

制約条件付き有限要素法による繊維強化複合材料の界面すべり解析

喜多村 竜太*

Constraint conditional finite element method for interfacial sliding simulation of fiber reinforced composite materials

Ryuta KITAMURA*

1. 緒言

セラミックスは耐熱性、耐摩耗性、耐食性などに優れるが、その脆弱性から単体での構造用材料用途は限定的であった。一方、このセラミックスをセラミックス繊維などで強化したセラミックス基化複合材料 (CMC ; Ceramic Matrix Composites) は、繊維架橋、繊維破断、繊維引抜け、界面はく離・すべり、き裂偏向などの微視損傷の発現により高靱化を実現した材料であり、従来の金属材料などでは適用困難だった航空宇宙分野などの高温環境下構造材料として期待されている^[1,2]。

この CMC に代表される繊維複合材料の界面すべりの接触問題には、従来、ペナルティ法などを用いた有限要素解析などが行われてきたが、これらの手法では繰返し計算を必要とするため、解析時間が長く、解析精度が繰返し数に依存することが問題視されてきた^[3]。そこで、著者らはこの問題に対して制約条件付き有限有限要素法 (CC-FEM: Constraint Conditional Finite Element Method) を提案した^[4]。同手法は繊維-母材界面に多重節点を導入し、節点変位の等価性や接触力のつりあい式を立てて、界面接触状態を定義するもので、従来手法と異なり、繰返し計算を必要としないため、精度向上および解析時間の短縮が期待できる。しかし、これらの定式化は界面方向と負荷方向が同一な On-axis 界面すべりを対象としたもので、実材料における繊維配向や繊維径変動、すなわち、Off-axis 界面すべりを考慮したものではなかった。

そこで本研究では、この CC-FEM を用いて Off-axis 界面すべり状態を定式化し、有限要素解析を行った。また、同手法による解析結果を汎用解析および理論モデルと比較することでその妥当性を検証するとともに、Off-axis 界面すべりの影響について検証した。

2. 解析方法

2-1 接触解析における剛性方程式

接触力を取り入れた仮想仕事の原理は、一般的に次式のように与えられる。

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \left(\iiint_V p_i \delta u_i dV + \iint_{S_c} T_i \delta u_i dS_c \right) - \iint_{S_c} R_i \delta u_i dS_c = 0 \quad (1)$$

ここで、 σ_{ij} は応力、 δu_i は仮想変位、 $\delta \varepsilon_{ij}$ は仮想ひずみであり、添字 i, j は半径方向 r およびすべり方向 z のいずれかを示す。また、図 1 に示すように、 S_c は接触面 C の表面積、 S_c は接触面 C 以外の力学的境界の表面積、 V は体積である。ここで、式(1)の第 1 項は仮想ひずみ $\delta \varepsilon_{ij}$ による弾性仕事、第 2 項は体積力 p_i による仕事と表面力 T_i による仕事の和、第 3 項は接触力 R_i による仕事を示している。

式(1)を離散化し、各要素上の節点に等価節点力を定義すると、通常の有限要素法の剛性方程式に接触力を加えた次式が導かれる。

$$[K]\{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (2)$$

ここで、 $[K]$ は式(1)の第 1 項から導かれる全体剛性マトリックス、 $\{\Delta u\}$ は節点変位増分、 $\{\Delta f\}$ は第 2 項から導かれる節点荷重増分である。さらに、 $\{\Delta R\}$ は第 3 項から導かれる接触力増分であり、未知変数として扱う。

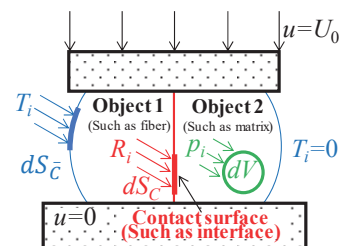


図 1 2つの物体間に働く接触力

*特別助教 機械工学科
Assistant Professor, Dept. of Mechanical Engineering

2-2 界面接触状態の定義

CMC の強化材として用いられるセラミックス繊維などは局所的に径が変動することがあり、はく離界面において Off-axis 方向の界面すべりが生じると予想される。そこで、以下のような損傷過程を想定して界面接触状態（制約条件）を定義した。

- 1) On-axis 界面すべりと同じく、まず繊維破断または母材き裂が発生する。
- 2) その周りに界面はく離が起こる。
- 3) 続いて界面摩擦を通じて力学的つり合い状態に達するまで繊維-母材間で Off-axis 方向に界面すべりが生じる。

以上のような状態を図2に示すような、(a) 固着状態、(b) 界面はく離、摩擦すべりが生じた後、静止した状態（以降、界面すべり状態と呼ぶ）、(c) 母材き裂、および(d) 繊維破断を伴う界面すべり状態の4種類^[1,3,4]の非損傷・損傷状態として定義した。なお、節点は要素間に複数個配置されており、節点1, 3は繊維側、2, 4は母材側にある。図2(a)は非損傷状態であり、4つの節点が固着し、常に同じ位置にある。また、図1(b),(c),(d)は、負荷方向（ z 方向）に対して繊維と母材の節点が角度 α （反時計回りを正）を持った Off-axis 界面に沿って相対的な界面すべりを起こした状態である。

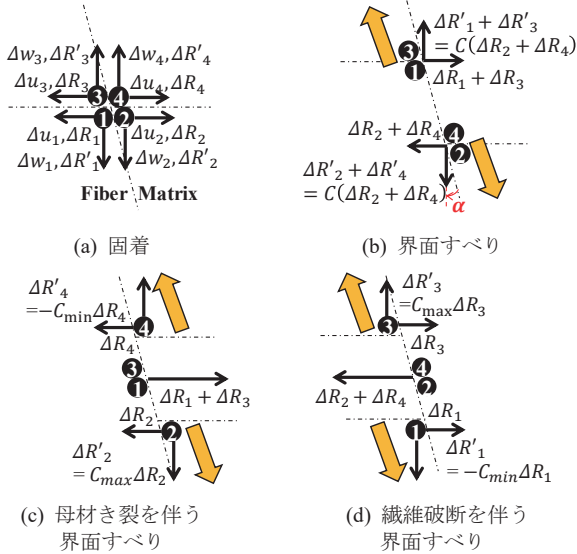


図2 CC-FEMにおける界面接触状態のモデル化

2-3 界面接触条件（制約条件）

図2の各界面接触状態において、制約条件（変位増分の等価性、接触力増分のつり合い式）はそれぞれ以下になる。

(a) 固着（図2(a)）

界面の同じ位置で節点1~4が固着しているため、それらの変位は等しく、接触力の和は0であるので、制約条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta u_2 = \Delta u_3 = \Delta u_4 \\ \Delta w_1 &= \Delta w_2 = \Delta w_3 = \Delta w_4 \\ \Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4 &= 0 \\ \Delta R'_1 + \Delta R'_2 + \Delta R'_3 + \Delta R'_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 Δu および Δw は節点1~4の r および z 方向変位増分、 ΔR および $\Delta R'$ は r および z 方向の接触力増分を表す。

(b) 界面すべり（図2(b)）

図2(b)の Off-axis 界面すべりでは接触力と摩擦力の作用方向が異なるため、図3のように r および z 方向の接触力をすべり方向およびすべり垂直方向に分解し、クーロン摩擦則を適用させる。即ち、

$$(\Delta R'_1 + \Delta R'_3)\cos\alpha - (\Delta R_1 + \Delta R_3)\sin\alpha = \mu\{(\Delta R_1 + \Delta R_3)\cos\alpha + (\Delta R'_1 + \Delta R'_3)\sin\alpha\} \quad (4)$$

$$\therefore (\Delta R'_1 + \Delta R'_3) = C(\Delta R_1 + \Delta R_3) \quad (5)$$

となる。ここで、 C は等価摩擦係数であり、

$$C = C_{\max} = (\mu + \tan\alpha)/(1 - \mu\tan\alpha) \quad (6)$$

と定義される。これは、図2(b)に示すように界面で繊維と母材が互いに押し合う方向に接触力が働く場合、角度 α により摩擦係数 μ が見掛け上 $C=C_{\max}$ に増加することを意味し、 α の増加とともに摩擦力は大きくなる。

一方、界面が互いに離れようとする方向に接触力が作用するとき、等価摩擦係数 C は、

$$C = C_{\min} = (\mu - \tan\alpha)/(1 + \mu\tan\alpha) \quad (7)$$

となり、 α の増加とともに摩擦力は小さくなる。以上より、界面すべり状態（図2(b)）の界面接触条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta u_3 \quad \Delta u_2 = \Delta u_4 \quad \Delta w_1 = \Delta w_3 \quad \Delta w_2 = \Delta w_4 \\ \tan\alpha &= (\Delta u_2 - \Delta u_1)/(\Delta w_1 - \Delta w_2) \\ (\Delta R'_1 + \Delta R'_3) &= C(\Delta R_1 + \Delta R_3) \\ (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) &= C(\Delta R_2 + \Delta R_4) \\ (\Delta R_1 + \Delta R_3) + (\Delta R_2 + \Delta R_4) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

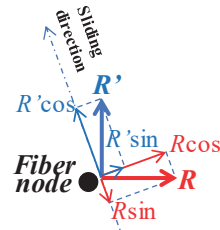


図3 off-axis 界面における接触力

同様に、図2(c)および(d)の制約条件は次式で与えられる。

(c) 母材き裂を伴う界面すべり（図2(c)）

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta u_3 \quad \Delta w_1 = \Delta w_3 \\ \tan\alpha &= \frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{\Delta w_1 - \Delta w_2} = \frac{\Delta u_3 - \Delta u_1}{\Delta w_1 - \Delta w_3} \\ \Delta R'_2 &= C_{\max}\Delta R_2 \quad R'_4 = -C_{\min}\Delta R_4 \\ (\Delta R_1 + \Delta R_3) + \Delta R_2 + \Delta R_4 &= 0 \\ (\Delta R'_1 + \Delta R'_3) + \Delta R'_2 + \Delta R'_4 &= 0 \\ \Delta R'_1 + \Delta R'_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

(d) 繊維破断を伴う界面すべり (図 2(d))

$$\begin{aligned}
\Delta u_2 &= \Delta u_4 \quad \Delta w_2 = \Delta w_4 \\
\tan \alpha &= \frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{\Delta w_1 - \Delta w_2} = \frac{\Delta u_4 - \Delta u_1}{\Delta w_1 - \Delta w_4} \\
\Delta R'_1 &= -C_{\min} \Delta R_1 \quad R'_3 = C_{\max} \Delta R_3 \\
\Delta R_1 + \Delta R_3 + (\Delta R_2 + \Delta R_4) &= 0 \\
\Delta R'_1 + \Delta R'_3 + (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) &= 0 \\
\Delta R'_2 + \Delta R'_4 &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

なお、式(3),(8)~(10)の界面接触条件において、 $\alpha=0[^\circ]$ とくと On-axis の制約条件と一致し、上記の Off-axis 界面接触条件は On-axis を包含する。

式(11)の 1 行目を書き下すと

$$K_{11}\Delta u_1 + K_{12}\Delta w_1 + K_{13}\Delta u_2 + K_{14}\Delta w_2 + K_{15}\Delta u_3 + K_{16}\Delta w_3 + K_{17}\Delta u_4 + K_{18}\Delta w_4 = \Delta f_{r1} + \Delta R_1 \tag{12}$$

となる。さらに、表 1 の式を用いると、

$$K_{11}\Delta u_1 + K_{12}\Delta w_1 + K_{13}\{(\Delta w_1 - \Delta w_2)\tan \alpha + \Delta u_1\} + K_{14}\Delta w_2 + K_{15}\Delta u_1 + K_{16}\Delta w_1 + K_{17}\{(\Delta w_1 - \Delta w_2)\tan \alpha + \Delta u_1\} + K_{18}\Delta w_4 = \Delta f_{r1} - (\Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4) \tag{13}$$

$$\therefore (K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17})\Delta u_1 + \{(K_{12} + K_{16}) + (K_{13} + K_{17})\tan \alpha\}\Delta w_1 + \{(K_{14} + K_{18}) - (K_{13} + K_{17})\tan \alpha\}\Delta w_2 + \Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4 = \Delta f_{r1} \tag{14}$$

のように書き換えられる。式(14)は $\{\Delta u_c\}^T = \{\Delta u_1, \Delta w_1, \Delta w_2, \Delta R_2, \Delta R_3, \Delta R'_3, \Delta R_4, \Delta R'_4\}^T$ 中の 8 つの未知変数の内、6 つの未知変数 $\Delta u_1, \Delta w_1, \Delta w_2, \Delta R_2, \Delta R_3, \Delta R_4$ で表わされている。また、2~8 行目も $\{\Delta u_c\}$ 中の 8 つの変数のみを使って表すことができるため、式(11)の剛性方程式は

$$\begin{bmatrix}
K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17} & (K_{12} + K_{16}) + (K_{13} + K_{17})\tan \alpha & 1 & (K_{14} + K_{18}) - (K_{13} + K_{17})\tan \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 \\
K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27} & (K_{22} + K_{26}) + (K_{23} + K_{27})\tan \alpha & +C & (K_{24} + K_{28}) - (K_{23} + K_{27})\tan \alpha & 0 & 1 & +C & 0 \\
K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37} & (K_{32} + K_{36}) + (K_{33} + K_{37})\tan \alpha & -1 & (K_{34} + K_{38}) - (K_{33} + K_{37})\tan \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47} & (K_{42} + K_{46}) + (K_{43} + K_{47})\tan \alpha & -C & (K_{44} + K_{48}) - (K_{43} + K_{47})\tan \alpha & 0 & 0 & -C & 1 \\
K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57} & (K_{52} + K_{56}) + (K_{53} + K_{57})\tan \alpha & 0 & (K_{54} + K_{58}) - (K_{53} + K_{57})\tan \alpha & -1 & 0 & 0 & 0 \\
K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67} & (K_{62} + K_{66}) + (K_{63} + K_{67})\tan \alpha & 0 & (K_{64} + K_{68}) - (K_{63} + K_{67})\tan \alpha & 0 & -1 & 0 & 0 \\
K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77} & (K_{72} + K_{76}) + (K_{73} + K_{77})\tan \alpha & 0 & (K_{74} + K_{78}) - (K_{73} + K_{77})\tan \alpha & 0 & 0 & -1 & 0 \\
K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87} & (K_{82} + K_{86}) + (K_{83} + K_{87})\tan \alpha & 0 & (K_{84} + K_{88}) - (K_{83} + K_{87})\tan \alpha & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\Delta u_1 \\
\Delta w_1 \\
\Delta w_2 \\
\Delta R_2 \\
\Delta R_3 \\
\Delta R'_3 \\
\Delta R_4 \\
\Delta R'_4
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\Delta f_{r1} \\
\Delta f_{z1} \\
\Delta f_{r2} \\
\Delta f_{z2} \\
\Delta f_{r3} \\
\Delta f_{z3} \\
\Delta f_{r4} \\
\Delta f_{z4}
\end{Bmatrix} \tag{15}$$

すなわち、 $[K_c]$ を変形後の剛性マトリックス、 $\{\Delta u_c\}$ を接触力を含む変位ベクトルとして

$$[K_c]\{\Delta u_c\} = \{\Delta f\} \tag{16}$$

のように変形できる。この式(16)をガウスの消去法などで数値的に解くことで、 $\{\Delta u_c\}$ 、すなわち $\Delta u_1, \Delta w_1, \Delta w_2, \Delta R_2, \Delta R_3, \Delta R'_3, \Delta R_4, \Delta R'_4$ が直接求められる。また、他の未知変位 $\Delta u_2, \Delta u_3, \Delta w_3, \Delta u_4, \Delta w_4$ および未知接触

2-4 制約条件付き有限要素法の仕組み

制約条件 (式(3), (8), (9), (10)など) 中の変位の等価性の式 ($\Delta u_1 = \Delta u_2 = \Delta u_3 = \Delta u_4$ など) より、いくつかの計算すべき未知変位増分 Δu を削減できるため、この削減分を未知接触力 ΔR に充てることができる。例えば、図 2(b)の界面すべり状態の場合、式(8)より全ての未知変数は表 1 に示すように、8 つの変数 (3 つの変位増分 $\Delta u_1, \Delta w_1, \Delta u_2$ および 5 つの接触力 $\Delta R_2, \Delta R_3, \Delta R'_3, \Delta R_4, \Delta R'_4$) で表すことができる。

ここで、式(2)の剛性方程式のある多重 (4 重) 節点の箇所のみを書き出すと、 K_{ij} ($i, j=1\sim 8$) を剛性マトリックス成分として、

$$\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{18} \\
K_{21} & K_{22} & K_{23} & & \\
K_{31} & K_{32} & K_{33} & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
K_{81} & & & & K_{88}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\Delta u_1 \\
\Delta w_1 \\
\Delta w_2 \\
\vdots \\
\Delta w_4
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\Delta f_{r1} \\
\Delta f_{z1} \\
\Delta f_{r2} \\
\vdots \\
\Delta f_{z4}
\end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix}
\Delta R_1 \\
\Delta R'_1 \\
\Delta R_2 \\
\vdots \\
\Delta R'_4
\end{Bmatrix} \tag{11}$$

となる。ここで、未知変数は $\Delta u_1 \sim \Delta w_4, \Delta R_1 \sim \Delta R'_4$ の計 16 個であるが、方程式は 8 個 (式(11)は 8 行) であり、このままでは全ての未知変数を求めることはできない。そこで、制約条件 (式(8)) を用いて式(11)を変形し、接触力項 $\{\Delta R\}$ を左辺に組み込むことを考える。

力 $\Delta R_1, \Delta R'_1, \Delta R'_2$ は、表 1 の式を用いて求めることができる。

以上のように、接触条件により計算すべき未知変数が削減できるため、剛性方程式の接触力項 $\{\Delta R\}$ を左辺に組み込むことができる。これにより繰返し計算を必要とせず、1 回の計算で変位解を得られるため、CC-FEM では解析時間の短縮および精度の向上が期待できる。

表1 接触条件による未知変数の削減 (界面すべりの場合)

$\{\Delta u_c\}$	変位 $\Delta u, \Delta w$	接触力 $\Delta R, \Delta R'$
Δu_1	Δu_1	$\Delta R_1 = -(\Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4)$
Δw_1	Δw_1	$\Delta R'_1 = -(\Delta R'_2 + \Delta R'_4) - \Delta R'_3 = -C(\Delta R_2 + \Delta R_4) - \Delta R'_3$
Δu_2	$\Delta u_2 = \Delta u_1 + (\Delta w_1 - \Delta w_2)\tan \alpha$	ΔR_2
Δw_2	Δw_2	$\Delta R'_2 = (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) - \Delta R'_4 = C(\Delta R_2 + \Delta R_4) - \Delta R'_4$
ΔR_3	$\Delta u_3 = \Delta u_1$	ΔR_3
$\Delta R'_3$	$\Delta w_3 = \Delta w_1$	$\Delta R'_3$
ΔR_4	$\Delta u_4 = \Delta u_1 + (\Delta w_1 - \Delta w_2)\tan \alpha$	ΔR_4
$\Delta R'_4$	$\Delta w_4 = \Delta w_2$	$\Delta R'_4$

※ $\{\Delta u_c\}$ は式(16)から直接求める。すべての変位 $\Delta u, \Delta w$ は $\Delta u_1, \Delta w_1, \Delta w_2$ で表せる。全ての接触力 $\Delta R, \Delta R'$ は $\Delta R_2, \Delta R_3, \Delta R'_3, \Delta R_4, \Delta R'_4$ で表せる。

2-5 理論界面すべりモデル

CMCは焼成後の冷却過程で熱ひずみを生じ、無負荷状態でも繊維-母材界面に締付け応力が働く^[8,9]。この状態で負荷を与えると、締付け応力が徐々に緩くなって界面すべりが生じるが、そのすべり抵抗はクーロン摩擦力によって決定される。Chiangはこのような現象も界面すべりの一形態と見なし、熱ひずみおよびポアソン効果を考慮した理論界面すべりモデルを提案している^[9]。

Chiangは母材き裂面($z=0$)周りの界面すべり領域($0 < z \leq L_d$)における繊維、母材の負荷方向応力 $(\sigma_z)_f$ 、 $(\sigma_z)_m$ および界面せん断応力 τ_i を

$$(\sigma_z)_f = \frac{\sigma}{V_f} - \frac{\alpha v_f(\sigma - \bar{\sigma})}{V_f(\alpha v_f + \gamma v_m)}(1 - e^{-\lambda z}) \quad (16)$$

$$(\sigma_z)_m = \frac{\alpha v_f(\sigma - \bar{\sigma})}{V_m(\alpha v_f + \gamma v_m)}(1 - e^{-\lambda z}) \quad (17)$$

$$\tau_i = \frac{r_f \lambda \alpha v_f(\sigma - \bar{\sigma})}{2 V_f(\alpha v_f + \gamma v_m)} e^{-\lambda z} \quad (18)$$

と与えている。また、固着領域($z \geq L_d$)では、

$$(\sigma_z)_f = [(\sigma_z)_f(L_d) - (\sigma_z)_f(\infty)]e^{-\varrho(z-L_d)/r_f} + (\sigma_z)_f(\infty) \quad (19)$$

$$(\sigma_z)_m = \sigma/V_m - \gamma\{[(\sigma_z)_f(L_d) - (\sigma_z)_f(\infty)]e^{-\varrho(z-L_d)/r_f} + (\sigma_z)_f(\infty)\} \quad (20)$$

$$\tau_i = (\varrho/2)[(\sigma_z)_f(L_d) - (\sigma_z)_f(\infty)]e^{-\varrho(z-L_d)/r_f} \quad (21)$$

と与えている。さらに、 r 方向応力 (σ_r) および θ 方向応力 (σ_θ) は

$$(\sigma_r)_f = (\sigma_\theta)_f = \frac{\alpha v_f(\sigma_z)_f - v_m(\sigma_z)_f}{1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)} = q_0 \quad (22)$$

$$(\sigma_r)_m = [(r_m/r)^2 - 1]\gamma q_0 \quad (23)$$

$$(\sigma_\theta)_m = [- (r_m/r)^2 - 1]\gamma q_0 \quad (24)$$

と与えている。ただし、

$$\bar{\sigma} = -\frac{V_f q_i}{\alpha v_f} [1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)] \quad (25)$$

$$q_i = \frac{(\alpha_f - \alpha_m)E_m \Delta T}{(1 + v_m) + \alpha(1 - v_f)} \quad (26)$$

$$\lambda = \frac{2\mu}{r_f} \kappa = \frac{2\mu}{r_f} \frac{\alpha v_f + \gamma v_m}{1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)} \quad (27)$$

$$(\sigma_z)_f(\infty) = \frac{1 + 2v_m \kappa}{V_m[\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)]} \sigma + \frac{(\alpha_m - \alpha_f)\Delta T}{\alpha + \gamma + 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)} E_m \quad (28)$$

$$(\sigma_z)_m(\infty) = \frac{\alpha(1 + 2v_f \kappa)}{V_m[\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)]} \sigma - \frac{\gamma(\alpha_m - \alpha_f)\Delta T}{\alpha + \gamma + 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)} E_m \quad (29)$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{2G_m[\alpha + \gamma + 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)]}{E_m \ln(\bar{R}/r_f)}} \quad (30)$$

$$\ln(\bar{R}/r_f) = \frac{2\ln V_f + V_m(3 - V_f)}{4V_m^2} \quad (31)$$

$$\alpha = E_m/E_f \quad (32)$$

$$\gamma = V_f/V_m \quad (33)$$

ここで、 E_f, E_m はヤング率[MPa]、 v_f, v_m はポアソン比[-]、 α_f, α_m は熱膨張係数[K⁻¹]、 V_f, V_m は体積率[-]、 r_f, r_m は外半径[mm]、 $(\sigma_z)_f(\infty), (\sigma_z)_m(\infty)$ は $z=\infty$ における z 方向応力[MPa]であり、添字の f, m は繊維および母材を示す。また、 σ は負荷応力[MPa]、 ΔT は温度変化[K]、 q_i および q_0 は熱ひずみおよびポアソン効果による締付け応力[MPa]、 μ は摩擦係数[-]、 r は任意の r 座標[mm] ($r_f \leq r \leq r_m$)、 \bar{R} は有効半径[mm] (母材の z 方向応力は $r=\bar{R}$ に集中し、 $r_f \leq r \leq \bar{R}$ の領域のみにせん断応力が働く)である。本研究ではこの理論モデルの応力分布をCC-FEMおよびANSYSの解析結果と比較した。

2-6 要素分割および境界条件

従来の論文^[10-15]でも指摘されているように、CMCでは界面はく離規模が大きく、よって、繊維破断点周りの応力集中は著しく小さく、繊維間の相互干渉も小さい。そこで、本研究では円筒状の母材(外半径 $r_m = 0.011$ [mm])に単繊維1本(外半径 $r_f = 0.0055$ [mm])を埋め込んだ長さ $L/2 = 2.5$ [mm]のCMCを解析対象とし、図4のように要素分割を行った。要素は軸対称三角形要素を用い、CC-FEMの節点数は1250、要素数は1000とした。また、ANSYSでは節点数752、要素数1000とした。そして、母材き裂面($z = 2.5$ [mm])から長さ $L_d = 1.0$ [mm]のOn-axis界面すべり状態を適用させた後、繊維側の節点に変位境界条件を与えて解析を行った。

図4にOff-axis界面すべり解析に用いた有限要素モデルの模式図を示す。要素分割では母材き裂面の位置($z = 2.5$ [mm])における繊維径を $r_f = 0.0055$ [mm]とし、 $z = 2.5$ [mm]を中心に高さ Δr 、長さ Δz の凸部が存在するような繊維形状を便宜上想定した。ここで、 $\Delta r = (r_m - r_f)/4 = 1.375$ [μ m]]については一定とし、 Δz の値を $\Delta z = 0.5 \sim 2.0$ [mm]と変化させた。これはOff-axis角度 $\alpha = 0.158 \sim 0.039$ [°]に相当する。また、Off-axis角度の増加に伴い、等価摩擦係数も $C = 0.0528 \sim 0.0507$ のようにそれぞれ増加する。

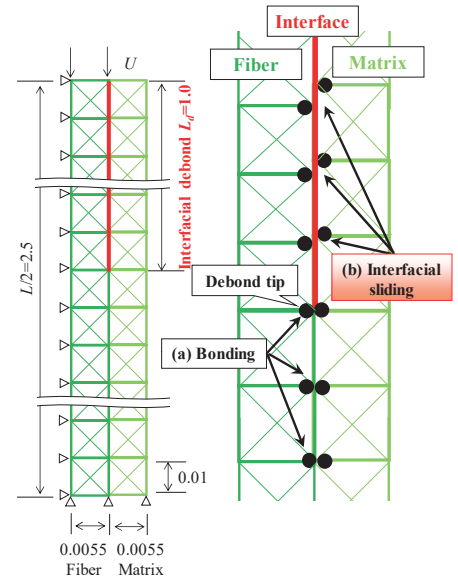


図4 On-axis界面すべりの解析モデル

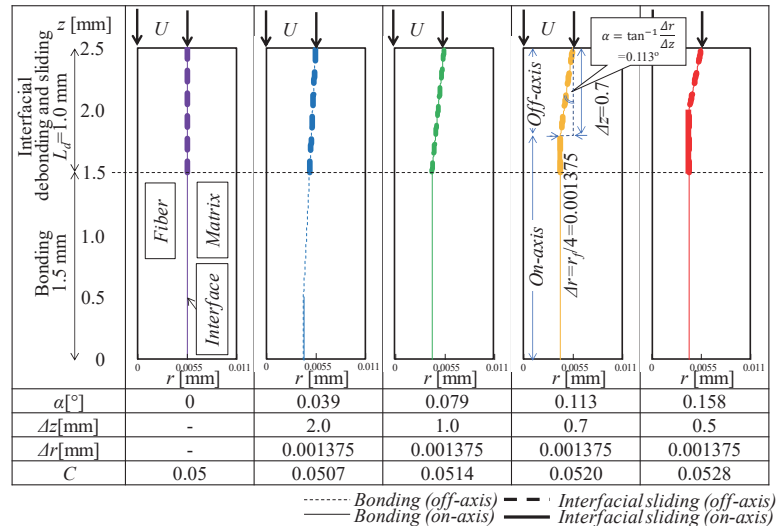


図5 Off-axis 界面すべりの解析モデル

3. 解析結果および考察

3.1 On-axis 界面すべり

On-axis 界面すべり ($\alpha=0[^\circ]$, 図4および図5左) の場合の CC-FEM および ANSYS による応力分布の比較を図6に示す。ここでは、便宜上、ヤング率 $E_f=E_m=200[\text{GPa}]$, ポアソン比 $\nu_f=\nu_m=0.2[-]$, 摩擦係数 $\mu=0.05[-]$, 温度変化 $\Delta T=0[\text{K}]$, 界面すべり長さ $L_d=1.0[\text{mm}]$ とし, 境界条件として圧縮負荷を想定した。

図6(a)より, CC-FEM では母材き裂面 ($z=0$) から $1[\text{mm}]$ 以上の固着領域 ($1.0 \leq z \leq 2.5$) において, σ_r および σ_m の値は一致し, 一定で推移していることが確認できる。一方, き裂面から $1[\text{mm}]$ 以内の界面すべり領域 ($0 \leq z \leq 1.0$) において, σ_m は母材き裂面から非線形の応力回復を示し, 一方で σ_r は母材き裂面で負の最大値を示した後, 大きく減少している。これは, 母材き裂により, 本来, 母材側で受け持つべき荷重を繊維側で全て受け持つためである。また, はく離先端近傍において, 繊維および母材の応力が急激に変化している。これは, 界面の接触状態が界面すべりから固着へ変化していることに起因する。

一方, 図6(b)に示すように, 固着領域において, σ_r および σ_{θ} は共に 0 である。これは熱応力を初期に与えておらず, 繊維と母材のポアソン比を同値 ($\nu_f=\nu_m=0.2$) としたためである。また, すべり領域では, σ_r および σ_{θ} の分布は非線形を描き, 繊維および母材に r 方向の圧縮応力が働いている。これは, 繊維と母材の z 方向のひずみに差異が生じ, ポアソン効果によって r 方向のひずみにも差異が生じた結果である。また, 母材側の σ_r および σ_{θ} については, r 座標の位置によりひずみ分布が変化し, 外側の要素の応力が小さくなった。

さらに, ANSYS による解析結果 (図6の破線) および Chiang の理論式 (図6の一点破線) でも, すべり領域において応力分布は非線形を示すことが確認できる。また, z , r および θ 方向いずれの応力分布に関しても良好な一致を示しており, On-axis 界面すべりににおいて CC-FEM の定式化は妥当であるといえる。

3.2 Off-axis 界面すべり

図7(a), (b)に CC-FEM および ANSYS による Off-axis 界面すべり解析結果を示す。両者の σ_r および σ_m の応力分布はほぼ一致し, σ_r および σ_{θ} も同様に一致した。以上から, 本研究で提案した CC-FEM による Off-axis 界面すべりの定式化は妥当であるといえる。

また, 図7の応力分布の変化に着目してみると, Off-axis 界面すべり状態を設けることで, その応力回復の傾きが大きくなっていることが確認できる。これは, 繊維径が変化する領域 (Off-axis 界面) において, 界面が角度 α だけ傾くことにより等価摩擦係数 C が大きくなり, 母材き裂面からの母材応力の回復が圧縮側へより早く生じるためである。また, σ_r および σ_{θ} においても同様に急激な応力変化が生じる領域が確認された。以上のように, Off-axis 界面において等価摩擦係数 C が増加することで, 摩擦力の急激な変化が生じ, いわゆる, 機械的結合 (アンカー効果) が働いていると言える。

次に, 同様な Off-axis 角度条件に対し, 摩擦係数を $\mu=0.03$ および 0.1 と変化させて解析を行った。解析結果のうち, σ_z の分布を図8に示す。図7(a)および図8(a), (b)に示すように, μ が大きくなるにつれて母材応力の圧縮側への回復がより早く生じている。また, 図8(a)に示すように, μ が小さいときは $\alpha=0.0788[^\circ]$ と $0.158[^\circ]$ の応力分布の差が大きくなる。すなわち, μ が小さければ μ に対する等価摩擦係数 C の割合 ($=C/\mu$) が大きく変化するために, 両者の差がより顕在化する。換言すると, μ が小さいときは, 界面の傾きによるアンカー効果がより強く現れるようにといえる。

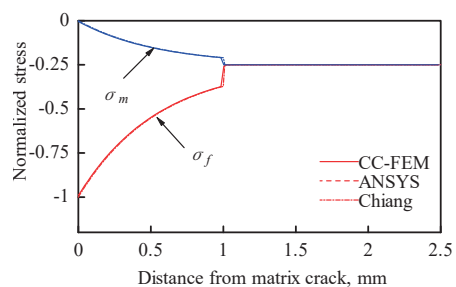
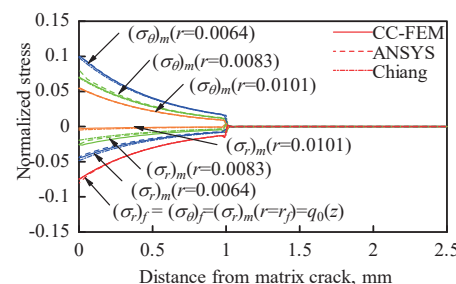
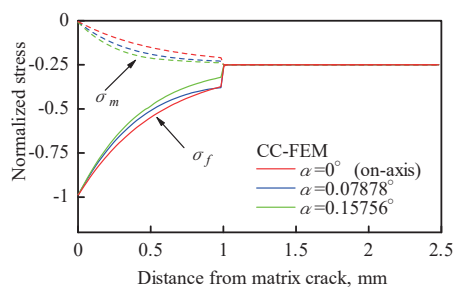
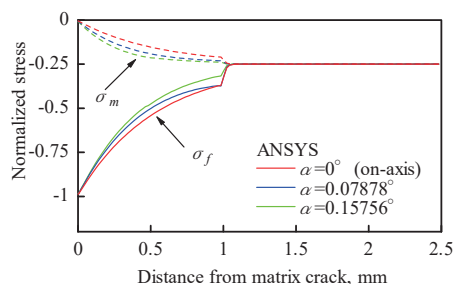
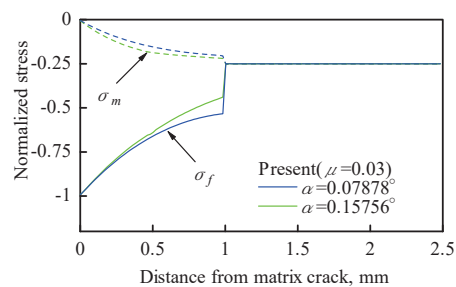
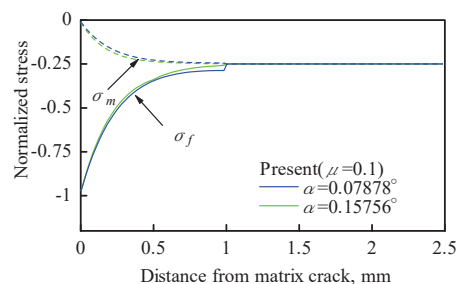
(a) σ_z (b) σ_r, σ_θ (a) CC-FEM ($\mu=0.05$)(b) ANSYS ($\mu=0.05$)(a) CC-FEM ($\mu=0.03$)(b) CC-FEM ($\mu=0.1$)

図6 On-axis 界面すべり解析の応力分布
(CC-FEM, ANSYS, 理論モデル)

図7 Off-axis 界面すべり解析の応力分布
(CC-FEM, ANSYS)

図8 Off-axis 界面すべり解析の応力分布にお
ける摩擦係数の影響 (CC-FEM)

4. 結言

本研究では、制約条件付き有限要素モデル (CC-FEM) による CMC の Off-axis 界面すべり問題を定式化した。まず、単繊維が埋め込まれた CMC への圧縮負荷を対象に、On-axis 界面すべりによる CC-FEM による解の妥当性を ANSYS および理論式による解との比較から確認した。続いて、Off-axis 界面すべりを CC-FEM によって解析した結果、母材き裂面からの応力回復が早くなり、静摩擦係数 μ が小さいほど角度 α の影響、すなわち、Off-axis の影響がより強く現れることが確認できた。

以上のように、本研究で提案した CC-FEM は、On-axis 界面すべりだけでなく、Off-axis 界面すべり、繊維破断、母材き裂などの損傷を多重節点と制約条件により的確に定義でき、複合材料の損傷問題における様々な物理現象の再現が期待できる。

参考文献

- [1] 邊吾一他, 複合材料活用辞典 (初版), 産業調査会事典出版センター, 719-735 (2001).
- [2] 山口章三郎他, 複合材料と界面 (初版), 材料技術研究協会, 347-352 (1988).
- [3] P.H. Geubelle and J. S. Baylor, Impact-induced delamination of composites: a 2D simulation, Composites Part B: Engineering, 29(5), 589-603 (1998).
- [4] 合田公一, 大木順司, 玉置純一, 鈴木道之, セラミックス基繊維強化複合材料の界面接触モデルによる FEM 定式化と強度シミュレーション, 日本複合材料学会誌, 31(4), 184-191 (2005).
- [5] 喜多村竜太, 合田公一, セラミックス基複合材料の損傷モデルの検証と繰返し変形挙動解析, 日本機械学会論文集, 80 (812), SMM0080 (2014).
- [6] 喜多村竜太, 合田公一, 界面はく離をとまなうセラミックス基複合材料への制約条件付き有限要素モデルの適用, 日本接着学会誌, 50(12), 428-434 (2014).
- [7] 喜多村竜太, 山口雄大, 合田公一, 制約条件付き有限要素法による Off-axis 界面すべり問題の定式化, 日本複合材料学会誌, 41(4), 106-111 (2015).
- [8] Y.C. Gao and Y.W. Mai, Fracture of fiber-reinforced materials, Journal of Applied Mathematics and Physics, 39(4), 550-572 (1988).
- [9] Y.C. Chiang, On a matrix cracking model using Coulomb's friction law, Engineering Fracture Mechanics, 74(10), 1602-1616 (2007).
- [10] H. Cao and M.D. Thouless, Tensile tests of ceramic-matrix composites: Theory and experiment, Journal of The American Ceramic Society, 73(7), 2091-2094 (1990).
- [11] W.A. Curtin, Theory of mechanical properties of ceramic-matrix composites, Journal of the American Ceramic Society, 74(11), 2837-2845 (1991).
- [12] S.L. Phoenix and R. Raj, Scalings in fracture probabilities for a brittle matrix fiber composite, Acta Metallurgica et Materialia, 40(11), 2813-2828 (1992).
- [13] J.M. Neumeister, A constitutive law for continuous fiber-reinforced brittle-matrix composites with fiber fragmentation and stress recovery autore, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 41(8), 1383-1404 (1993).
- [14] A. Kelly and W.R. Tyson, Tensile properties of fibre-reinforced metals: Copper/tungsten and copper/molybdenum, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 13(6), 329-338 (1965).
- [15] J.K. Kim and Y.W. Mai, Engineered interfaces in fiber reinforced composites (1st ed), ELSEVIER SCIENCE Ltd, Kidlington Press (1998).