流体力学に現れる偏微分方程式の数学解析

中村　憲史*

Mathematical Analysis of PDEs appearing in fluid mechanics

Kenji NAKAMURA*

1　はじめに

流体力学の基礎方程式であるナヴィエ－ストークス方程式は，非圧縮性粘性流体の運動を記述する非線形偏微分方程式である．すなわち，$u=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$，$\pi=\pi(x,t)$ をそれぞれ座標 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$，時刻 $t>0$ における流体の流速ベクトルと圧力とすると，$\{u,\pi\}$ はナヴィエ－ストクス方程式

$$\begin{cases}\partial_t u+u\cdot\nabla u=\operatorname{Div} S-\nabla\pi,\\ \operatorname{div}\, u=0,\\ u|_{t=0}=a\end{cases}\tag{NS}$$

に従う．ここで，$a=a(x)=(a_1(x),\dots,a_n(x))$ は初期速度ベクトル，S は粘性応力を表す．粘性応力が変形速度 $\nabla u+(\nabla u)^T$ と定数 $\mu>0$ を用いて $S=\mu(\nabla u+(\nabla u)^T)$ で与えられるときは，非圧縮条件 div $u=0$ から Div $S=\mu\Delta u$ が従い，古典的なナヴィエ－ストークス方程式

$$\begin{cases}\partial_t u-\mu\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla\pi=0,\\ \operatorname{div}\, u=0,\\ u|_{t=0}=a\end{cases}\tag{CNS}$$

を得る．(CNS) は粘性応力と変形速度が線形の関係となる，いわゆる非圧縮性ニュートン粘性流体の運動を記述した偏微分方程式である．(CNS) の数学的研究は Leray [10] によって本格的に始められ，彼は乱流解（弱解）の存在を示した．また，Kato [6] は小さな初期値に対する強解の時間大域的一意存在を示した．これらの結果は，現在のナヴィエ－ストークス方程式を数学的に取り扱う際の一つの典型的な手法を与えている．しかし，未だに任意の初期値に対する解 $\{u,\pi\}$ の時間大域的な一意存在が示されておらず，懸賞金付きの未解決問題としても有名である．

一方, 粘性応力と変形速度の関係が定数 $\tau>0$ を用いて $S+\tau\partial_t S=\mu(\nabla u+(\nabla u)^T)$ で与えられるときは，非圧縮条件 div $u=0$ から Div $(S+\tau\partial_t S)=\mu\Delta u$ が従う．よって，(NS) の第 1 式に $(1+\tau\partial_t)$ を施せば，双曲型ナヴィエ－ストークス方程式

$$\begin{cases}\tau\partial_t^2 u+\partial_t u-\mu\Delta u+(1+\tau\partial_t)(u\cdot\nabla u)+\nabla\theta=0,\\ \operatorname{div}\, u=0,\\ (u,\partial_t u)|_{t=0}=(u_0,u_1)\end{cases}\tag{HNS}$$

を得る．ただし，$\theta=(1+\tau\partial_t)\pi$ とした．(HNS) は非ニュートン流体の一種である非圧縮性マクスウェル流体の運動を記述した偏微分方程式として提案されており，時間局所解の一意存在と小さな初期値に対する時間大域解の一意存在が Racke, Saal [13, 14] により示された．

本稿では，筆者がこれまで (CNS) と (HNS) に関して得た結果と，関連する内容について紹介する．

2　2 次元初期値問題の時空 L^2 有界性

ナヴィエ－ストークス方程式を数学解析する際は，ヘルムホルツ分解 $L^2=L^2_\sigma\oplus G$ を用いる．ここで，$L^2_\sigma=\{u\in L^2\mid \operatorname{div}\,u=0\}$，$G=\{\nabla\pi\in L^2\mid \pi\in L^2_{loc}\}$ である．したがって，射影 $P:L^2\to L^2_\sigma$ が定義でき, これをヘルムホルツ射影という．これにより, 速度場と圧力場をわけて議論することができる．また，全空間では $P\Delta=\Delta P$ が成り立つ．したがって，(CNS) の 2 次元初期値問題にヘルムホルツ射影を施せば

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+Pu\cdot\nabla u=0 & \text{in } \mathbb{R}^2\times(0,\infty),\\ u|_{t=0}=a & \text{in } \mathbb{R}^2\end{cases}\tag{PCNS}$$

を得る．(PCNS) の主要部分は熱方程式

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=0 & \text{in } \mathbb{R}^2\times(0,\infty),\\ u|_{t=0}=a & \text{in } \mathbb{R}^2\end{cases}\tag{HE}$$

と同じ形になる．熱方程式 (HE) において，初期値 a を $L^1(\mathbb{R}^2)$ の元とすると，次が成り立つ ([8])：

$$\lim_{t\to\infty} t\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}=\frac{1}{8\pi}\left|\int_{\mathbb{R}^2}a(x)dx\right|^2.$$

このことから，$a\in L^1(\mathbb{R}^2)$ に対しては解の時空 L^2 有界性

$$\int_0^\infty\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\le C\|a\|^2_{L^1(\mathbb{R}^2)}\tag{1}$$

は期待できない．しかし, 初期値のクラスを $L^1(\mathbb{R}^2)$ よりも狭いハーディー空間 $\mathscr{H}^1(\mathbb{R}^2)$ とすることにより，解の時空 L^2 有界性

$$\int_0^\infty\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\le C\|a\|^2_{\mathscr{H}^1(\mathbb{R}^2)}$$

を得ることができる ([8, 11, 12]).

* 助教　数学教室
Assistant Professor, Dept. of Mathematics

初期値をハーディー空間としたときの時空 L^2 有界性は，消散波動方程式

$$\begin{cases}\partial_t^2 u + \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty),\\ (u,\partial_t u)|_{t=0} = (u_0,u_1) & \text{in } \mathbb{R}^2\end{cases} \tag{DW}$$

の解に対しても成り立つ．消散波動方程式 (DW) は，(HNS) にヘルムホルツ射影を施して得られる方程式の主要部分と同じ形であり，(HNS) を解析する際に重要な役割を果たすと考えられる．

(CNS) の 2 次元初期値問題は 3 次元以上の場合とは異なり，初期値を $L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)$ としたときの弱解と強解の時間大域的一意存在は示されている．また，初期値を $L^2_\sigma(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ のクラスとしたとき，(CNS) の弱解に対して次の評価が成り立つ ([16])：

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le C(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad t \ge 0. \tag{2}$$

時間減衰評価 (2) から，(CNS) の 2 次元初期値問題においては (1) と同様の時空 L^2 有界性は自明ではないが，次の結果を得た．

定理 1 ([9])**.** $a \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ とし，u を (CNS) の 2 次元初期値問題の弱解とする．このとき

$$\int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \le C$$

が成り立つ．ただし，C は t によらない正定数である．

定理 1 は初期値のクラスがハーディー空間 $\mathscr{H}^1(\mathbb{R}^2)$ ではなく $L^1(\mathbb{R}^2)$ として成り立っていることに注意する．これは熱方程式の場合には示されていないことであり，(CNS) に非圧縮条件があるため，Amrouche，Nguyen [1] の結果が使えることによる．

また，(HNS) の 2 次元初期値問題に対しても解の時間減衰評価

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le C(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad t \ge 0$$

が成り立つが，この場合も (1) と同様の時空 L^2 有界性は自明ではない．我々は，解の時空 L^2 有界性が (HNS) の 2 次元初期値問題においても成り立つことを示した．

定理 2 ([9])**.** (HNS) の 2 次元初期値問題において，u を [13, 14] で得られる解とする．このとき

$$\int_0^t \|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \le C$$

が成り立つ．ただし，C は t によらない正定数である．

定理 1，定理 2 はともにエネルギー法に基づいて示される．

3 局所エネルギー減衰評価

本節では，双曲型ナヴィエ－ストークス方程式 (HNS) を線形化した問題である双曲型ストークス方程式

$$\begin{cases}\tau\partial_t^2 u + \partial_t u - \Delta u + \nabla\theta = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty),\\ \mathrm{div}\ u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty),\\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (u,\partial_t u)|_{t=0} = (u_0,u_1) & \text{in } \Omega\end{cases} \tag{HS}$$

を外部領域で考察する．ここで，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の領域 Ω が外部領域であるとは，$\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^n$ の有界領域として $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ が成り立つときをいう．以下，Ω の境界は十分なめらかであると仮定する．

3 次元以上の外部領域において，Iwashita [5] は (CNS) の小さな初期値に対する時間大域解の一意存在を示した．彼の証明は，線形化問題の L^p-L^q 評価に基づく Kato [6] の方法による．外部領域における線形化問題の L^p-L^q 評価は，局所エネルギー減衰評価と全空間の L^p-L^q 評価を組み合わせることで得られる．また，Dan, Kobayashi, Shibata [2]，Dan, Shibata [4] は [5] の結果を改良し，さらに 2 次元外部領域の場合にも L^p-L^q 評価を導出した．

一方，(HNS) の外部領域における結果は筆者の知る限り見当たらない．そこで，(HNS) を外部領域で解析するための第一歩として，(HS) の $\Omega_r = \Omega \cap B_r$ における減衰評価である局所エネルギー減衰評価を導出した．ただし，$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$ である．

局所エネルギー減衰評価を導出するためには，(HS) にヘルムホルツ射影を施して得られる方程式

$$\begin{cases}\tau\partial_t^2 u + \partial_t u - Au = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty),\\ (u,\partial_t u)|_{t=0} = (u_0,u_1) & \text{in } \Omega\end{cases} \tag{PHS}$$

を解析する．ここで，$A = P\Delta$ であり，A をストークス作用素という．(PHS) をヒルベルト空間上の常微分方程式として扱い，半群理論に基づいて (PHS) の解の存在が示される．さらに，(PHS) の対応するレゾルベント問題

$$\tau\lambda^2 v + \lambda v - Av = f \quad \text{in } \Omega$$

において，レゾルベントパラメータ λ が複素平面上原点付近の場合を解析することにより，次の定理を得た．

定理 3 ([7])**.** $n \ge 2$，$0 < \tau < 1$ とする．また，$r_0 > 0$ とし，$r > r_0$ とする．さらに，初期値 $u_0 \in H^1_0(\Omega) \cap L^2_\sigma(\Omega)$，$u_1 \in L^2_\sigma(\Omega)$ は $\mathrm{supp}\, u_0$，$\mathrm{supp}\, u_1 \subset \Omega_r$ を満たすとする．このとき，双曲型ストークス方程式 (PHS) の解に対して，局所エネルギー減衰評価

$$\begin{aligned}&\|(u(t), \nabla u(t), \sqrt{\tau}\partial_t u(t))\|_{L^2(\Omega_r)}\\ &\qquad \le C(1+t)^{-\frac{n}{2}} \|(u_0, \nabla u_0, \sqrt{\tau} u_1)\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$C > 0$ は n，r に依存する定数である．

レゾルベントパラメータ λ が原点付近の場合，λ^2 よりも λ のほうが支配的になるため，ストークス方程式のレゾルベント問題 $\lambda v - Av = f$ に関する結果 [2, 4] を使うことができる．これが定理 3 の証明の鍵となる部分である．

4 今後の展望

双曲型ナヴィエ－ストークス方程式の境界値問題に関する結果はほとんど見当たらず，研究テーマは多くあると筆者は考えている．しかし，対応する非線形消散波動方程式の外部領域における解の一意存在に関する結果は Shibata [15] にあるが，その証明はかなり複雑である．そのため，(HNS) の場合も困難が予想される．

一方で，前節でみたように古典的なナヴィエ－ストークス方程式の線形化問題に関する結果をうまく使うことにより，双曲型ナヴィエ－ストークス方程式の解析を進めることができる部分もある．消散波動方程式や古典的なナヴィエ－ストークス方程式で得られている結果を踏まえながら，双曲型ナヴィエ－ストークス方程式の解析を進めたいと考えている．

参考文献

[1] C. Amrouche and H. H. Nguyen, New estimates for the div-curl-grad operators and elliptic problems with L^1-data in the whole space and in the half-space, J. Differential Equations, 250, 3150–3195 (2011).

[2] W. Dan, T. Kobayashi and Y. Shibata, On the local energy decay approach to some fluid flow in an exterior domain, Lecture Notes Numer. Appl. Anal., 16, Kinokuniya, Tokyo (1998).

[3] W. Dan and Y. Shibata, On a local energy decay of solutions of a dissipative wave equation, Funkcial. Ekvac, 38, 545–568 (1995).

[4] W. Dan and Y. Shibata, On the L_q-L_r estimates of the Stokes semigroup in a two-dimensional exterior domain, J. Math. Soc. Japan, 51, 181–207 (1999).

[5] H. Iwashita, L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q, Math. Ann., 285, 265–288 (1989).

[6] T. Kato, Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbf{R}^m$, with application to weak solutions, Math. Z, 187, 471–480 (1984).

[7] T. Kobayashi, T. Kubo and K. Nakamura, On a local energy decay estimate of solutions to the hyperbolic type Stokes equations, J. Differential Equations, 264, 6061–6081 (2018).

[8] T. Kobayashi and M. Misawa, L^2 boundedness for the 2D exterior problems for the semilinear heat and dissipative wave equations, RIMS Kôkyûroku, B42, 1–11 (2013).

[9] T. Kobayashi, M. Misawa and K. Nakamura Time space L^2 boundedness for the 2D Navier-Stokes equations and hyperbolic Navier-Stokes equations, Tsukuba J. Math., 43, 223–239 (2019).

[10] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math., 63, 193–248 (1934).

[11] M. Misawa, S. Okamura and T. Kobayashi, Decay property for the linear wave equations in two dimensional exterior domains, Differential and Integral Equations, 24, 941–964 (2011).

[12] T. Ogawa and S. Shimizu, The drift-diffusion system in two-dimensional critical Hardy space J. Funct. Anal., 255, 1107–1138 (2008).

[13] R. Racke and J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations I: Local well-posedness, Evol. Equ. Control Theory, 1, 195–215 (2012).

[14] R. Racke and J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations II: Global existence of small solutions, Evol. Equ. Control Theory, 1, 217–234 (2012).

[15] Y. Shibata, On the global existence of classical solutions of second order fully nonlinear hyperbolic equations with first order dissipation in the exterior domain, Tsukuba J. Math., 7, 1–68 (1983).

[16] M. Wiegner, Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbf{R}^n$, J. London. Math. Soc., 35, 303–313 (1987).