beta} \frac{D_0}{(A-\rho)(f_c + k^*)^{\frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma}}}$$

そしてこれを解くと、以下のようになる。

$$k^* = \frac{(A-\rho)f_c + (1-\beta)T}{\rho - \beta A + (1-\beta)d}$$

また(5)式より、 $n^* = A - \rho$ となる。さらに(3)式と(4)より、 $c^* = \frac{\beta}{1-\beta} n^* (f_c + k^*) = \frac{\beta}{1-\beta} (A - \rho)(f_c + k^*)$ となる。

7.3 補論 3

(9)式と(10)式をそれぞれ、 k 、 λ で微分すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} &\equiv J_{11} = A + d + \frac{1 - \beta(1 - \sigma)}{\sigma\beta} D_0 \lambda^{-\frac{1}{\sigma}} (f_c + k)^{-\frac{(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma} - 1} \\ \frac{\partial \dot{k}}{\partial \lambda} &\equiv J_{12} = \frac{D_0}{\sigma\beta} \lambda^{-\frac{1}{\sigma} - 1} (f_c + k)^{-\frac{(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma}} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial k} &\equiv J_{21} = -\frac{1 - \beta(1 - \sigma)}{\sigma} D_1 \lambda^{1 - \frac{1}{\sigma}} (f_c + k)^{-\frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma} - 1} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} &\equiv J_{22} = D_1 \lambda^{-\frac{1}{\sigma}} (f_c + k)^{-\frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma}} + \rho - A - \frac{1}{\sigma} D_1 \lambda^{-\frac{1}{\sigma}} (f_c + k)^{-\frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma}}\end{aligned}$$

J_{ij} は行列 J の i 行 j 列の要素 ($i = 1, 2$), ($j = 1, 2$) となっており、 J は、 $J_{11} = \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}$, $J_{12} = \frac{\partial \dot{k}}{\partial \lambda}$, $J_{21} = \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial k}$, $J_{22} = \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda}$ の行列である。そして $\dot{k} = \dot{\lambda} = 0$ のときの k , λ の値を、 k^* , λ^* とすると、定常均衡条件は以下のようになる。

$$(A + d)k^* - T = \frac{1}{\beta} D_0 (\lambda^*)^{-\frac{1}{\sigma}} (f_c + k^*)^{-\frac{(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma}}$$

$$A - \rho = D_1 (\lambda^*)^{-\frac{1}{\sigma}} (f_c + k^*)^{-\frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma}}$$

これを解くと、 $(1 - \beta)((A + d)k^* - T) = (A - \rho)(f_c + k^*)$ となる ($D_0/D_1 = \beta/(1 - \beta)$ より)。よって定常均衡における $J_{11} \sim J_{22}$ の値 (以下、 $J_{11}^* \sim J_{22}^*$ と表記) は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}J_{11}^* &= A + d + \frac{1 - \beta(1 - \sigma)}{\sigma} \frac{(A + d)k^* - T}{f_c + k^*} \\ J_{12}^* &= \frac{(A + d)k^* - T}{\sigma\lambda^*} \\ J_{21}^* &= -\frac{1 - \beta(1 - \sigma)}{\sigma} \frac{A - \rho}{f_c + k^*} \lambda^* \\ J_{22}^* &= -\frac{1}{\sigma} (A - \rho)\end{aligned}$$

そして $(1 - \beta)((A + d)k^* - T) = (A - \rho)(f_c + k^*)$ より、 $J_{11}^* = A + d + \frac{1 - \beta(1 - \sigma)}{\sigma} \frac{A - \rho}{1 - \beta}$ となる。よって J^* の Trace, $Tr(J^*)$ は次のようになる。

$$Tr(J^*) = J_{11}^* + J_{22}^* = A + d + \frac{1 - \beta(1 - \sigma)}{\sigma} \frac{A - \rho}{1 - \beta} - \frac{A - \rho}{\sigma} = A + d + \frac{\beta}{1 - \beta} (A - \rho) > 0$$

さらにこの行列式 $\det(J^*)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\det(J^*) &= \left(A + d + \frac{1 - \beta(1 - \sigma)}{\sigma} \frac{(A + d)k^* - T}{f_c + k^*} \right) \left(-\frac{A - \rho}{\sigma} \right) \\ &\quad + \frac{1 - \beta(1 - \sigma)}{\sigma} \frac{A - \rho}{f_c + k^*} \lambda^* \frac{(A + d)k^* - T}{\sigma\lambda^*}\end{aligned}$$

これを解くと、 $\det(J^*) = -\frac{A-\rho}{\sigma}(A+d) < 0$ となることから、 $\text{Tr}(J^*) > 0$ かつ $\det(J^*) < 0$ となり、定常均衡解は鞍点均衡であることがわかる。

7.4 補論4

(3)式と(4)式より、 $c = \frac{\beta}{1-\beta}n(f_c + k)$ となる。よって(9)式と(10)式は次のようになる。

$$\frac{\dot{k}}{k+f} = \frac{k}{f_c+k}(A+d) - \frac{1}{1-\beta}n - \frac{T}{f_c+k}$$

$$n = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + A - \rho$$

持続的な経済成長が実現する場合、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\dot{k}}{f_c+k} = \theta$ 、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{f_c+k} = 1$ 、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T}{f_c+k} = 0$ となる。また(8)式より、定常均衡条件は次のようになる。

$$\frac{\dot{n}}{n} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \frac{1-\beta(1-\sigma)}{\sigma} \frac{\dot{k}}{f_c+k} = 0$$

これらの条件を考慮すると、均斉成長経路のもとの条件は以下のようになる。

$$\theta = A + d - \frac{1}{1-\beta}n^*$$

$$n^* = A - \rho - (1 - \beta(1 - \sigma))\theta$$

そしてこの連立方程式を解くと、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \theta \\ n^* \end{pmatrix} = -\frac{1-\beta}{\sigma\beta} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{1-\beta} \\ -(1-\beta(1-\sigma)) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+d \\ A-\rho \end{pmatrix}$$

よって $\theta = \frac{\beta A - \rho - (1-\beta)d}{\sigma\beta}$ 、 $n^* = \frac{1-\beta}{\sigma\beta}(\rho - \beta(1-\sigma)A + (1-\beta(1-\sigma))d)$ となる。