ナビエ・ストークス方程式の幾何的正則性判定法及び双曲型流数値計算

許　本源*

Geometric Regularity Criterion for the Navier-Stokes Equations and the Simulations for Hyperbolic Flow

Penyuan HSU*

１．はじめに

流体力学における基礎方程式のナビエ・ストークス方程式は非圧縮性粘性流体の運動を記述する方程式として広く用いられる．古くから理学,工学の各分野から数学的解析,実験及び数値的シミュレーションなど，色々な方法で盛んに研究されてきた．しかしながら，粘性により引き起こされる拡散効果及び強い非線形性の効果で，あるところの流体運動は局所的な構造が現れながら，全体の流体運動に複雑に影響される非局所性を持っている．そのため，例えば3次元ナビエ・ストークス方程式に対して，有限時間で解が爆発するか(時間大域的可解性）というミレニアム問題をはじめ，今なお解明されていない問題が多い．

この爆発問題に対して，数学解析的なアプローチは様々で，例えば弱解の正則性からの挑戦，時間局所的な解の延長可能性が挙げられる．そのほかフィールズ賞の受賞者である Fefferman 氏及び Constantin 氏が提案した幾何的正則性判定法は渦度の方向の振る舞いに着目し，渦度の方向が安定していると有限時間の爆発は起こらないという手法が現在の主流の一つになっている（[2]）．しかしこれらの結果は強い条件を仮定されたにもかかわらず，一部の領域でしか解明されていない.一方,計算科学においては数値シミュレーションで解の急遽増大などの漸近挙動及び局所的な構造の特徴を把握するための研究が進んでいるが，無限大や極限操作など数学解析固有な手法が扱えない．ほかにも血流及び竜巻など具体的な現象を解明するため，実験が設けられている．各分野ではそれぞれ多彩な途中成果が上げられたが，流体運動を解明するには異なる分野の協働及び分野を超える統合的な発想が望まれる．筆者は途中成果を踏まえて，実際に起きている現象への応用を意識しつつ科学計算で流体運動の振る舞いを考察し数学理論を構築してきた．具体的に「幾何的正則性判定法」など解の正則性及び関連問題の数学解析を行い，その結果を基に数値計算を展開し，成果を上げげた．その成果の概略を以下に述べる．

２．幾何的正則性判定法

二次元半平面において以下のナビエ・ストークス方程式のバックワードの解を考える．

$$\partial_t V + \mathrm{div}\ (V \otimes V) - \Delta V + \nabla p = 0, \mathrm{div}\ V = 0 \tag{1}$$

全平面の場合，渦度場についての強最大値原理より，過去無限時刻から２次元全平面で満たす解（マイルド解）は定数しかないことが知られているが（[6] [9]），半平面における粘着境界条件下では全く結果がなかった.粘着条件では境界上渦度が発生することによって，最大値原理から直接渦度場に対する先験的評価（アプリオリ評価）が得られない．そのため，筆者は最大値原理の代わりに，渦度場の境界条件に着目して解析することによってマイルド解は定数解しかないというリウヴィル型定理を構築できた([8]).

定理１（半平面における粘着境界条件下でのリウヴィル定理）

(V, p) は半平面における粘着境界条件下で(1)式をみたすとする．以下の仮定(2)から(5)をみたしていれば、Vは恒等的に０となる．

$$\sup_{-\infty<t<0}\left(\|V(t)\|_{C^{2+\mu}} + \|\partial_t V(t)\|_{C^{\mu}}\right) < \infty, \mu \in (0,1) \tag{2}$$

$$p = p_F + p_H \tag{3}$$

$$\sup_{-\infty<t<0}(-t)^{1/2}\left(\|V(t)\|_{\infty}\right) < \infty \tag{4}$$

$$\omega \geq 0 \tag{5}$$

(2)式と(4)式はそれぞれ速度Vに対する正則性の条件とＩ型爆発条件で、(5)式は渦度ωの方向に関する仮定である．(3)式は圧力pの構造についての条件で、p_Fとp_Hはそれぞれ対流圧力項とストークス圧力項という（ポアソン方程式とラプラス方程式の解である）．

定理１の応用として半空間の幾何的正則性判定法を確立した．

定理２（半空間における幾何的正則性判定法）

Vはナビエ・ストークス方程式の空間的に有界なマイルド解とする．Vは $\sup_{x,t}(-t)^{1/2}|V(t,x)| < \infty$ をみたすと仮定する．さらに渦度方向$\xi = \omega/|\omega|$が以下をみたすとき，Vは$t = 0$　において爆発しない：

ある$d > 0$, η (modulus of continuity) に対して，$(t, x), (t, y) \in \Omega_d = \{(t,x) \mid |\omega(t,x)| > d\}$のところに，

$$|\xi(t,x) - \xi(t,y)| \leq \eta\ (|x - y|) \tag{6}$$

(6)式は渦度方向に対する連続性の条件である．定理２は渦度方向をコントロールできればＩ型爆発の可能性を除外できると主張している．

現在に至るまでミレニアム問題に対して，爆発が起きないための十分条件が調べられた結果は様々あるが，その多くは速度など特定な量が小さければ爆発しないと言った条件である．それに対して，

*助教　数学教室
Assistant Professor, Dept. of Mathematics

Fefferman 氏らが 3 次元全空間で「渦度場の方向が空間変数に対して，一様に連続であれば，たとえ渦度が大きくても爆発しない」という幾何的正則性判定法と言われる判定法を提唱した．この判定法を半空間で粘着境界条件の場合に示すのは全空間の場合と比べると更なる多くの付帯条件が必要であったが，筆者の構築したリウヴィル型定理により幾何的正則性判定法を全空間と同じ仮定の下で初めて確立した．その後，圧力評価の構築ができ，有界領域でも全空間と同じ仮定の下で初めて確立した（[7]）．

3．双曲型流の数値計算

ナビエ・ストークス方程式の軸対称双曲型流（背景の線型的流れが xy 平面無限直方から流入し，z 軸の遠方に流出するような流れ）に対して，旋回のある場合と旋回なしの場合を考察し，前節の結果と比較しながら，有限要素法（[15][16][17][18]）で数値シミュレーションをし，旋回のある場合に特有な現象を観察した（[12]）．概念的に言うと，「爆発（的な流速）が生じる⇒軸上でのみ起こりうる」（[1]）と「爆発（的な流速）が生じる⇒旋回あり」（[19]）などの数学解析の代表結果から着想を得て数値計算を展開した．前節の定理２の結果「渦度が大きくても，渦度場の方向をある程度コントロールできたら（連続性），爆発解はありえない」ことに対し，本結果は渦度が大きいところに（図１の下の境界付近，[12]），ある程度不安定なら（渦度方向の著しい変化）（図２，[12]），速度が急遽増加するような不安定な現象が起こることを観察した（図３，[12]）．この結果は竜巻の２セル構造及び核付近の下降気流（[13]）に深く関連して，渦度場の瞬間的な挙動がどのように竜巻の構造に影響するかを新たな視点で突破口を切り開いた．

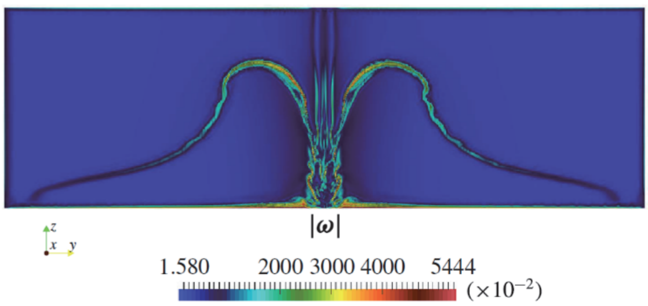

図１　渦度のノルムの断面図

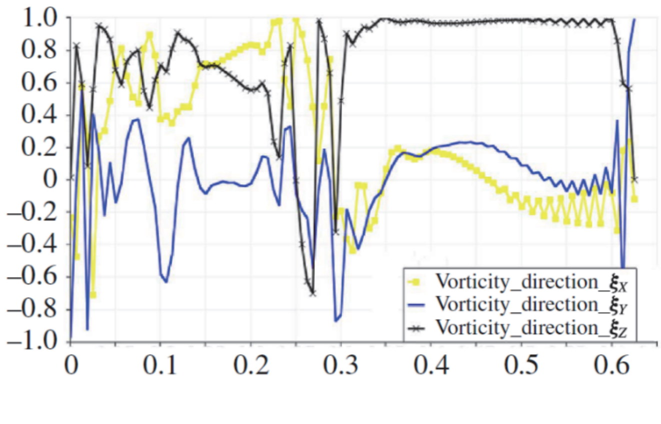

図２　渦度方向各成分．縦軸は値で横軸は下の境界との距離

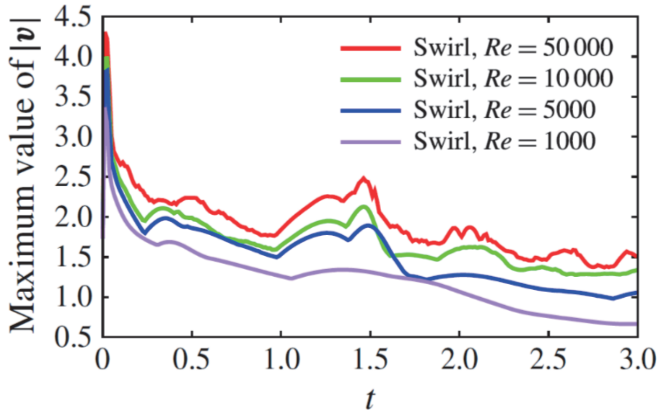

図３　旋回のある場合に速度ノルムの時間発展

4．そのほかのアプローチ

幾何的正則性判定法以外，解の正則性に関するほかのアプローチにも挑戦した．Serrin 条件を満たしている強解が存在するための初期値に対する必要十分条件及びその強解の一意性は，Leray 氏（以下ルレイ）及び Hopf 氏以来，様々な研究結果が上げられた（[14][10]）．筆者は最初の Serrin 条件と強解に対して，初期値に対する条件に時間変数の重みをつけることによって，時間的局所強解のクラスを拡張した．言い換えると，元々の強解のクラスに属さないような解も拡張された強解（重み付き強解）のクラスに入っていれば，同じような解析は可能で，延長可能性も考えられる．筆者は拡張された強解（重みつき強解）が存在するための必要十分条件を示し，同クラスでの一意性も考察した（[3][4][5]）．

そのほか，難問であった全空間におけるルレイ問題の一般化にも挑戦した（[11]）．３節に述べた双曲型流が背景流とした定常流は，例えばバーガーズ渦という非自明解が知られている．背景流が逆のパターン（ z 軸から流入し，他の二つの軸へ流出する）の場合は非自明解が存在しにくいと思われる．筆者が解に対する有界性以外の弱い減衰性を課すことによって，この場合に対して非自明解の非存在を初めて数学解析的に証明をあげた．爆発型自己相似解の構成問題であるルレイ問題は，等方的線形の流れを背景流とする解の存在問題に帰着される．従って筆者の考案した背景流を伴う定常ナビエ・ストークス方程式の解の存在問題は一般化されたルレイ問題とみなせる．背景流が違うとかなり異なってくるため，ルレイ問題（ルレイ方程式）を扱った多くの文献の方法（エネルギー法など）とは別に，ストークス半群をはじめ，新たな手法によって，リウヴィル型定理を構築することに成功した．

5．今後の展望

非線形楕円形方程式の空間全域における有界の解は定数解かといった問題に対し、ラプラス方程式の場合に、有界の解は定数解のみと知られ、リウヴィル定理と言われている。Fefferman 氏が提唱された幾何的正則性判定法を確立するためにふくらまし法（blow-up argument）を用い，3 次元ナビエ・ストークス方程式の解の正則性問題をリウヴィル型問題に帰着される．

これからの目標は様々な領域での幾何的正則性判定法の確立である．本質的に困難な点は任意の領域においてのストークス半群の

考察及び圧力に対するL∞ 評価の導出がまだ完全ではないということが挙げられる．領域の性質に合わせてL∞ 評価の導出がキーと考えている．別のアプローチとして，正則性問題に対し Serrin 氏が提唱した強解のアプローチ及び幾何的正則性判定法と関連している手法の開発も考えられる．

そのほか，竜巻構造の解明に向けた双曲型流の数値解析及び旋回を伴う軸対称双曲型流の渦度に関する解析を行う．双曲型流にある程度旋回が加わる場合は竜巻の 2 セル構造に深く関連している．前述幾何的正則性判定法など具体的な数学理論を基に、有限要素法で数値計算を行うことが本研究の手法である．時間平均速度ではなく、各瞬間の速度と渦度などの量に対する計算によって，全体的な印象だけでなく，瞬間的な漸近挙動をより理解することを目標とする．さらに，軸対称ではない場合も考察し，深く関連している大気現象の一つである竜巻の仕組みの解明及び日々重要視されてきた防災対策に貢献していきたい．

参考文献

[1] L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, 35, 771-831 (1982).

[2] P. Constantin, C. Fefferman, Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations, Indiana Univ. Math. J., 42, 775–789 (1993).

[3] R. Farwig, Y. Giga and P.-Y. Hsu, Initial values for the Navier-Stokes equations in spaces with weights in time, FUNKCIALAJ EKVACIOJ, 59, 199-216 (2016).

[4] R. Farwig, Y. Giga, and P.-Y. Hsu, The Navier-Stokes equations with initial values in Besov spaces of type B－1+3/q q,∞ , Journal of the Korean Mathematical Society, 54 (5), 1483-1504 (2017).

[5] R. Farwig, Y. Giga, and P.-Y. Hsu, On the continuity of the solutions to the Navier–Stokes equations with initial data in critical Besov spaces, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 198 (5), 1495-1511 (2019).

[6] Y. Giga, A remark on a Liouville problem with boundary for the Stokes and the Navier-Stokes equations, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 6, 1277–1289 (2013).

[7] Y. Giga, Z. Gu and P.-Y. Hsu, Continuous alignment of vorticity direction prevents the blow-up of the Navier–Stokes flow under the no-slip boundary condition, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 189, 111579 (2019).

[8] Y. Giga, P.-Y. Hsu and Y. Maekawa, A Liouville theorem for the planer Navier-Stokes equations with the no-slip boundary condition and its application to a geometric regularity criterion, Communications in Partial Differential Equations, 39, 1906-1935 (2014).

[9] Y. Giga, H. Miura, On vorticity directions near singularities for the Navier-Stokes flows with infinite energy, Comm. Math. Phys. 303, 289–300 (2011).

[10] E. Hopf, U¨ ber die Anfangswertaufgabe fu¨ r die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr, 4, 213–231 (1951).

[11] P.-Y. Hsu and Y. Maekawa, On nonexistence for stationary solutions to the Navier-Stokes equations with a linear strain, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 15, 317-333 (2013).

[12] P.-Y. Hsu, H. Notsu and T. Yoneda, A local analysis of the axisymmetric Navier-Stokes flow near a saddle point and no-slip flat boundary, Journal of Fluid Mechanics, 794, 444-459 (2016).

[13] T. Ishihara, S. Oh and Y. Tokuyama, Numerical study on flow fields of tornado-like vortices using the LES turbulence model, J. Wind Engng Ind. Aerodyn. 99, 239–248 (2011).

[14] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math., 63, 193–248 (1934).

[15] H. Notsu, Numerical computations of cavity flow problems by a pressure stabilized characteristic-curve finite element scheme, Trans. Japan. Soc. Comput. Engng Sci. 2008, 20080032 (2008).

[16] H. Notsu and M. Tabata, A combined finite element scheme with a pressure stabilization and a characteristic-curve method for the Navier–Stokes equations (in Japanese), Trans. Japan.
Soc. Ind. Appl. Maths 18, 427–445 (2008).

[17] H. Notsu and M. Tabata, Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Oseen equations, J. Sci. Comput. 65, 940–955 (2015).

[18] H. Notsu and M. Tabata, Error estimates of a stabilized Lagrange–Galerkin scheme for the Navier–Stokes equations, ESAIM: Proc. M2AN 50, 361–380 (2015).

[19] M. R. Ukhovskii and V. I. Iudovich, Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 32, 52-62 (1968).