二等辺三角形の底角は等しい

沖山　義光

1. はじめに

分数のできない大学生などといわれ最近数学の学力不足がいわれて久しい。学力不足は複合的な要因といってしまえばそれまでだがいつも考えてしまう課題である。今年度数学科の指導法の研究の教材として小林昭七カリフォルニア大学教授の「ユークリッド幾何から現代幾何へ」を使用した。この本を読み進めて行く中で新たにユークリッド原論を見直すことができ次のような考えに至った。

平面図形を中学・高校の数学で教える意義はどんなことにあるのだろうか。もともと図形は古代エジプト時代から川の氾濫などにより土地の測量などのために発達してきたと言われている。つまりは生活のための実用が発祥であろう。しかし紀元前300年頃ユークリッド（Euclid 330-275　B.C.頃）は図形の性質をいくつかの定義，公理（公準）から演繹的に命題（定理）を証明していくというそれまでにない発想で研究して「ユークリッド原論」を著した。それまで数や図形は生活のための実用的な意義しかなかったものをこのような発想で構成していくことによって数学の体系をつくるということはこれ以後「数学」という学問の発展につながり基本的には現代数学にも脈々と受け継がれている。「ユークリッド原論」はその後世界中に広まり聖書に次ぐ世界的なベストセラーになり世界中の国々の学校数学で教えられている。ユークリッド原論では５個の公準から多くの命題（定理）を証明しているが初めの方の命題は公準１から４だけが使われていて後の方で公準５は使われる。このことに疑問をもった数学者は公準１から４を用いて公準５を証明できないかと考えさまざまな試みがなされる。公準５はいわゆる平行線の公準というものでこれを除いて公準１から４からなる絶対幾何学をGirolamo Saccheri (1667-1733伊) Adrien Marie Legendre (1752-1833仏) などが研究したが結局公準５を導くことはできなかった。その他多くの数学者が試みるが結局公準５と同値な命題を含めたり論理的な誤りなどがくり返される。そしてNicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856露) が1829年に，またGauss (1792-1813) は1813年頃から，またJános (Johann) Bolyaiは1823年頃に平行線の公準を否定しても矛盾のない幾何が成立することに気がつき非ユークリッド幾何の発見がされる。その後Beltrami，Poincaréおよび Kleinによる双曲幾何のモデルによりその意味が分かるようになる。さらにRiemannはGaussを受け継いで微分を用いて一般化したRiemann 幾何を確立する。このようにユークリッド原論は現代数学に深く貢献し関わりを持つものであり，公理的な意味で現代数学の見地からは不完全であることは確かであるがそれをある程度意識しながら作図による公理の不備を補いつつ学校数学でもできるだけ取り入れていくことが正しいことではないだろうか。ユークリッド原論の公理的論的な不備に関してはDavid Hilbert (1862-1943) が「数学基礎論」

においてその完全性を追究している。このようにして現代数学の発展につながっている。

学校数学で図形を計量計算（長さや面積などを求める）に重きをおくことは遙か古代の数学を学ぶこととおなじでありこれも大事なことではあるが数学の論理の厳密性を学ばなければ面白みもない。今の数学教育は実用に偏重しているきらいがある。役に立たないと意味はないといった傾向があるがこれは反省するべき事ではないだろうか。数学は論理を追究しその正しさを議論していくものでその後にできた体系が自然界に適応したり社会に役立つ結果になっているというのが正しい。もちろん現実と論理は車の両輪であり自然現象から数学のヒントを得たり発想を推し進めることも大切ではある。

学校数学では数学という学問の姿勢や考え方をできるだけ取り入れて真の数学の姿を見ていく経験が大事であると思う。それは人間が単に動物として生きていくのではなく多くの真実を知りそこに人としての生き甲斐を見つけることになるからである。証明は難しいからとか七面倒くさいからといって数学から証明を取り除いたら何にもなくなるのでは無いだろうか。生徒は嫌いだというから論理や証明を除けば益々嫌いになるのではないだろうか。生徒は計算や試験は出来なくても本質を見抜いているものだという意識をもって教育に当たるべきである。

このような考えからユークリッド原論をあらためて見直してみたい。しかし平面幾何をすべて調べるのはあまりにも膨大なのでここでは1つの命題「二等辺三角形の底角は等しい」についての証明は数学教育（中学・高校）でどのように扱われているか調べてみることにした。

2．教科書での扱い

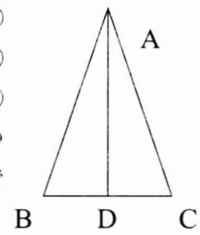
（その1）文部省検定済中学校数学科用「数学2」啓林館（1980）をみると次のように証明している。

二等辺三角形の２つの底角は等しい。

ＡＢ＝ＡＣである△ＡＢＣについて

∠Ｂ＝∠Ｃである。

〔証明〕∠Ａの二等分線を引き，ＢＣとの交点をＤとする。△ＡＢＤと△ＡＣＤで



∠ＢＡＤ＝∠ＣＡＤ　…①

ＡＢ＝ＡＣ　…②

またＡＤ＝ＡＤ　…③

①，②，③から二辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△ＡＢＤ≡△ＡＣＤ

よって　∠Ｂ＝∠Ｃ　　Q.E.D.

要するに頂角∠Ａの二等分線を引いて，二辺夾角相等の合同条件を用いて証明している。頂角∠Ａの二等分線を引くことについてはその前の問として実際に二等辺三角形を二つ折りにするという作業をさせることから自然に角の二等分線が引けることを確認させ二辺夾角の合同条件は公理とはいわないが根拠となる性質として証明なしに成り立つものとしている。

次に文部省検定済高校教科書「数学Ｉ 幾何」三省堂（1956）ではやはり同じように頂角の二等分線を引いて二辺夾角の合同条件を用いて証明している。二辺夾角の合同条件はその前に定理として証明されている。証明の根拠は「二つの図形があって一方を移動して他方に全く重ね合わせることができるときこの二つの図形は合同である」という重ね合わせの原理から二辺夾角の合同条件を証明している。∠Ａの二等分線については特に説明はない。（その1）と同様に∠Ａの二等分線ＡＤを引くことができるということには触れていないことに注目していただきたい。

現在使われている中学校の教科書５冊を調べると検定済中学校教科書「新偏 新しい数学 2」東京書籍，「未来へひろがる 数学 2」啓林館，「新版 中学校数学 2」大日本図書，「中学校数学 2」学校図書（いずれも2005年発行）ともに大同小異で（その1）と変わらず頂角の二等分線を引いて二辺夾角相等の合同条件を用いている。そして角の二等分線を引くヒントとし

てその前に二等辺三角形の紙を折って重ね合わせる作業や図解が導入されて角の二等分線を意識させているところも同じである。

また2010年日本数学教育学会誌第92巻第11号数学教育64-6特集授業研究のための日本の算数・数学教育理論Ⅱ-4 説明と論証 Ⅱ-4-1. 図形の論証 の中でも証明の模範例として（その１）と同じ証明が載っていることがわかった。そこでいくつかの著名な幾何の本ではどのように扱われているかをさらに調べてみた。

３．「わかる幾何学」での扱い

「わかる幾何学」(1959) は湯川秀樹も学生時代愛読していたという幾何学の名著で現代にも価値を失われていない。公理は４つでまとめている。

公理Ⅰ　図形を動かすこと

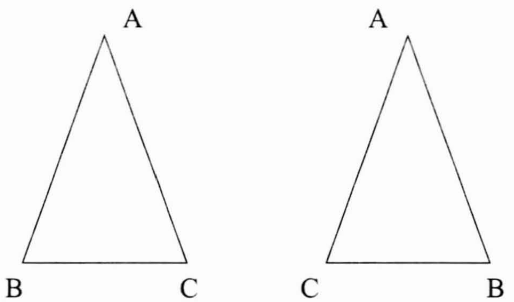
公理Ⅱ　平面を重ねること

公理Ⅲ　直線の公理

公理Ⅳ　平行線の公理

でありユークリッド原論よりも作図などの判断を適宜に入れている。二等辺三角形の底角が等しいことの証明は以下のようになっている。

〔証明〕三角形ＡＢＣを裏返し角Ａの２辺を左右おきかえて元の位置におけばＡＢはＡＣに重なりＡＣはＡＢに重なるから底辺ＢＣはその両端がおきかわってもとのＢＣに重なる。故に角Ｂは角Ｃと重なる。（これと共に角Ｃは角Ｂと重なる）から２角Ｂ，Ｃは相等しいのである。



この証明の後に上のように証明しなくても頂角Ａの二等分線を作りこれを折り目として左を右へ折り返してもできるとして（その１）の考えを補足している。

これはPappus（320年頃）の証明と本質的に同じであるがPappusはすべて重ね合わせの方法ではなく二辺夾角の合同条件を根拠にしている。後半の別証は角Ａの二等分線をつくって折り返し重ね合わせの方法を用いた証明である。

４．「幾何—高校数学への提唱—」での扱い

「幾何」(1980) は第１章で平面幾何の公理的構成を行っていて二等辺三角形の底角は等しいことを二等辺三角形の紙片を折って実証的に確かめ，さらに帰納的に納得することへの疑問を投げかけそこから

Ⅰ　結合関係

異なる二点を通る直線はただ一つしかない

Ⅱ　平行線

直線外の一点を通って，その直線と平行な直線はただ一つかない。

Ⅲ　分割・移動

直線は平面を二つの部分に分ける。

線分(や角)は他の位置に大きさを変えないで一意的に移動することができる。

二辺とそのはさむ角が等しいが等しい二つの三角形は合同である。

の基本性質を導きこれらの基本性質を公理として幾何学を組み立てていくことを提唱している。Ⅲの分割・移動についてはさらにいくつかの公理に分けもっと厳密性を追求して公理系を構成している。

ここでの証明はPappus の証明であり頂角Ａの二等分線を引いての証明ではない。

（その2）〔証明〕△ABCと△ACBにおいて

AB＝AC，AC＝AB

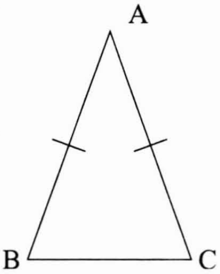
∠BAC＝∠CAB

したがって

辺角辺の合同条件により

△ABC≡△ACB

∴∠ABC＝∠ACB



5．「幾何のおもしろさ」(1985) での扱い

小平先生はこの本の“はじめに”で以下のように述べている。

「近年，数学教育の現代化に伴ってユークリッド平面幾何学が初等教育（高校卒業までの教育）から追放されてしまった。その理由の1つがユークリッド平面幾何が論理的に厳密でなかったことにあったと聞く。フランスの数学者デュードンネ（J. Diedonne'）によれば“中等学校におけるユークリッド幾何など廃止すべきである。今までの中等教育の題材とされていたユークリッド幾何は定義も定理も正確でなく，少しも数学になっていない…”という。私は，これはおかしいと思う。“ユークリッド幾何が少しも数学になっていない”というのは現代数学の立場から見たとき数学になっていない，という意味であろう。しかしユークリッド幾何はギリシャ以降二千年に亘って学問の典型とされてきた立派な数学であった。…」

と述べさらに

「数学の厳密性をいうのであれば，高校で扱う微積分学も現代数学からみれば $\varepsilon-\delta$ 論法など扱わないし高校に登場した微積分学も定義も定理も不正確で少しも数学になっていない。だからといって微積分学を高校数学から追放するであろうか。現代数学の立場から見たとき，平面幾何は厳密でなかったかも知れないがそこで学んだ論理は厳密である。数学の初等教育から論理的に厳密でないといってユークリッド平面幾何を追放したために論理まで追放したことは致命的な誤りである。」

と述べ平面幾何のおもしろさとして

パズルとしての面白さ

自然科学としての面白さ

論理的に厳密な学問の体系を学んでいるという満足感

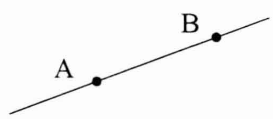
をとりあげユークリッド幾何の論理的欠陥として“順序の公理”特に“平面上の点と直線の順序”を分かりやすい範囲でできるだけ厳密に扱っている。ただ“順序”に関する定理には図をみれば明らかのものが多くなぜこんな明らかなことを証明しなければならないのか初学者は苦しむかも知れないので定理が明らかなのにその証明が煩雑過ぎると思えば証明をとばして進んでよいとしている。これは現代数学を研究する際も目的とするテーマに関する定理をすべて厳密に証明するのは最後であって直観によって明らかなことはすべて証明してから先へ進むわけではないという数学者の信条がよく現れている。学校数学からユークリッド幾何が厳密でないから追放すべきであるというのはこのような観点からも誤りであり単純に厳密に取り扱うのではなく児童・生徒の発達段階に応じた扱いを研究していくことで数学教育の最も重要な題材の一つになっていると考える。

「幾何の面白さ」では次のような公理体系を考えている。

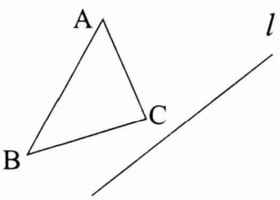
公理1　相異なる二点AとBが与えられたとき

AとBを通る直線を引くことができる。

AとBを通る直線はただ一つしかない。

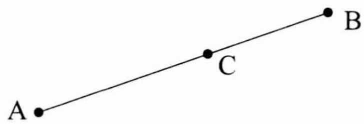


公理2　直線 l が三点A，B，Cのいずれも通らないとき，l は三つの線分AB，AC，BCのいずれとも交わらないかまたはそのうち二つと交わって他の一つとは交わらない。

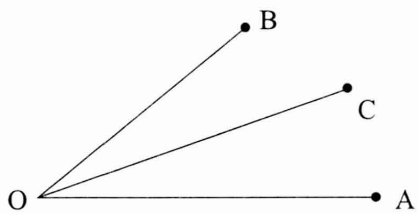


この公理の他にヒルベルトが「幾何学の基礎」で定めた公理群から導かれる定理のうち直線上の点の順序に関する定理は証明なしにはじめから明らかであるとして自由に使う。

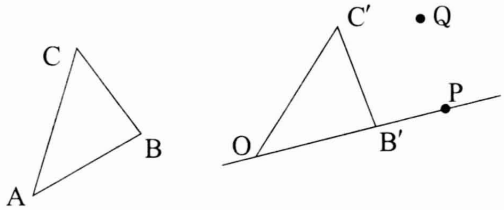
公理３　線分ＡＢ上の点ＣがＡとＢのいずれとも異なるとき，等式ＡＢ＝ＡＣ＋ＣＢが成り立つ。



公理４　点Ｃが∠ＡＯＢの内部にあるとき
等式∠ＡＯＢ＝∠ＡＯＣ＋∠ＣＯＢが成り立つ。



公理５　△ＡＢＣと一直線上にない任意の三点Ｏ，Ｐ，Ｑに対して半直線ＯＰ上の点Ｂ' と直線ＯＰに関してＱと同じ側にある点Ｃ' を合同式△ＯＢ'Ｃ' ≡△ＡＢＣが成り立つように定めることができる。



以上５個の公理を設定し定理16（二等辺三角形の二つの底角は等しい。）を定理15（二辺夾角の合同定理）を用いてPapussの証明で証明している。ちなみに定理15の証明には定理14，11，10を用いていて，定理14の証明には公理５，定理10を定理11の証明には定理６を定理10の証明には公理３を用い，さらに定理６に証明には定理４を定理４の証明には定理２を定理２の証明には公理２を用いている。

６．「ユークリッド原論」(1971) での扱い

ユークリッド原論(第一巻)では定義23個と公理を公準(要請)と称し，公準を５個，また幾何以外でも成り立つ共通概念を公理と称し公理を９個設定して多くの定理（命題）を証明している。

命題５　二等辺三角形の底辺の上にある角は互いに等しく，等しい辺が延長されるとき底辺の下の角は互いに等しい。

ＡＢ＝ＡＣであってＡＢＤ，ＡＣＥは一直線上とするとき∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢ，∠ＣＢＤ＝∠ＢＣＥを示す。

（その３）〔証明〕

ＢＤ上に任意の点Ｘがとられ，大きい線分ＡＥから小さい線分ＡＸに等しいＡＹが切り取られ，線分ＸＣ，ＹＢを結ぶ。

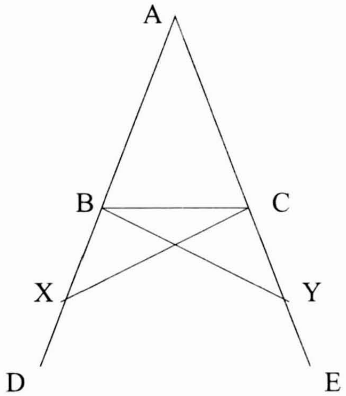
そうすればＡＸ＝ＡＹ，ＡＢ＝ＡＣかつ∠ＸＡＹは共通の角なので命題４より底辺ＸＣ＝底辺ＹＢ

すなわち△ＡＸＣと△ＡＹＢは合同。

従って　∠ＡＣＸ＝∠ＡＢＹ，
　　　　∠ＡＸＣ＝∠ＡＹＢ

そして　ＡＸ＝ＡＹかつＡＢ＝ＡＣより

ＡＸ－ＡＢ＝ＡＹ－ＡＣ（公理３）
よってＢＸ＝ＣＹ
ところがＸＣ＝ＹＢかつ∠ＢＸＣ＝∠ＣＹＢ
よって命題4より△ＢＸＣと△ＣＹＢは合同。
従って∠ＸＢＣ＝∠ＹＣＢ
かつ　∠ＢＣＸ＝∠ＣＢＹ
すると　　∠ＡＢＹ＝∠ＡＣＸであるから
これから　∠ＣＢＹ＝∠ＢＣＸを引くと
公理３より∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢ



この証明では公理３と命題４（二辺夾角の合同定理）が用いられている。命題４はいわゆる重ね合わせの方法を用いて証明していて公準を用いた厳密な論理的証明とはいえない。ユークリッド原論は公理的な方法で数学の体系を作り上げていくという思想のもとに2000年以上受け継がれてきたが厳密な公理的構成はヒルベルトの幾何学基礎論（1899年）を待たなければならない。ヒルベルトは命題４を公理として扱うべきであるとした。このようにユークリッド原論の公理的な構成には現代から見たら厳密ではない部分もある。しかしそれを含めてもできるだけユークリッド原論にそった形で中高の数学でも扱う方がいいのではないかと思う。ユークリッド原論の命題５の証明は少し複雑ではあるが公理的構成を考えた場合やむを得ないことであり論理的厳密性を重視することや現代数学へのつながりのプロセスを理解しておくことは教育上不可欠であるとさえ思う。

７．「幾何学基礎論」での扱い

「幾何学基礎論」（1969）はヒルベルトの数学の基礎に関する研究の最初の著作である。ヒルベルトはユークリッド幾何学の公理的方法の厳密性を補い証明はもちろん公理からもはたまた基礎の概念構成のうちからも空間的幾何学的直観への依存を除きこれに代えて論理的関係を持ってしようとする徹底的な論理的立場をはじめて確立した。これによって19世紀の集合論の背理から始まる「数学の基礎の危機」の打開を図り現代数学につながっていくのである。
幾何学の公理を次のように五群分けている。

　結合の公理Ⅰ　1-8　　　順序の公理Ⅱ　1-4
　合同の公理Ⅲ　1-5　　　平行の公理Ⅳ
　連続の公理Ⅴ　1-2

そして定理群の中に
定理11　合同な二邊を有する一つの三角形に於てその邊に對する角は合同である。換言すれば二等邊三角形に於て両底角は相等しい。
がある。

定理11は公理Ⅲ５および公理Ⅲ４の後半から証明されるとだけかかれていて証明は省略されている。
公理Ⅲ５　二つの三角形ＡＢＣおよびＡ′Ｂ′Ｃ′に於て合同関係ＡＢ≡Ａ′Ｂ′，ＡＣ≡Ａ′Ｃ′，∠ＢＡＣ≡∠Ｂ′Ａ′Ｃ′が成り立てばまた恒に合同関係∠ＡＢＣ≡∠Ａ′Ｂ′Ｃ′が成り立つ。
公理Ⅲ４の後半：与えられた平面上の与えられた半直線を一邊としこの直線に対して与えられた側に任意の角を唯一通りに合同に移すことが出来る。

公理Ⅲ５はユークリッド原論の命題４と同じでありこれを用いて証明するということは明らかにPapuusの証明をすることになる。

８．「初等幾何公理から考える入門」(2005)での扱い

この本はユークリッド幾何と非ユークリッド幾何を統合し初等幾何として新しく公理的構成

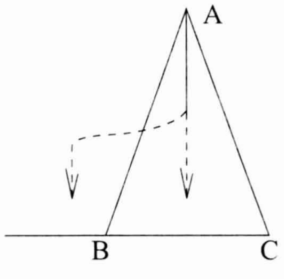
を試みている。その中で

定理1.24（底角定理）二等辺三角形の底角は等しい。

とあり２つの証明をあげている。

証明(1)△ＡＢＣをＡＢ＝ＡＣなる二等辺三角形とする。いま三角形△ＡＢＣ，△ＡＣＢにおいて頂点間の対応Ａ→Ａ，Ｂ→Ｃ，Ｃ→Ｂと考えるとこの対応のもとでＡＢ＝ＡＣ，ＡＣ＝ＡＢ，∠Ａ＝∠ＡがいえるからＳＡＳ（２辺夾角）より △ＡＢＣ≡△ＡＣＢ　よって∠Ｂ＝∠Ｃがいえる。

これは明らかにPappusの証明である。そしてこの証明はある意味で肩透かしを食った感が否めないとして頂角の二等分線を引く証明(2)を別に行っている。そこでは頂角の二等分線が底辺ＢＣと交わることを示すことがポイントである。角の二等分線については「幾何学I 現代数学から見たユークリッド原論」(2007)の中で三角形ＡＢＣの頂角Ａの二等分線が点Ｂ，Ｃの間で直線ＢＣに交わり延長上では交わらないとどうしてわかるのか？もちろん図から明らかであるがもし図を描かないで理由を説明するとしたらどうするか？



と記されていて公理系の厳密性を要求している。証明(2)は以下のようになっている。

証明(2)三角形△ＡＢＣをＡＢ＝ＡＣなる二等辺三角形とする。∠Ａの二等分線を引くと定理1.19と定理1.14によりそれは線分ＢＣと間の点Ｍで交わる。このときＳＡＳ（２辺夾角）より△ＡＢＭ≡△ＡＣＭがいえる。ゆえに∠Ｂ＝∠Ｃである。

証明(2)でもヒルベルトがユークリッド原論の命題４（二辺夾角の合同定理，ＳＡＳ）を公理としたように公理1.14としてこれを用いて証明している。

公理1.14（ＳＡＳ）対応する２辺と夾角が合同な三角形は合同になる。

またここで使われている定理1.19，定理1.14は以下のものである。

定理1.19　２点Ｂ，Ｃを$\overrightarrow{VA}$の同じ側としたとき 次は同値である。

(1) k(∠ＡＶＢ)<k(∠ＡＶＣ)

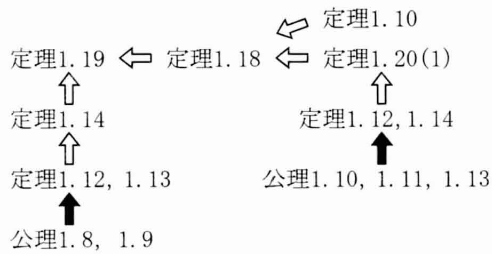
(2) Ｂ ∈ Int ∠ＡＶＣ

(3) ∠ＡＶＢ，∠ＢＶＣは隣接角である。

定理1.14　（クロスバー定理 (Crossbar Theorem)) 角∠ＡＶＢが与えられたとする。このとき

Ｐ ∈ Int ∠ＡＶＢ ⇔ $\overrightarrow{VP}$∩IntＡＢ≠Φ

この２つの定理の証明に使われているのは定理1.10，1.12，1.13，1.14，1.18，1.20(2) および公理1.9 (Pashの分離公理)，公理1.8（平面分離公理 (Plane Separation Postulate)），公理1.10，1.11，1.13であり下図のような論理体系になる。



公理1.8（平面分離公理 (Plane Separation

Postulate, PSP))任意の直線lに関してl上にない点全体を$\mathscr{L}(l)$であらわすと，次を満たす$\mathscr{H}_1$，$\mathscr{H}_2$が存在する。
(1)$\mathscr{L}(l)=\mathscr{H}_1\cup\mathscr{H}_2$，$\mathscr{H}_1\cap\mathscr{H}_2=\Phi$，$\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2\neq\Phi$
(2) P，Q$\in\mathscr{H}_1$(or $\mathscr{H}_2$)$\Rightarrow$ＰＱ，lは交わらない。
(3)P$\in\mathscr{H}_1$，Q$\in\mathscr{H}_2\Rightarrow$PQ，$l$は交わる。このとき$\mathscr{H}_1$，$\mathscr{H}_2$ をlの半平面という。

公理1.9（パッシュ(Pash)の分離公理）平面内の3点Ａ，Ｂ，Ｃが共線でない（同一直線上にない）として，直線lはこの３点を通らないとする。このときlがＡＢと交われば，ＢＣ，ＡＣのいずれか一方のみと必ず交わる。

なお公理1.10（角の合同の定義・公理），公理1.11（角の移動公理），公理1.12（隣接角・角の和の定義）および定理1.10，1.12，1.13，1.18，1.20(2)については紙面の都合上内容は省略とする。

このように定理1.19を証明するには少なくとも５つの公理が準備されなければならないことがわかる。

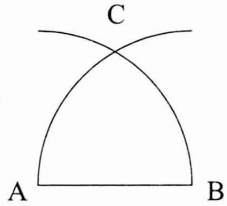
９．ユークリッド原論での循環論法

二等辺三角形の底角は等しいことを証明するには公理の設定の仕方で（その１）(その２)(その３）の３つに大別されることがわかった。文科省の指導の及ぶ教科書等では（その１）が使われ一方公理的に構成しようと試みている場合は（その２）Papuss の証明を採用している。ユークリッド原論は唯一（その３）の証明方法を選んでいる。なぜそのようになったのか。その理由の探る手だてとして（その１）の証明方法をユークリッド原論に採用してみよう。

ユークリッド原論では定理を命題と称しているのでそれに従う。そしてユークリッド原論では命題５がそれに当たる。命題５を証明するのに必要な命題は以下のものである。

命題１　与えられた線分ＡＢを一辺とする正三角形を描くことができる。

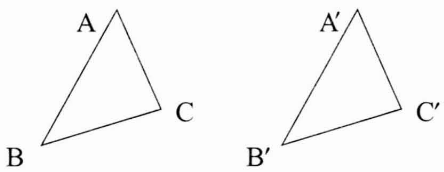
（証明）公準３によりＡを中心としてＢを通る円，Ｂを中心としてＡを通る円をそれぞれ唯一描くことができる。



この二つの円の交点をＣとすればＣとＡ，ＣとＢを結ぶ線分の存在と一意性は公準１で保証されているので円の定義15よりＣＡ＝ＡＢ，ＣＢ＝ＡＢこれにより三角形ＡＢＣは正三角形となる。

（注）交点Ｃの存在の保証には Dedekind の連続性の公理が必要である。

命題４　二つの三角形△ＡＢＣと△A′B′C′においてＡＢ＝A′B′，ＡＣ＝A′C′，∠Ａ＝∠A′ならば
∠Ｂ＝∠B′，∠Ｃ＝∠C′である。



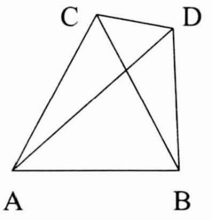
（証明）A′B′をＡＢ，A′C′をＡＣに重ねたとき公準１よりＢとＣを結ぶ線分は唯一であるからB′C′とＢＣが重なり　２つの三角形は重なる。

これより証明できた。

（注）Euclid は２つの図形を重ねることで証明できたとしているがこれが証明になっているかは問題である。Hilbelt は命題４を公理とした。

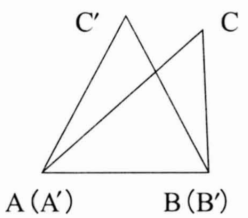
命題５　Ａを頂点とする二等辺三角形△ＡＢＣの底角∠Ｂと∠Ｃは互いに等しい。（表現は異なる）

命題７　線分ＡＢの同じ側にある二点Ｃ，Ｄに対しＡＣとＡＤの長さが等しくＢＣとＢＤの長さが等しいならば実はＣとＤは同一点である。



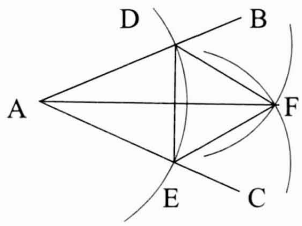
（証明）Ｃ≠Ｄとすると，
ＡＣ＝ＡＤより命題５より∠ＡＣＤ＝∠ＡＤＣ
ここで
∠ＡＣＤ＞∠ＤＣＢだから
∠ＡＤＣ>∠ＤＣＢ・・・①
同様にＢＣ＝ＢＤより∠ＢＣＤ＝∠ＢＤＣ
ここで
∠ＢＤＣ>∠ＡＤＣだから
∠ＢＣＤ>∠ＡＤＣ・・・②
①，②より矛盾。よってＣ＝Ｄである。
（注）ここで図から∠ＡＣＤ＞∠ＤＣＢ，∠ＢＤＣ＞∠ＡＤＣと判断しているがこれは「幾何学Ⅰ 現代数学から見たユークリッド原論」でも指摘しているように「間」に関する公理の必要性がある。

命題８　三角形△ＡＢＣと△Ａ′Ｂ′Ｃ′に対応する辺ＡＢとＡ′Ｂ′，ＢＣとＢ′Ｃ′，ＣＡとＣ′Ａ′が等しいならば対応する∠Ａと∠Ａ′，∠Ｂと∠Ｂ′，∠Ｃと∠Ｃ′は等しい。
（証明）ＡＢとＡ′Ｂ′を重ねて，同じ側にＣとＣ′がくるように移動する。
ＡＣ＝Ａ′Ｃ′，ＢＣ＝Ｂ′Ｃ′より命題７からＣ＝Ｃ′
よって　△ＡＢＣと△Ａ′Ｂ′Ｃ′は合同になり題意は証明された。



（注）ここでも重ね合わせの方法が使われている。

命題９　与えられた角∠ＢＡＣを二等分することができる。
（証明）命題１よりＡＤ＝ＡＥとなる点Ｄ，ＥをＡＢ，ＡＣ上にとりＤＥを一辺とする△ＤＥＦを描くことができる。
このときＡＦが∠ＢＡＣを二等分している。
なぜならば仮定よりＡＤ＝ＡＥかつＤＦ＝ＥＦでＡＦは共通よって 命題８により∠ＤＡＦ＝∠ＥＡＦとなり∠ＢＡＣは二等分される。



角の二等分線を引くことができることは命題９で保証される。つまり命題９の証明には命題１，命題８が使われている。そして命題１は公準３によって，命題８は命題７によって，命題７は命題５によって証明できる。つまり命題５を証明するのに命題５が必要となってしまい循環論法になる。

命題１ ⬅ 公準３
命題５ ⇦ 命題９ ⇦ 命題８ ⇦ 命題７ ⇦ 命題５

ユークリッドはこのために命題５を証明するのに頂角の二等分線を使わずに命題４を使ってちょっと煩雑な証明をしたのではないかと推測できる。

10. 終わりに

このようにみてくると「二等辺三角形の底辺は等しい」という定理を頂角の二等分線を引いて証明する（その１）が必ずしもいいとはいえないのではないか。文科省の検定教科書がなぜ一律に（その１）の証明を採用しているのか。角の二等分線を仮定するにはもっと多くの公理

が必要になることは「幾何のおもしろさ」「初等幾何入門—公理から考える」などから分かるように多くの公理を前提としなくてはならない。

中学校の教科書では三角形の合同条件も（3個）も平行線の公理もすべて基本性質という言葉で述べあたかも公理として扱っている。また文部省著作教科書「中等数学第三学年用(2)」(1947) では三角形の合同条件や三角形の外角の定理，相似の条件などが作図を通して事実として述べられあとはこれらを用いた計量問題ばかりである。つまりこの時代には図形による論理指導はされていない。この流れからすれば角の二等分線が引けることは作図を通して納得させていることが理解できる。ユークリッド原論では角の二等分線が引けることは命題９で証明しているが残念ながら命題5を証明するには循環論法になる。このことを考えると（その１）の証明よりユークリッド原論の証明（その３）の方を論理の訓練も含めて学校数学で採用した方がいいのではないだろうか。またはPappusの証明（その２）でもいいが肩透かしの感が否めない。とすると（その３）の方がまだすぐれている。ユークリッド原論が2000年を優に超えて学校数学で使われている由縁は厳存している。

なお今後の課題としてなぜ教科書では（その１）の証明になったのか。戦後の教科書での扱いや洋算が導入された明治時代の菊池大鹿「初等幾何学教科書」（1888年明治21年）長澤亀之助「初等幾何学」（1894年明治27年）林鶴一「新撰幾何学教科書」（1912年明治45年）「中等教育幾何学教科書」（1913年大正２年）などではどのように扱われているかをさらに調べられたらと思う。なお本文はユークリッド原論をつぶさに読む内に自然に気づいたことを考察しまとめてみたがすでにこのような事は調べられているか先行研究を確認することはできなかった。先達の方々のご意見・ご教授・ご指摘をいただければありがたくお受けしたいと思う次第である。

参考文献

1）橋本純次・栗田稔他14名：文部省検定済中学校数学科用「数学２」（1980（昭55）年12月）啓林館 p. 118

2）田中正夫・清水辰次郎・石谷茂：文部省検定済み高校教科書「数学I 幾何」（1956（昭和31）年12月）三省堂 p. 14-15

3）杉山吉茂・俣野博他32名：検定済中学校教科書「新偏 新しい数学 2」（2005（平成17）年２月）東京書籍

4）岡本和夫・小関熙純他39名：検定済中学校教科書「未来へひろがる 数学２」（2005（平成17)年２月）啓林館

5）吉田稔他17名：検定済中学校教科書「新版 中学校数学 2」（2005（平成17）年２月）大日本図書

6）一松信，岡田褘男，町田彰一郎ほか29名：検定済中学校教科書「中学校　数学 2」（2005（平成17）年２月）学校図書

7）松尾七重：日本数学教育学会誌第92巻第11号数学教育64-6特集授業研究のための日本の算数・数学教育理論Ⅱ-4説明と論証Ⅱ-4-1．図形の論証2010（平成22）年 p. 70-71

8）秋山武太郎：「わかる幾何学」（1959（昭和34）年10月）初版　日新出版 p. 24

9）秋月康夫・柴田敏男：「幾何—高校数学への提唱—」（1980（昭和55）年２月）紀伊国屋書店 p. 11

10）小平邦彦：「幾何のおもしろさ」（1985（昭和60）年８月）第６版　岩波書店

11）中村幸四郎・寺阪英孝他２名：「ユークリッド原論」（1971（昭和46）年７月）初版　共立出版

12）小林昭七：「ユークリッド幾何から現代幾何へ」（1990（平成２）年10月）初版　日本評論社

13）ヒルベルト　中村幸四郎訳：「幾何学基礎論」（1969（昭和44）年11月）清水弘文堂

書房 p. 11-33

14) 溝上武實：「初等幾何入門—公理から考える」（2005（平成17）年9月）初版　日本論社

15) R. ハーツホーン著　難波誠訳：「幾何学Ⅰ　現代数学から見たユークリッド原論」（2007（平成19）年10月）シュプリンガー・ジャパン

16) 文部省著作教科書：「中等数学 第三学年用(2)」（1947（昭和22）年11月）