

複素数平面の指導

— 指数関数と三角関数を結ぶ —

高橋 秀雄

複素数平面に関する高等学校の指導要領は改訂ごとに出たり引っ込んだりしている。つまり、必要とされたり、されなかったりの浮き沈みの激しい内容である。大阪府教育センターでまとめた資料がホームページで公開されているのでそれを利用してもらうと、以下のようなのである。

1955（昭和30）年告示では、「応用数学」のみに取り上げられていた。次の、1960（昭和35）年告示では、「応用数学」と「数学ⅡB」の双方に取り上げられていた。次の1970（昭和45）年から1978（昭和53）年告示では、全く取り上げられていない。約20年間取り上げられなかった。そしてようやく、1989（平成元）年告示になって「数学B」で取り上げられた。しかし、1999（平成11）年の現行指導要領では、またなくなってしまった。そしてまた新指導要領に導入された。

確かに、考えようによっては、難しい内容なのかもしれない。高校と大学の双方に渡る内容とも言える。大学では「複素変数関数論」に繋がる。しかしながら、その初歩的な内容は難しいとは言えない。むしろ、複素数というものを理解するのに有効な内容である。そして、応用範囲の広いことを気付かせてくれる。以下は実際に教科教育法の授業で実践したものであるが、ここでは、高校にも、導入が可能なものとして、複素数が極めて現実的な数であることを示すために、その初歩的な展開を示すことにする。

現在の指導要領では「平均値の定理」につい

て触れる場合には、直観的に理解させる程度にとどめるものとする。となっているが、一応高校段階までに平均値の定理まではやっていることになる。その後が続くのがテイラーの定理であるが、ここからは大学の範疇となっている。この辺りから始めることになる。

平均値の定理は、 $y = f(x)$ という曲線の接線が必ず引けるということを表しているのと同じことである。むろん、 $[a, b]$ という範囲で連続、 (a, b) で微分可能という条件がある。

$$\text{式は、 } f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$$

これは、 b を x で置き換えた式である。見方によれば、曲線を一次式で近似しているとも言える。さらに、2次式で近似するとなれば、これをさらに微分して、第二次導関数を使って

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(c)$$

という式が得られる。

これをさらに続けていけば、だんだん曲線に近い式が得られていくことになる。そこで、

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$$

+... とおいて係数の a_n を求めてみる。

まず、 $f(a) = a_0$ はすぐ出る。次に微分してみると、

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots$$

これより、 $f'(a) = a_1$ が出る。

さらに微分すると、

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + \dots$$

これより、 $a_2 = \frac{f'(a)}{2}$ が導かれる。

同様に、 $a_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$ も出る。

であるから、 n 回微分すれば、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ となるわけで、つまり係数の } a_n \text{ は、}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

このようになっていたのである。

ここで、この $a = 0$ と置けば、

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

これは、マクローリン展開という式であるが、これが、いろいろな関数の近似式というか整関数で表示するのに使われるのである。

まず、自然対数の底である $e = 2.71828 \dots$ について調べてみる。

$f(x) = e^x$ となるわけであるが、これは、何回微分しても元の形のままであるから最も簡単な形と言える。

つまり、

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

ということである。そして、 $e^0 = 1$ であるから、分子はすべて 1 となる。従って

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

となるわけで、これが最も簡単な整関数表示である。対数関数や三角関数などの超越関数をこのような整関数で表示すれば、取り扱いが簡単になるわけである。そして近似式にも使えるわけである。

次に三角関数に適用してみる。

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

であるから互いに入れ替わって繰り返している。

まず、 $f(x) = \sin x$ について整関数表示を考えよう

$f'(x) = \cos x$ $f''(x) = -\sin x$ $f^{(3)}(x) = -\cos x$ と続いて、 $\sin 0 = 0$ $\cos 0 = 1$ であるから、先の式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

で分子は、0 か 1 である。順番から、偶数乗の項は、0 となり、奇数乗の項の分子は 1 である。ただし、三乗の項から負の記号が一つおきに表れるので、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

同様に $\cos x$ について考えると

こんどは、奇数乗の項が 0 となり、偶数乗の項の分子が 1 となり、二乗の項から一つおきに負の記号が表れる。詳しく示すと以下のようなものである。

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x,$$

$$f^{(3)}(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x, \quad f^{(5)}(x) = -\sin x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

以上で e^x $\sin x$ $\cos x$ の整関数表示ができた。これを使って次にはこの三つの関係を調べてみる。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (i = \sqrt{-1}) \text{ という}$$

オイラーの公式を導いてみる。

この式より $x = \pi$ と置いてみると

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi \text{ となり、}$$

右辺は -1 となって

つまりは $e^{i\pi} = -1$ ということになる。

e , i , π , -1 の四つの値がこのよう一つの式でなりたつわけで、しかもオイラーの公式は、指数関数と三角関数の関係式であり、それを結び付けているのが虚数の i というわけである。一見すると関係のない指数関数と三角関数が実は大いに関係があったということになる。

さて、どうしてこのような式が成り立つのかと言うと、先ほどのマクローリン展開の式を使って表してみる。オイラーの公式の左辺は、

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(ix)^n + \cdots$$

と表される。

次に、右辺の $\cos x$ と $i \sin x$ を表してみる。

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \quad \text{であり、}$$

$$i \sin x = ix - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{5!}ix^5 - \cdots \quad \text{となり、}$$

この両者を加えたのが右辺となる。

ところで、 $ix = (ix)^1$ 、 $-x^2 = (ix)^2$ 、 $-ix^3 = (ix)^3$ 、 $x^4 = (ix)^4$ 、 $ix^5 = (ix)^5$ などとなるから、右辺は

$$\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= 1 + (ix)^1 + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \cdots \end{aligned}$$

のようになる。これは、左辺の e^{ix} の展開式そのものである。従って、

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つことが分かる。

このオイラーの公式を使うと、三角関数の加法定理も次のように導かれる。

$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ であるから、このことを利用して、まず左辺は、

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y) \quad \text{と表され}$$

右辺は、 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ であり、

これと $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ を掛けると

$$\begin{aligned} e^{ix} \cdot e^{iy} &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ &\quad + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}$$

となるから、

実部と虚部をそれぞれ比較すれば、

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

が得られる。 $x+y$ の部分が $x-y$ となる場合も同様である。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad ,$$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

を加えたり、引いたりすると

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

が導かれる。これは正に、三角関数を指数関数で表したということを示している。これを使えば、三角関数の積を和に直す公式などが、指数関数の計算で示すことが出来ることになる。

$$(e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n \quad ,$$

$$(e^{ix})^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \quad \text{であるから}$$

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \quad \text{という}$$

ド・モアブルの定理も簡単に示せる。

付言

この内容は、ほとんどの大学1年で微分積分学の授業で学ぶものであり何ら目新しいものではない。ただその扱いが大学での教科書では数行であったり、授業時間も1時間にもならなかったりと軽く過ぎ去ってしまうようなケースが多いと思われる。学生にはほとんど印象に残らないであろうと思われる。

オイラーの公式の導き方は、他にもありド・モアブルの定理に指数の定義を合わせると、その極限值として得られる。オイラーは、この方法で発見したと言われている。

現在の学習指導要領には複素数平面の扱いはないが、また再び次の学習指導要領では扱うことになった。今度は数学IIIで扱うことになったが、相変わらずド・モアブルの定理までである。

しかも数学Ⅲは2014年から使用されるので
当分実践報告は出てこない。

複素数は二次方程式を扱う数学Ⅱで出てくる
が、その時には複素数というより虚数というこ
とに重点が置かれている。複素数平面が登場し
て始めて複素数の存在が認識されるようになる。
それまでは文字通り嘘の数という捉え方に留まっ
てしまう。