因数分解の指導法の試み

沖山　義光

1．はじめに

数学の授業を実践していて，その改善・開発には何が大事なのか。いつも悩みながら様々な試みを行ってきた。教育学，心理学，哲学などを研究し教育の目的や目標を研究することも大事なことである。一方，現場に立つ教師としては，日々の授業をいかに満足のいくようにするか課題であり指導法はより切実な問題である。数学の授業を考えるとやはり最も大事なことは教師が数学を好きでありまた数学の素養も幅広くかつできれば深いことがよいことは当然であり，ここで確認しておきたい。その中で我々教師は，生徒にいかに良く理解させ，実感をもった感動を得させることによって，数学を好きにさせたり数学の力をつけることができるか。人が人を導くことの本質的な難しさを踏まえ日々努力するのが教師の役目であろう。それはまたいくら工夫しても最終的にこれで完全ということはない。またそれが教育の研究が成り立つ由縁と思っている。そのような考え方から今回は中学３年生対象に因数分解の指導実践としての１つの試みを報告したい。

2．授業内容と１つの試み

私は，日々実践の結果から指導法の工夫として以下の11個の観点をまとめた。[1)] それを，以下ここに引用しておく。

①数学史や数学用語の由来などを知らせる。
②数学の実用性，社会性を話題にする。
③数学の体系などを教養としての知識と考えて教える。
④数学の他の分野との関係を意識して指導する。
⑤小，中学での既習事項との関連を知らせる。
⑥一般的な知識への欲求，美的，合理的，批判的精神を喚起する。
⑦数学の厳密性，普遍性を意識して指導する。
⑧生徒に問題作りをさせる。
⑨作業や実験を通した指導をする。
⑩わかりやすい授業や難しいが面白い内容を工夫して達成感を与える。
⑪数学的な考え方の良さを強調する。

いずれも，敷衍すれば私がこれまで日々積み重ねてきた工夫を凝縮したものであり実践すれば大きく広がるものである。

今回は，この中の⑧問題作りをさせる。を実践してみた。

対象生徒：中高連絡進学のある私立中学３年生男子（21～24名×５クラス）
日時：2010年４月27日
授業内容：因数分解

１）$ab+ac=a(b+c)$
２）$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
３）$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
４）$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
５）$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$
６）$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
７）$x^3+3x^2a+3xa^2+a^3=(x+a)^3$

8）$x^3-3x^2a+3xa^2-a^3=(x-a)^3$

9）$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

10）$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

因数分解の前にこれらの右辺と左辺を入れ替えた乗法公式の指導を行い，その逆として因数分解を教える。6）はたすきがけという手法を指導する。

中高連絡進学のため，7）〜10）は本来は高校1年生で学ぶ内容である。

これらの因数分解を問題演習を取り入れながら1つ1つ学習していく。さらにこれらの組み合わさった問題や，置き換えの考え方を教えて総合的に因数分解ができるようにしていく。

新しい試みとして1）〜5）の学習が終了したところで，これまでの学習から，

「自分で因数分解の問題を作ってみよう」

という課題を出した。問題を，一人最低5題作ることとして授業中作らせ提出させた。普段授業の後半にまとめとしてよく小テストを実施している。その代わりにこの課題を出し考えてもらったのである。時間は約20分程度である。

3．反応

このような試みははじめてなので果たして生徒は考えてくれるだろうか不安であったが，ほとんどの生徒が自分なりの問題を作成してくれた。問題作りのねらいは，

①問題を作ることにより，因数分解の仕組みやからくりを知って先を見通す力を身に付ける。

②因数分解に対する各生徒のイメージを知り，指導に役立てる。

と考えた。①，②共にとてもよくそのねらいは達成された。

はじめに1つのクラス24名の全容を示す。

No1　$x^2-8x-48$

$a^2-48a+432$

$8x^2+3x-108$

$x^3y^2-6x^2y-216x$

$(x^2+3x)^2-16(x^2+3x)+48$

No2　$ax^2-19ax+84a$

$a(x+y)^4-25a(x+y)^2+66a$

$a^2b^2+1/5abx+3/10x^2$

$b^2x^2+23b^2x+42b^2$

$(abc)^2+28abcd+147d^2$

No3　x^2-x-12

$x^4y^4+x^5+y^5+xy^4$

$361x^2+76yx-45y^2$

$2x^2-162$

No4　$3f^2-36fK-324K^2$

$19h^2-133hm-1482m^2$

$64-12n-n^2$

$4t^2+8t-192$

$3p^2-24p-2139$

No5　$3x^2+6x-45x$

$2x^2-7x-30$

$2xy-x-4y+2$

x^2-5x+6

$a^2b^2-5abx-24x^2$

No6　$13m-117m+299m$

$a^3x^2-18a^2x-63a$

$(x^2+x)^2-56(x^2+x)-116$

$28-y^2-12y$

$3x^2+33y-240$

No7　$289x+221y-323z$

$x^2-11x-60$

$x^2+1x-272$

$x^2+16x-57$

$a^2x^2-32ax+247$

No8　$x^2+y^2-2(xy+2)$

$x^2-8x+12+y(x-2)$

$x^4-6x^3+8x^2+10x-25$

$(x^2+y^2+2xy)^3-(x^2+4xy+y^2)^3$

$x^2+xy-2y^2$

No9　$78x+169x^3-52x^5$

$4x^4-2x^2-6$

$1+10x^2-7x$

$6xy+15xz+9yz$

$x^2y^2-3xyz-10z^2$

No10 $(a^{10}+a^{5})^{2}-22(a^{10}+a^{5})+121$
$x^{6}+9x^{3}-52$
$x^{2}+19x+84$
$2ab-a-4b+2$
$2xy-xz/3+2z-12y$

No11 $2x^{2}+x-56$
$4ax+8bx+12cx+16dx$
$2ad-2bd+ac-bc$
$m^{2}+9mn-136n^{2}$
$x^{2}-11x-60$

No12 $132x-275y+341z$
$60a^{2}-18ab-231b^{2}$
$6a^{2}-4ab-2b^{2}$
$x^{2}+16x-36$
$a^{2}-14ab+24b^{2}$

No13 $2ad-bc+ac-2bd$
$(x^{3}+x)^{2}-15(x^{3}+x)+54$
$x^{2}+1/4x-3/8$
$x^{2}+5x-84$

No14 $-7xz^{2}-63xz-98$
$19ab-ax/3+2x-114b$
$y^{2}+81xy+1640x^{2}$
$x^{2}+1/2xy+3/50y^{2}$
$2a^{2}-16ab-66b^{2}$

No15 $x^{2}-4x-21$
$x^{4}+63x^{2}+980$
$4-14a-72a^{2}$
$ab+ac+db+dc$
$x^{8}+2x^{4}-6x^{4}$

No16 $19(x+y)+80(x+y)$
$(x-13)^{2}+26(x-3)$
$125x^{2}-50x-75$
$x^{4}-9x^{2}+400$
$240xy-80x^{2}y^{2}-180$

No17 $a^{4}-20a^{2}+36$
$a^{2}b^{2}-35ab-114$
$x^{2}+38x+361$
$a^{2}-3/8a-1/16$
$x^{2}-12x-133$

No18 $(x+16)^{2}$
$x^{9}+31x^{3}+256$
$a^{4}-25a^{2}-150$
$36a^{2}x-12x-18a^{2}+6$
$m^{4}+50m^{2}+525$

No19 $18x^{2}+81/20x-1/5$
$5a^{3}+5a^{2}b-6ab^{2}-6b^{3}$
$54x^{2}+60x+14$
$54x^{2}+117x+12+72x^{2}-36x-20$

No20 $(x^{2}+x)^{2}-62(x^{2}+x)+840$
$4(a^{2}b^{2}+ab-6x)$
$3a^{2}-3b^{2}$
$a^{5}-25ab^{4}$
$4ab-a^{2}-4b^{2}+c^{2}$

No21 $111x^{2}+12221y^{2}+1332yx$
$8x^{2}+3y^{2}+20xy$
$999x^{2}+999y^{2}+2098xy$
$111x^{2}+111y^{2}-1378xy$
$(16x^{2}-8x+1)/64$

No22 $a^{6}+2a^{3}-15$
$3a^{2}-4a+2$
$6x^{2}-x-2$
$x^{2}+6x+5$
$a^{2}b^{2}+3ab-10$

No23 $x^{2}+28x+115$
$(x^{2}+2)+(x^{2}-3)+(x^{2}+5)$
$5ax-4ay-15bx+12by$
$x^{2}+x-42$
$4x^{2}-8x-140$

No24 $3x^{2}+17x+10$
$x^{2}+2x-48$
$(x^{2}+2ax+a^{2})^{2}$
$x^{2}+2x+1$
$x^{3}y-xy^{3}$

以上を概観してみると生徒の実態が鮮明に浮き彫りになる。

まず一人として同じ問題がないことである。生徒がいかに個性をもっているか。個性化が叫ばれるなかそれぞれの個性が見事に反映され実現している。生徒一人一人の問題をつぶさに見

るとよく考えていることもわかる。与えられた因数分解の問題を解くより，自分で自発的に考え，自由で楽しみながら作っていることが伝わってくる。残りの４クラスも同じように生き生きとして問題が作られている。20分程度の指導であったが，一人一人の考え方や理解度が把握されたと同時にその後の因数分解の指導はほとんど生徒自身で考えることができ手取り足取りといった指導はする必要はなくなるほどであった。また，因数分解の指導後の２次方程式，２次関数の指導の際も自主的に学習する態度ができとてもやりやすくなった。

４．反応の分析と考察

一人一人の問題作りに焦点を合わせれば，それぞれの生徒の個性や考え方が把握され何を指導したらいいのか明確にかつ的確になる。そのような指導のために，ここで生徒達の作った問題を分類して傾向や特徴をみる。

因数分解の公式

１）$ab+ac=a(b+c)$

２）$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

３）$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

４）$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

５）$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

６）$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

７）$x^3+3x^2a+3xa^2+a^3=(x+a)^3$

８）$x^3-3x^2a+3xa^2-a^3=(x-a)^3$

９）$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

10）$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

に従って集計する。

問題の型	１組	２組	３組	４組	５組
１)のみ	9	13	8	14	21
１)＋２)	23	14	20	11	15
１)＋５)	0	2	2	1	4
１)＋６)	5	0	2	4	3
２)基本	48	55	38	47	39
２)応用	26	22	23	20	26
３)	3	2	3	1	2
５)	3	8	5	5	7
６)	7	11	5	13	13
その他	7)1		10)1	8)1	10)1
生徒数	23名	24名	23名	21名	24名

この集計はできている問題を因数分解の公式に従って，クラス毎に集計したものである。共通因数でくくる形は他の公式と複合したものが多いので４つに分けた。２）は多くの生徒がこの形のものを作っていたので，基本的なものと文字の置き換え等をして因数分解するような応用とに分けた。３）５）６）については１）と複合しているものなども含めて集計しした。

最も多いのは，２）であり基本的なものは

$x^2+14x+45$，$x^2-50x+225$，$x^2-13x+36$

$6+5x+x^2$，$1-6x-91x^2$，$81+30a+a^2$

$a^2-48ab+17b^2$，$x^2y^2-6xy-27z^2$，$x^2-23xy+13y^2$

$x^2+1/12x-1/12$，$a^2-1/30a-1/30$，$x^2+3/4x+1/8$

であり，応用としては

$2a^2x^2-72ax+1400$，x^4y-10x^2y+9y，

$ab^2c^2x^2-15abcx-76a$

など１）共通因数でくくることと複合したもの。

x^4-22x^2+105，$x^4-x^2y-12y^2$，$(x^2+6x)^2+17(x^2+6x)+72$

など，置き換えの考えが必要なものがあげられる。パターンとしては単純だが，数値の変化やちょっとした変化にとても興味深いものがあった。

１）＋２）のものでは，２）応用に入れた共通因数でくくるものと重複するが，こちらには

$2-6a-36a^2$，$24+2x-2x^2$，$4x^2+32x-1536$

など数値の共通因数をくくるものも入れてある。

１）＋５）は事例は少ないが

$2x^2-162$，$3a^2-3b^2$，a^5-25ab^4，x^3y-xy^3

など基本的なものから

$x^4-4y^2+16x^2-8x^2z$，$591x^2-5319$

など高度なものもある。このような発想ができる生徒はやはり優秀であり逆に優秀な生徒と評

価してよいことがわかった。

1）+6）型は1）+2）型の変形と考えられ，

$4x^2+390x-1000$，$-18a^2-12ab+16b^2$，$125x^2-50x-75$，$4x^2-8x-140$，$9a^2+21a+12$

どちらを作ろうとしたのかわからないものもある。

$20x^2-4x-70$，

また因数分解できない問題を作ってしまうこともいくつかあった。

$30x^2-76x-187$，$81y^4-76y^2+288$，$169a^2+2ab-15b^2$

6）型も多く1）+6）型を除くとほとんどが基本的なものである。

$50x^2-35x+6$，$3a^2b^2+13ab+12$，$16a^2+32a+15$，$98x^2-21x-20$，$12x^2-37x-144$，$9x^2-45xy+56y^2$，$12b^2+5b-2$

5）型は

基本的なもの

x^2-16，$4a^2-25$，x^4-64，$3(a^2-b^2)-12(b^2-a^2)$

から

数値のこだわりを持ったもの

$1/6x^2-24$，$935089x^2-4$，$1-729x^2$，$x^2-60025$，x^2-256

や

x^4-6x^2+5，$x^4-4y^2+16z^2-8x^2z$，x^4+x^2+1

といった高度のものまであり，やはりセンスの良いものは優秀な生徒のものに多い。

7）型は

$x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3$

であり，$(x+y)^3$　を展開したものと思われる。これはこれでとても良い発想といえる。

8) 型は

$x^3-15x^2+75x-125$

でありこれも展開公式から作成したものであろう。

10) 型は

$2744x^3-729y^3$，$(x^2+y^2+2xy)^3-(x^2+4xy+y^2)^3$

であり，これは先を学習したり数に対する感覚がこのようなところまで考えていることに驚く。

また，数値に対するイメージは大部分の生徒が多様なイメージを持っていることがわかった。

	1組	2組	3組	4組	5組
分数を使用	12	9	9	5	7
小数を使用	0	2	0	0	0

小数を使った作題はほとんどなかったが，分数についてはそれなりの発想があった。これは，問題集や教科書にも小数の問題が少ないからであろう。

5．終わりに

できた問題をパターン化して分析してみたが，その目的は生徒はどのような問題を作成したか，その傾向と特徴を見つけることであった。そのことから生徒の一般的な傾向を知ることで指導に役立てたいと思うからである。生徒の実態をこのような形で一般的に知ることはこれはこれでとても重要なことである。

ただ，一方で実際の授業では生徒一人一人が重要であり，作られた1題1題はたとえ稚拙でも間違えていてもまたそれだからこそ指導上のデータとして大事なものである。

$25+375$

$x^2-50x+225$

$169-361y^2$

$2744x^3-729y^3$

$3136-3249$

これは，ある一人の生徒の作題であるが，大多数の生徒が作る2）型はなく，高度な10) 型があるかと思えば，数値だけのものが2題も入っ

ている。この生徒についてはいつも何を考えているのかわからないところがあったので，後で少し事情を聞いてみたところ内容をよく理解しそれ以後は授業でもよくわかるようになった。他にも何人かの生徒にこのような形で交流し生徒の実態を把握することができた。むしろこちらの利用の仕方が大事ではないかと考えている。

因数分解を作らせてみるということは，ちょっとした思いつきで試みたことであったが，難しいとされる因数分解を展開公式の逆ととらえると，このように生徒に問題を作らせるということ発想は自然なことであろう。

不定積分を求めるのに，実は微分を考えて求めるというのが要領であることもその１例であろう。幾何学で逆の研究をすることから新しい問題ができることはよく知られていることである。[2)]

また古くは大正中期から昭和の初期にかけて児童中心主義思想を背景にした算術教育実践がそのルーツである。[3)]

問題作りをさせるという発想をさらに他の領域でも実施し指導法の１つの改善になれば幸いである。本文を参考に指導法の工夫をして行くことで数学科教育法の改善をすることができれば幸いである。

参考文献

１）沖山義光：″2006年度公開研究会「数学Ｉ」″
お茶の水女子大学附属高等学校研究紀要（2006）p143～157

２）清宮俊雄：″幾何学 ― 発見的研究 ―″
科学新興社（1988）p83～86

３）植田敦三：″問題作りのルーツ″
日本数学教育学会誌2010年第92巻第11号 p14～15