

ピタゴラスの定理から啓発されるものの見方考え方

高橋 眞映

概要：ペニスの商人に登場する悪徳金貸しが400年後に日本の総合商社としてその正体を表したように、ピタゴラスの定理も2500年以上経てベクトルの概念が登場すると共に「和と平方の可換性」を述べたものとしてその正体を表した。見えないものを観る名人の一人に金子みすゞがいる。ピカソがそのデッサン力に優れていたように、中高の数学の先生は生徒に計算力を身につけさせることが最も重要であるが、その合間に上のような見えないものを観る授業をされる事を勧める。

1. ピタゴラスの定理

大矢真一氏は彼の著書 [1] の第1章：数学の象徴としてのピタゴラスの定理の冒頭で「直角三角形の直角をはさむ2辺の上の正方形の和は斜辺の上の正方形に等しい」と言ういわゆるピタゴラスの定理は、初歩の幾何学の中で知り得ない最初の定理である。それゆえ、この定理を知っているということは、数学を知っていることと同じに見なされた。東西ともに、この定理は数学の象徴とされたのである」と述べている。ピタゴラスの定理の証明は数々あるが、次の証明はもっとも簡明な一つと思われる。

証明。直角三角形において、直角を挟む頂点から斜辺に垂線を下ろすと、2つの直角三角形ができるが、与えられた直角三角形と合わせて3つの直角三角形はみな相似である。従ってそれぞれの面積は斜辺の長さの平方に比例する。

ところが小さな2つの直角三角形の面積の和は与えられた直角三角形の面積に等しいので、定理が導かれる。

また [1] によれば、3つの辺が3, 4, 5の三角形は直角三角形であるという有名な3・4・5の原理は、エジプトは言うに及ばず、インドや中国でも古くから知られていたようである。また紀元前8世紀より古いインドの書物に5, 12, 13を使って直角三角形をつくる方法が書かれているそうである。ピタゴラスが紀元前580年頃生まれたと言う事を考え合わせると、どうも所謂ピタゴラスの定理は、証明はともかくとして彼の生誕以前から広く世界中に知られていたようである。それ故かどうかは分からないが、我が国では近頃ピタゴラスの定理を三平方の定理と呼ぶのが主流だそうである。大矢氏によれば、ピタゴラスのやった仕事は三平方の定理の論理的な証明をした事ではないかと言う事である。しかしそれも確かな証拠は無く、今我々が良く知っている証明は彼より250年後のユークリッドがやったものだそうである。

2. 可換性

数学の世界では A と B が可換であることを $AB = BA$ と書き、そうでないとき非可換と言う。例えば A を「靴下を履く事」、 B を「靴を履く事」とする。このとき AB は「靴を履いてから靴下を履く」となり、 BA は「靴下を履いてから靴を履く」となる。従ってこの場

合明らかに A と B は非可換である。

所で実数は分配律： $(a+b)c = ac+bc$ が成り立つ。これは幾何学的に言えば「長方形はそれを2つの長方形にわけても面積は変わらない」ということである。しかしこれは一面、実数の和と積は可換である事を述べている。分配律は我々の生活でも気付かないで使っている事が多い。例えば同級会の会費が一人5千円で、12人が来る予定のとき、幹事さんはその合計を出すのに、5千円を12回足す事はしない。多分かけ算をして6万円と立ち所に出してしまうであろう。

また連続関数と言う概念は数学では重要であるが、これは直感的には言葉通り連続曲線を表す関数である。しかしながら数学的には

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right)$$

であるから、これは「極限と関数が可換である」事を述べている。他にも極限と微分の可換性定理や、極限と積分の可換性定理など重要で且つ便利な定理は多い。

3. ピタゴラスの定理と可換性

前節で見たように数学の世界では可換性を持つ定義や定理は重要で且つ応用力を持つ。また1節ではピタゴラスの定理は数学の象徴とされその有用性を述べた。それではピタゴラスの定理を可換の目から見る事が出来ないかと考えるのは自然であろう。しかしピタゴラスの定理を発見した当時の人々は実体は分らないにしても何かを感じて苦しんだ事は想像出来る。多分その実体が明らかにされたのは2500年以上経ってからの事であろう。それは19世紀後半に確立されたと言われるベクトルの概念が登場してからだろうと思われる。この概念を使うと、ピタゴラスの定理は「和と平方の可換性」を述べた定理であると一言で言える。但しここでの和は、ベクトル和と実数和を総称している。また平方とは正しくはベクトルの長さの平方の事である。

これは丁度、ベニスの商人を書いたシェイクスピアが何かを感じながらその「悪徳金貸し」の正体を見破れなかったように。木下順二氏によれば、その400年後に極東の国日本で、当時の日本をリードした「総合商社」としてその実体を見る事になったそうである。

関数と言う立場からピタゴラスの定理を意識すれば、それは「平方関数と和の可換性」を述べている。実際与えられた直角三角形の対辺を表すベクトルを x, y とすると、斜辺を表すベクトルは $x+y$ となる。次にベクトルの長さの平方を表す関数を $f(x) = |x|^2$ とする。このときピタゴラスの定理は

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

であることを主張している。これは「平方関数は和を保存する」とも言い換える事が出来る。また別の言い方をすれば「和と平方関数は両立する」とも言える。実は後世このような関数は加法的 (additive) と呼ばれ、数学の発展上欠かせない概念となる。僕はこのような可換、保存、両立、他に不変、同時などを総称して「愛」と呼んでいる。それ故「数学は愛である」と述べられる。もしかしたら、ピタゴラスの定理を発見した人々はここまで感じたのかも知れない。

所で「大切な事は何が存在するかでなく、何を感じるかである」とはバランスセラピー大学で発行している「私の好きなバランスセラピー学の言葉」の中の2日目に述べられた言葉であるが、数学の世界でも肝に銘ずべき言葉であろう。以前僕が勤めていた大学で畏友羽鳥理氏を招いて学術講演会を開いたとき、彼は「何に着目するか、何を意識出来るかで次の世界が全く違ったものになる。時速200kmのボールを投げるゴリラはいない。それはゴリラにその意識がないからだ」とおっしゃっていました ([2], 12節：最後にそして最後に参照)。また本橋洋一氏はあるとき日本数学会で次のような事を話されました：「観る (observation) は学問の根

幹であり、論証に至らずとも誰その observation として論文等に良く引用されます。思うにお釈迦様はよく目覚めたお方でありました。故に論証せずともすべてを観ることがお出来になったのです」([2], 4 節: 見ると観るについて参照)。

4. 可換の目から見た数学の指導法

僕が神奈川大学で担当している教科教育法IV (数学) の授業でピタゴラスの定理の可換性を話したとき、受講生は驚いていた。それで自然数の世界ではピタゴラスの定理が成り立つかと言う問題を出した。答えは否であった。これは直ぐ分る事であるが、 $(2+3)^2=2^2+3^2$ は成り立たない。実際 $25 \neq 13$ だからである。しかしよく観ると $25=13$ が成り立つのである。これは存在だけを見れば確かに $25 \neq 13$ であるが、何を感じるか、何を意識するかによって、 $25=13$ が観えて来るのである。それは例えば囲碁の対局で先番を決めるとき、Aが碁笥から白石を握る。次にBが碁笥から黒石1個あるいは2個取り出し碁盤の上にそっとおく。Aが握った白石を碁盤の上に開いて数えやすいように並べる。もし盤上に黒石1個、白石15個あれば「あたり」と称してBが先番となる。もし盤上に黒石2個、白石15個あれば「はずれ」と称してAが先番となる。前者の場合 $15=1$ と言っているのである。これが mod. 2 の世界である。因に mod. 3 の世界でもピタゴラス型定理は成り立つが、mod. 4 の世界では既に成り立たない。実際、

$$(3+1)^4 = 4^4 = 0 \pmod{4} \text{ and } 3^4 + 1^4 = 82 = 2 \pmod{4}$$

が成り立つからである。一般に mod. 素数の世界では常にピタゴラス型定理は成り立つ。つまりすべての自然数 a, b 及び素数 p に対して、 $(a+b)^p = a^p + b^p \pmod{p}$ が成り立つ。これは「 $1 \leq k \leq p-1 \Leftrightarrow {}_p C_k$ は p の倍数」である事に由来する。この授業の後、受講生に「講義に

対する所感」をレポート形式にして提出させた。目から鱗的なレポートが多かった中で、驚いた事に一人の受講生は前節で述べた「平方関数の加法性」に言及していた。

見えないものを観るあるいは感じる名人の一人に金子みすゞがいる。彼女の「大漁」を始め幾つかの詩を読むと、その感性の豊かさにびっくりする。中高の数学の先生は授業の合間にこのような話を勧める。しかしピカソがそのデッサン力に優れていたように、中高の生徒はあくまでも計算力が先ず重要であろう。しかしながら一見可換性に縁のなさそうな数学的事実も可換の目から観る事が出来るかどうか考察する事も大事である。それ故見えないものを観る目を育てたいものである。最後に金子みすゞの「星とタンポポ」の一節を述べて締めくくる。

青いお空の底ふかく、
海の小石のそのやうに、
夜がくるまで沈んでる、
昼のお星は眼にみえぬ。
見えぬけれどもあるんだよ、
見えぬものでもあるんだよ。

謝辞：この論文を書くに当たり、暖かい励ましのお言葉を賜った神奈川大学教授古屋喜美代先生にこの場を借りて感謝の意を表します。またこの論文に目を通して頂き貴重なご意見を賜った北海道大学名誉教授井上純治先生に感謝申し上げます。

References

- [1] 大矢真一, ピタゴラスの定理, 東海大学出版会, 2001年
- [2] 高橋眞映, 美人考, 国際科学協会会報, 70 (2010), pp. 2-15