

不確かさを含む大規模複合システムに対する 分散可変ゲインロバストコントローラの構成法

永井 駿也*

A Design Method of the Decentralized Variable Gain Robust Controller for Uncertain Large-Scale Interconnected Systems

Shunya NAGAI*

1. 緒言

制御理論に基づいて制御系設計を行うには、制御対象のモデリングを行う必要がある。しかしながら、制御対象を正確にモデリングすることは非常に困難であり、制御対象とその数式モデルとの間には必ず何らかの「不確かさ」が存在する。この不確かさを無視して制御系設計を行うと、望ましい制御性能を得られないだけでなく、最悪の場合、制御系が不安定となってしまう可能性がある。したがって、このような制御対象の不確かさを陽に考慮したうえでコントローラ設計を行うことにより、良好な制御性能を得ることができる「ロバスト制御」に関する研究がこれまで盛んに行われてきた^[1]。

一方、今日の制御対象の特徴の一つとして、交通システム、電力システムなどのように、対象となるシステムが大規模、かつ複雑化していることがあげられる。このような大規模複合システムの制御方法として、システムの全情報を一箇所に集め、単一のコントローラによってシステムを制御する「集中制御」があるが、情報量、計算量など、物理的な制約の面から、集中制御は適用できない場合が多い。これに対して、大規模複合システムのもう一つの制御方式に「分散制御」があり、これに関する研究も盛んに行われている^[2]。分散制御は、制御対象をいくつかのサブシステムに分割し、複数のコントローラを用いてサブシステムごとに制御を行うというものである。しかしながら、分散制御の場合、サブシステム間に相互干渉が存在し、この相互干渉をいかに取り扱うかが分散制御における大きな問題となる。

さらに、不確かさを含む大規模複合システムに対する分散ロバスト制御の研究結果も数多く報告されている^[3,4]。ただし、これらの分散ロバスト制御の結果は固定ゲインを用いたものがほとんどであり、可変ゲインを用いた分散ロバスト制御に関する結果は少ない。固定ゲインを用いた分散ロバスト制御は、制御対象の次数が大きくなると、コントローラを設計するために解くべき線形行列不等式 (LMI :

Linear Matrix Inequality) が高次元化してしまい、解を容易に求められない、場合によっては解が存在しないこともある。

本稿では、不確かさを含む大規模複合システムに対する分散可変ゲインロバストコントローラの構成法について紹介する。本稿の制御系設計法の特長は、従来の固定ゲインロバストコントローラの場合と比べ、コントローラを設計するために解くべき LMI が低次元化、単純化でき、従来法では制御系設計ができないシステムに対しても制御系設計できる可能性があることが挙げられる。

2. 本稿で用いる数学的記法と補題

本稿で扱う記号は以下のとおりである。行列 S について、 $S > 0$ ($S \geq 0$) は正定値 (半正定値) であることを示し、 S^{-1} , S^T はそれぞれ行列 S の逆行列、転置行列を表すものである。また、 I_n は n 次の単位行列を表し、 $H_e\{S\} \equiv S + S^T$ を表す。さらに、ベクトル α 、行列 A に対して、 $\|\alpha\|$ はユークリッドノルムを表し、 $\|A\|$ は $\|\alpha\|$ から導かれた誘導ノルムを表すものとする。なお、本稿では次の補題を用いる。

補題 1 任意のベクトル λ , ξ , 適当な次元の行列 G, H および $\|\Delta(t)\| \leq 1$ を満たす適当な次元の行列 $\Delta(t)$ について、次式の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \lambda G \Delta(t) H \xi &\leq \|G^T \lambda\| \|\Delta(t) H \xi\| \\ &\leq \|G^T \lambda\| \|H \xi\| \end{aligned}$$

補題 2 (Schur complement) 実対称行列 Ψ が与えられたとする。このとき、以下の命題は等価である

- (i). $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ * & \Psi_{22} \end{pmatrix} > 0$,
- (ii). $\Psi_{11} > 0$ and $\Psi_{22} - \Psi_{12}^T \Psi_{11}^{-1} \Psi_{12} > 0$,
- (iii). $\Psi_{22} > 0$ and $\Psi_{11} - \Psi_{12} \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T > 0$.

*助教 情報システム創成学科

Assistant Professor, Dept. of Information Systems Creation

2. 問題の記述

次式で表されるサブシステム数が N の不確かさを含む大規模複合システムを考える.

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = A_{ii}(t)x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}(t)x_j(t) + B_i u_i(t) \quad (1)$$

ここで, $x_i(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u_i(t) \in \mathfrak{R}^m$ ($i=1, \dots, N$) はそれぞれ i 番目のサブシステムの状態, および制御入力である. また, $A_{ii}(t)$, および $A_{ij}(t)$ はそれぞれ次式のような行列である.

$$\begin{aligned} A_{ii}(t) &= A_{ii} + B_i \Delta_{ii}(t) E_{ii} + B_i^\perp \Delta_{ii}^\perp(t) E_{ii}^\perp, \\ A_{ij}(t) &= A_{ij} + B_i D_{ij} + B_i \Delta_{ij}(t) E_{ij} + B_i^\perp \Delta_{ij}^\perp(t) E_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, 行列 $A_{ii} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_i(t) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ はそれぞれシステムパラメータを表す既知の定数行列, $\Delta_{ii}(t) \in \mathfrak{R}^{m \times r_i}$, $\Delta_{ij}(t) \in \mathfrak{R}^{m \times s_{ij}}$, $\Delta_{ii}^\perp(t) \in \mathfrak{R}^{p_i \times q_{ii}}$,

$\Delta_{ij}^\perp(t) \in \mathfrak{R}^{p_{ij} \times q_{ij}}$ はそれぞれ $\|\Delta_{ii}(t)\| \leq 1.0$, $\|\Delta_{ij}(t)\| \leq 1.0$, $\|\Delta_{ij}^\perp(t)\| \leq 1.0$,

$\|\Delta_{ij}^\perp(t)\| \leq 1.0$ を満たす未知パラメータである. また, 本稿で考える不確かさは, マッチング条件^[5]を満たす「マッチ部」と, そうでない「 mismatch 部」に分割する. 行列 D_{ij} , E_{ii} , E_{ij} はマッチ部, 行列 A_{ij} , B_i^\perp , B_{ij}^\perp , E_{ii}^\perp , E_{ij}^\perp は mismatch 部における不確かさの構造を表す適当な次元の既知の定数行列である.

さて, (1)式の i 番目のサブシステムに対する制御入力を次式のように定義する.

$$\begin{aligned} u_i(t) &= F_i x_i(t) + \phi_i(t), \\ \phi_i(t) &= L_i(x_i, t)x_i(t) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, $F_i \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $\phi_i \in \mathfrak{R}^m$ はそれぞれ固定ゲイン, および補償入力で, $L_i(x_i, t) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ は可変ゲインである. 以上により, (1)~(3)式から次式の閉ループサブシステムが得られる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_i(t) &= (A_{ii} + B_i F_i)x_i(t) \\ &\quad + (B_i \Delta_{ii}(t) E_{ii} + B_i^\perp \Delta_{ii}^\perp(t) E_{ii}^\perp)x_i(t) \\ &\quad + B_i \sum_{j=1, j \neq i}^N (D_{ij} + \Delta_{ij}(t) E_{ij})x_j(t) \\ &\quad + \sum_{j=1, j \neq i}^N (A_{ij} + B_i^\perp \Delta_{ij}^\perp(t) E_{ij}^\perp)x_j(t) \\ &\quad + B_i L_i(x_i, t)x_i(t) \end{aligned} \quad (4)$$

本稿で考える制御系設計問題は, (4)式のすべての閉ループサブシステムがロバスト安定となるように, (3)式の分散可変ゲインロバストコントローラを設計することである.

3. コントローラ設計

次の定理は, 提案する可変ゲインロバストコントローラの構成法を示すものである.

定理 1 (4)式の閉ループサブシステム, および(3)式の制御入力を考える. このとき, 次の線形行列不等式 (LMI)

$$\begin{pmatrix} \Theta_i(Y_i, W_i, \sigma_i, \delta_{ij}) & \Lambda_i(Y_i) \\ * & -\Omega_i(\sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij}) \end{pmatrix} < 0 \quad (5)$$

を満たす正定値対称行列 $Y_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, 行列 $W_i \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, 正の定数 σ_i , ε_i , δ_{ij} が存在するとき, その解を用いて固定ゲイン F_i , および補償入力 $\phi_i(x_i, t)$ をそれぞれ $F_i \equiv W_i Y_i^{-1}$ および次式のように定義する.

$$\phi_i(x_i, t) = \begin{cases} -\frac{\|B_i^T P_i x_i(t)\| \|E_{ii} x_i(t)\| + \varepsilon_i (N-1) \|B_i^T P_i x_i(t)\|^2}{\|B_i^T P_i x_i(t)\|^2} B_i^T P_i x_i(t) & (B_i^T P_i x_i(t) \neq 0) \\ \phi_i(x_i, t_e) & (B_i^T P_i x_i(t) = 0) \end{cases} \quad (6)$$

ここで, (5)式において, $\Theta_i(Y_i, W_i, \sigma_i, \delta_{ij})$, $\Lambda_i(Y_i)$, $\Omega_i(\sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij})$ は次式で表される行列である.

$$\begin{aligned} \Theta_i(Y_i, W_i, \sigma_i, \delta_{ij}) &\equiv H_e \{A_{ii} Y_i + B_i W_i\} + \sigma_i B_i^\perp (B_i^\perp)^T \\ &\quad + \sum_{j=1, j \neq i}^N \delta_{ij} A_{ij} A_{ij}^T + \sum_{j=1, j \neq i}^N \delta_{ij} B_{ij}^\perp (B_{ij}^\perp)^T \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_i(Y_i) &\equiv (Y_i (E_{ii}^\perp)^T \quad Y_i D_{1i}^T \quad Y_i E_{1i}^T \quad Y_i D_{2i}^T \quad Y_i E_{2i}^T \quad \dots \\ &\quad \dots \quad Y_i D_{i-1i}^T \quad Y_i E_{i-1i}^T \quad Y_i D_{i+1i}^T \quad Y_i E_{i+1i}^T \quad \dots \\ &\quad \dots \quad Y_i D_{Ni}^T \quad Y_i E_{Ni}^T \quad Y_i \quad \dots \quad Y_i \quad Y_i (E_{ii}^\perp)^T \quad \dots \\ &\quad \dots \quad Y_i (E_{i-1i}^\perp)^T \quad Y_i (E_{i+1i}^\perp)^T \quad \dots \quad Y_i (E_{Ni}^\perp)^T) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Omega_i(\sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij}) &\equiv \text{diag} \left(\sigma_i I_{q_{ii}}, \varepsilon_i I_{m_i}, \varepsilon_i I_{s_{ii}}, \varepsilon_2 I_{m_2}, \varepsilon_2 I_{s_{2i}}, \dots \right. \\ &\quad \dots, \varepsilon_{i-1} I_{m_{i-1}}, \varepsilon_{i-1} I_{s_{i-1}}, \varepsilon_{i+1} I_{m_{i+1}}, \varepsilon_{i+1} I_{s_{i+1}}, \dots \\ &\quad \dots, \varepsilon_N I_{m_N}, \varepsilon_N I_{s_N}, \delta_{ii} I_{n_i}, \dots, \delta_{i-1i} I_{n_i}, \delta_{i+1i} I_{n_i}, \dots \\ &\quad \dots, \delta_{Ni} I_{n_i}, \delta_{ii} I_{q_{ii}}, \dots, \delta_{i-1i} I_{q_{i-1}}, \delta_{i+1i} I_{q_{i+1}}, \dots \\ &\quad \dots, \delta_{Ni} I_{q_{Ni}} \left. \right) \end{aligned} \quad (9)$$

また, (6)式における $P_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ は $P_i = Y_i^{-1}$ なる行列であり, t_e は $t_e = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} (t - \varepsilon)$ であることに注意されたい^[6]. このとき, (4)式の閉ループサブシステムはロバスト安定となる.

証明 1 正定値対称行列 P_i を用いて次式のリアプノフ関数の候補を考える.

$$V(x, t) \equiv \sum_{i=1}^N V_i(x_i, t) \quad (10)$$

ここで, $V_i(x_i, t)$ は次式で表される二次形式の正定関数である.

$$V_i(x_i, t) \equiv x_i^T(t) P_i x_i(t) \quad (11)$$

まず, 関数 $V_i(x_i, t)$ を(4)式の閉ループサブシステムの解軌道に沿って時間微分すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_i(x_i, t) = & x_i^T(t) \left[H_e \left\{ (A_{ii} + B_i F_i)^T P_i \right\} \right] x_i(t) \\
& + 2x_i^T(t) P_i B_i \Delta_{ii}(t) E_{ii} x_i(t) \\
& + 2x_i^T(t) P_i B_i^\perp \Delta_{ii}^\perp(t) E_{ii}^\perp x_i(t) \\
& + 2x_i^T(t) P_i B_i \sum_{j=1}^N (D_{ij} + \Delta_{ij}(t) E_{ij}) x_j(t) \\
& + 2x_i^T(t) P_i \sum_{j=1}^N (A_{ij} + B_j^\perp \Delta_{ij}^\perp(t) E_{ij}^\perp) x_j(t) \\
& + 2x_i^T(t) P_i B_i L_i(x_i, t) x_i(t)
\end{aligned} \quad (12)$$

(12)式に対して、**補題 1**，および適当な次元のベクトル α ， β と正の定数 δ に対して成立する不等式

$$2\alpha\beta \leq \delta \alpha^T \alpha + \frac{1}{\delta} \beta^T \beta \quad (13)$$

を適用すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_i(x_i, t) \leq & x_i^T(t) \left[H_e \left\{ (A_{ii} + B_i F_i)^T P_i \right\} \right] x_i(t) \\
& + 2 \left\| B_i^T P_i x_i(t) \right\| \left\| E_{ii} x_i(t) \right\| \\
& + \sigma_i x_i^T(t) P_i B_i^\perp (B_i^\perp)^T P_i x_i(t) \\
& + \frac{1}{\sigma_i} x_i^T(t) (E_{ii}^\perp)^T E_{ii}^\perp x_i(t) \\
& + 2\varepsilon_i (N-1) x_i^T(t) P_i B_i B_i^T P_i x_i(t) \\
& + \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^N x_j^T(t) (D_{ij}^T D_{ij} + E_{ij}^T E_{ij}) x_j(t) \\
& + \sum_{j=1}^N \delta_{ij} x_i^T(t) P_i A_{ij} A_{ij}^T P_i x_i(t) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ij}} x_j^T(t) x_j(t) \\
& + \sum_{j=1}^N \delta_{ij} x_i^T(t) P_i B_{ij}^\perp (B_{ij}^\perp)^T P_i x_i(t) \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ij}} x_j^T(t) (E_{ij}^\perp)^T E_{ij}^\perp x_j(t) \\
& + 2x_i^T(t) P_i B_i L_i(x_i, t) x_i(t)
\end{aligned} \quad (14)$$

さて， $B_i^T P_i x_i(t) \neq 0$ の場合を考える．このとき，(6)式の補償入力 $\phi_i(x_i, t)$ を(14)式に代入し，整理すると次式が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_i(x_i, t) \leq & x_i^T(t) \left[H_e \left\{ (A_{ii} + B_i F_i)^T P_i \right\} \right] x_i(t) \\
& + \sigma_i x_i^T(t) P_i B_i^\perp (B_i^\perp)^T P_i x_i(t) \\
& + \frac{1}{\sigma_i} x_i^T(t) (E_{ii}^\perp)^T E_{ii}^\perp x_i(t) \\
& + \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^N x_j^T(t) (D_{ij}^T D_{ij} + E_{ij}^T E_{ij}) x_j(t) \\
& + \sum_{j=1}^N \delta_{ij} x_i^T(t) P_i A_{ij} A_{ij}^T P_i x_i(t) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ij}} x_j^T(t) x_j(t)
\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N \delta_{ij} x_i^T(t) P_i B_{ij}^\perp (B_{ij}^\perp)^T P_i x_i(t) \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ij}} x_j^T(t) (E_{ij}^\perp)^T E_{ij}^\perp x_j(t)
\end{aligned}$$

したがって，(10)，(15)式から，リアプノフ関数 $V(x, t)$ に関して次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x, t) \leq & \sum_{i=1}^N x_i^T(t) \left[H_e \left\{ (A_{ii} + B_i F_i)^T P_i \right\} \right] x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \sigma_i x_i^T(t) P_i B_i^\perp (B_i^\perp)^T P_i x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i} x_i^T(t) (E_{ii}^\perp)^T E_{ii}^\perp x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^N x_j^T(t) (D_{ij}^T D_{ij} + E_{ij}^T E_{ij}) x_j(t)
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{ij} x_i^T(t) P_i A_{ij} A_{ij}^T P_i x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ij}} x_j^T(t) x_j(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{ij} x_i^T(t) P_i B_{ij}^\perp (B_{ij}^\perp)^T P_i x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ij}} x_j^T(t) (E_{ij}^\perp)^T E_{ij}^\perp x_j(t)
\end{aligned}$$

さらに，(16)式は次式のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x, t) \leq & \sum_{i=1}^N x_i^T(t) \left[H_e \left\{ (A_{ii} + B_i F_i)^T P_i \right\} \right] x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \sigma_i x_i^T(t) P_i B_i^\perp (B_i^\perp)^T P_i x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i} x_i^T(t) (E_{ii}^\perp)^T E_{ii}^\perp x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varepsilon_j} x_i^T(t) (D_{ji}^T D_{ji} + E_{ji}^T E_{ji}) x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{ij} x_i^T(t) P_i A_{ij} A_{ij}^T P_i x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ji}} x_i^T(t) x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{ij} x_i^T(t) P_i B_{ij}^\perp (B_{ij}^\perp)^T P_i x_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ji}} x_i^T(t) (E_{ji}^\perp)^T E_{ji}^\perp x_i(t) \\
= & \sum_{i=1}^N x_i^T(t) \Phi_i(P_i, \sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij}) x_i(t)
\end{aligned} \quad (17)$$

ここで， $\Phi_i(P_i, \sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij})$ は次式で表される行列である．

$$\begin{aligned}
\Phi_i(P_i, \sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij}) = & H_e \left\{ (A_{ii} + B_i F_i)^T P_i \right\} \\
& + \sigma_i P_i B_i^+ (B_i^+)^T P_i + \frac{1}{\sigma_i} (E_{ii}^+)^T E_{ii}^+ \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varepsilon_i} (D_{ji}^T D_{ji} + E_{ji}^T E_{ji}) \\
& + \sum_{j=1}^N \delta_{ij} P_i A_{ij} A_{ij}^T P_i \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ji}} I_{n_i} + \sum_{j=1}^N \delta_{ij} P_i B_{ij}^+ (B_{ij}^+)^T P_i \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ji}} (E_{ji}^+)^T E_{ji}^+
\end{aligned} \quad (18)$$

すなわち、次の行列不等式

$$\Phi_i(P_i, \sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij}) < 0 \quad (19)$$

が成立すれば、リアプノフ関数 $V(x, t)$ に関して、次の関係式が成立する。

$$\frac{d}{dt} V(x, t) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0 \quad (20)$$

次に、 $B_i^T P_i x_i(t) = 0$ の場合を考える。このとき(12)式と固定ゲイン F_i 、および補償入力 $\phi_i(x_i, t)$ の定義(6)式より、(19)式が成立すれば、リアプノフ関数 $V(x, t)$ に関して、(20)式が成立する。

最後に、(19)式の行列不等式を考える。このとき、行列 $Y_i = P_i^{-1}$ および $W_i = F_i Y_i$ を導入し、 Y_i を(19)式の両側から掛けると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
H_e \{ (A_{ii} Y_i + B_i W_i) \} + \sigma_i B_i^+ (B_i^+)^T + \frac{1}{\sigma_i} Y_i (E_{ii}^+)^T E_{ii}^+ Y_i \\
+ \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varepsilon_i} Y_i (D_{ji}^T D_{ji} + E_{ji}^T E_{ji}) Y_i + \sum_{j=1}^N \delta_{ij} A_{ij} A_{ij}^T + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ji}} Y_i Y_i \\
+ \sum_{j=1}^N \delta_{ij} B_{ij}^+ (B_{ij}^+)^T + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{ji}} Y_i (E_{ji}^+)^T E_{ji}^+ Y_i < 0
\end{aligned} \quad (21)$$

よって、この(21)式の行列不等式に対して、**補題 2 (Schur complement)** を適用すれば、(21)式は(5)式の LMI と等価であることがわかる。したがって、(5)式を満たす行列 $Y_i > 0$ 、 W_i 、および正の定数 σ_i 、 ε_i 、 δ_{ij} を用いて、固定ゲイン F_i 、および補償入力 $\phi_i(x_i, t)$ をそれぞれ $F_i \equiv W_i Y_i^{-1}$ 、および(6)式のように設計すれば、(4)式の閉ループサブシステムはロバスト安定となる。以上により**定理 1**が証明された。 ■

定理 1 は提案した分散可変ゲインロバストコントローラの構成法を示したものである。次に比較のため、(1)式の不確かさを含む大規模複合システムに対する従来の分散固定ゲインロバストコントローラを紹介する。次の定理は従来法による分散固定ゲインロバストコントローラの構成法について示すものである。

定理 2 (4)式の閉ループサブシステム、および固定ゲイン K_i を用いた次式の制御入力を考える。

$$u_i(t) \equiv K_i x_i(t) \quad (22)$$

このとき、次の線形行列不等式 (LMI)

$$\begin{pmatrix} Y_i(Y_i W_i, \mu_i, \sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij}) & \Pi_i(Y_i) \\ * & -\Xi_i(\mu_i, \sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij}) \end{pmatrix} < 0 \quad (23)$$

を満たす正定値対称行列 $Y_i \in \Re^{n_i \times n_i}$ 、行列 $W_i \in \Re^{m_i \times n_i}$ 、正の定数 μ_i 、 σ_i 、 ε_i 、 δ_{ij} が存在するとき、その解を用いて固定ゲイン K_i を $K_i \equiv W_i Y_i^{-1}$ と定義する。ここで、行列 $\Upsilon_i(Y_i, W_i, \mu_i, \sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij})$ 、 $\Pi_i(Y_i)$ 、 $\Xi_i(\mu_i, \sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij})$ は次式で表される行列である。

$$\begin{aligned}
\Upsilon_i(Y_i, W_i, \mu_i, \sigma_i, \delta_{ij}) = & H_e \{ A_{ii} Y_i + B_i W_i \} + \mu_i B_i B_i^T \\
& + \sigma_i B_i^+ (B_i^+)^T + 2\varepsilon_i (N-1) B_i B_i^T \\
& + \sum_{j=1}^N \delta_{ij} A_{ij} A_{ij}^T + \sum_{j=1}^N \delta_{ij} B_{ij}^+ (B_{ij}^+)^T
\end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_i(Y_i) = & \begin{pmatrix} Y_i E_{ii}^T & Y_i (E_{ii}^+)^T & Y_i D_{ii}^T & Y_i E_{ii}^T & \cdots \\ \cdots & Y_i D_{i-1i}^T & Y_i E_{i-1i}^T & Y_i D_{i+1i}^T & Y_i E_{i+1i}^T & \cdots \\ \cdots & Y_i D_{Ni}^T & Y_i E_{Ni}^T & Y_i & \cdots & Y_i (E_{ii}^+)^T & \cdots \\ \cdots & Y_i (E_{i-1i}^+)^T & Y_i (E_{i+1i}^+)^T & \cdots & Y_i (E_{Ni}^+)^T \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\Xi_i(\mu_i, \sigma_i, \varepsilon_i, \delta_{ij}) = & \text{diag}(\mu_i I_{r_i}, \sigma_i I_{q_i}, \varepsilon_i I_{m_i}, \varepsilon_i I_{s_i}, \cdots \\
& \cdots, \varepsilon_{i-1} I_{m_{i-1}}, \varepsilon_{i-1} I_{s_{i-1}}, \varepsilon_{i+1} I_{m_{i+1}}, \varepsilon_{i+1} I_{s_{i+1}}, \cdots \\
& \cdots, \varepsilon_N I_{m_N}, \varepsilon_N I_{s_N}, \delta_{ii} I_{n_i}, \cdots, \delta_{i-1i} I_{n_{i-1}}, \delta_{i+1i} I_{n_{i+1}}, \cdots \\
& \cdots, \delta_{Ni} I_{n_i}, \delta_{ii} I_{q_i}, \cdots, \delta_{i-1i} I_{q_{i-1}}, \delta_{i+1i} I_{q_{i+1}}, \cdots \\
& \cdots, \delta_{Ni} I_{q_N})
\end{aligned} \quad (26)$$

このとき、(4)式の閉ループサブシステムはロバスト安定となる（証明は省略）。

注意 1 **定理 2** の従来法の(23)式の LMI の次元を Z_c とすると、その大きさは次のように求められる。

$$Z_c = N n_i + r_i + q_i + \sum_{j=1}^N (m_{ji} + s_{ji} + q_{ji}) \quad (27)$$

一方、**定理 1** の提案する(5)式の LMI の次元を Z_p とすると、その大きさは次のように求められる。

$$Z_p = N n_i + q_{ii} + \sum_{j=1}^N (m_{ji} + s_{ji} + q_{ji}) \quad (28)$$

すなわち、提案する設計法の LMI は、従来法に比べ $Z_c - Z_p = r_i$ だけ小さくなっている。さらに、LMI の変数も、従来法に比べて少なくなっている。すなわち、提案する(5)式の LMI の実行可能領域は従来法の(23)式の LMI よりも広がっており、従来法ではコントローラ設計ができないシステムに対しても、提案法ではコントローラ設計ができる可能性がある。以上により、本稿で紹介した分散可変ゲインロバストコントローラの構成法は非常に有用であるといえる。

4. 数値シミュレーション

ここでは、分散可変ゲインロバストコントローラの有用性を検証するための簡単な数値シミュレーションを行う。サブシステム数 $N=3$ の大規模複合システムを考え、各サブシステムにおけるパラメータはそれぞれ次のように与えられるものとする。

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{pmatrix} -1.0 & 1.5 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} 1.5 & -1.0 \\ 0.0 & -2.0 \end{pmatrix}, \\
 A_{33} &= \begin{pmatrix} -2.0 & 2.0 \\ 1.5 & 0.5 \end{pmatrix}, & B_1 &= \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \\
 B_3 &= \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}, & E_{11} &= \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & E_{22} &= \begin{pmatrix} 0.0 & 2.0 \\ 2.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 E_{33} &= \begin{pmatrix} 3.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & B_1^\perp &= \begin{pmatrix} 5.0 \times 10^{-1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 B_2^\perp &= \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 5.0 \times 10^{-1} & 0.0 \end{pmatrix}, & B_3^\perp &= \begin{pmatrix} 0.0 & 5.0 \times 10^{-1} \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 E_{11}^\perp &= \begin{pmatrix} 4.0 \times 10^{-1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & E_{22}^\perp &= \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 E_{33}^\perp &= \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 5.0 \times 10^{-1} & 0.0 \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} 3.0 \times 10^{-1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 A_{13} &= \begin{pmatrix} 0.0 & 3.0 \times 10^{-1} \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & A_{21} &= A_{23} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 5.0 \times 10^{-1} & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 A_{31} &= \begin{pmatrix} 0.0 & 4.0 \times 10^{-1} \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & A_{32} &= \begin{pmatrix} 5.0 \times 10^{-1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 D_{12}^T &= \begin{pmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}, & D_{13}^T &= \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, & D_{21}^T &= \begin{pmatrix} 1.0 \\ 3.0 \end{pmatrix}, & D_{23}^T &= \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}, \\
 D_{31}^T &= \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, & D_{32}^T &= \begin{pmatrix} 0.0 \\ 3.0 \end{pmatrix}, & E_{12} &= \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 3.0 \end{pmatrix}, \\
 E_{13} &= \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 2.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & E_{23} &= \begin{pmatrix} 0.0 & 2.0 \\ 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & E_{31} &= \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 3.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \\
 B_{12}^\perp &= \begin{pmatrix} 5.0 \times 10^{-1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & B_{13}^\perp &= \begin{pmatrix} 3.0 \times 10^{-1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 B_{21}^\perp &= \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 5.0 \times 10^{-1} & 0.0 \end{pmatrix}, & B_{23}^\perp &= \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 4.0 \times 10^{-1} & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 B_{31}^\perp &= \begin{pmatrix} 4.0 \times 10^{-1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & B_{32}^\perp &= \begin{pmatrix} 5.0 \times 10^{-1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 E_{12}^\perp &= \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 5.0 \times 10^{-1} & 0.0 \end{pmatrix}, & E_{13}^\perp &= \begin{pmatrix} 0.0 & 5.0 \times 10^{-1} \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \\
 E_{21}^\perp &= \begin{pmatrix} 3.0 \times 10^{-1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & E_{23}^\perp &= \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 5.0 \times 10^{-1} \end{pmatrix}, \\
 E_{31}^\perp &= \begin{pmatrix} 5.0 \times 10^{-1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, & E_{32}^\perp &= \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 \times 10^{-1} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

可変ゲインコントローラを設計するため、(5)式の LMI を解くと、次式のような解が得られた。

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \begin{pmatrix} 8.9953 & -1.0453 \times 10^1 \\ * & 2.3056 \times 10^1 \end{pmatrix}, \\
 Y_2 &= \begin{pmatrix} 1.3156 \times 10^1 & -9.9780 \times 10^{-1} \\ * & 1.2110 \times 10^1 \end{pmatrix}, \\
 Y_3 &= \begin{pmatrix} 1.7559 \times 10^1 & -1.2504 \times 10^1 \\ * & 2.1249 \times 10^1 \end{pmatrix}, \\
 W_1 &= (-1.4434 \quad -9.4126 \times 10^1), \\
 W_2 &= (-7.7177 \quad 1.3525) \times 10^1, \\
 W_3 &= (-2.8256 \quad -6.9872) \times 10^1, \\
 \sigma_1 &= 1.9919 \times 10^1, \quad \sigma_2 = 3.0988 \times 10^1, \quad \sigma_3 = 4.4852 \times 10^1, \\
 \varepsilon_1 &= 1.8034 \times 10^2, \quad \varepsilon_2 = 1.4918 \times 10^2, \quad \varepsilon_3 = 1.6632 \times 10^2, \\
 \delta_{12} &= 3.2237 \times 10^1, \quad \delta_{13} = 4.2751 \times 10^1, \quad \delta_{21} = 2.1469 \times 10^1, \\
 \delta_{23} &= 2.2465 \times 10^1, \quad \delta_{31} = 6.2652 \times 10^1, \quad \delta_{32} = 5.3206 \times 10^1.
 \end{aligned} \tag{30}$$

これらの解から、固定ゲイン $F_i (i=1,2,3)$ は次式のように求められる。

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (-1.0365 \times 10^1 \quad -8.7815), \\
 F_2 &= (-5.8180 \quad 6.3744 \times 10^{-1}), \\
 F_3 &= (-6.8012 \quad -7.2907).
 \end{aligned} \tag{31}$$

一方、(28)式のシステムに対して、従来法の(23)式の LMI は解を得ることはできなかった。すなわち、従来法では(29)式のシステムを安定化させるためのコントローラは設計できない。

この数値例において、大規模複合システムの初期値、および未知パラメータは次のように設定した。

$$\begin{aligned}
 x(0) &= (-1.5 \quad 1.0 \quad 1.0 \quad -2.0 \quad 1.5 \quad -1.0), \\
 \Delta_u(t) &= (\cos(2.0\pi t) \quad 0), \quad \Delta_y(t) = (0 \quad \cos(-\pi t)), \\
 \Delta_u^\perp(t) &= (\sin(-6.0\pi t) \quad \cos(-6.0\pi t)), \\
 \Delta_y^\perp(t) &= (-\cos(\pi t) \quad \sin(\pi t)).
 \end{aligned} \tag{32}$$

図 1～4 に数値シミュレーションの結果を示す。図 1～3 はそれぞれサブシステム 1～3 の時間応答であり、図 4 は各サブシステムに対する制御入力を示している。各図中、 x_{i-l} ($i=1,2,3$, $l=1,2$) は i 番目のサブシステムの状態の第 l 成分を表す。これらの図から、各サブシステムの状態は収束しており、(29)式の不確かさを含む大規模複合システムは、分散可変ゲインロバストコントローラによって安定化されていることがわかる。

以上の結果より、紹介した分散可変ゲインロバストコントローラの有用性が示された。

5. 結言

本稿では不確かさを含む大規模複合システムに対する分散可変ゲインロバストコントローラの構成法を示し、数値シミュレーションによってその有用性を検証した。本稿では大規模複合システムの安定化問題のみ取り扱ったが、参照軌道へのトラッキング問題に対しても、本稿の手法は適用可能である^[7]。また、コントローラを設計するために解くべき LMI 条件は、MATLAB の Robust Control Toolbox や Scilab の LMITOOL など、種々の計算ツールを用いて容易に解を求めることが可能である。

今後の課題としては、出力フィードバック制御系やオブザーバを用いた制御系、分散時間システムへの拡張が挙げられる。

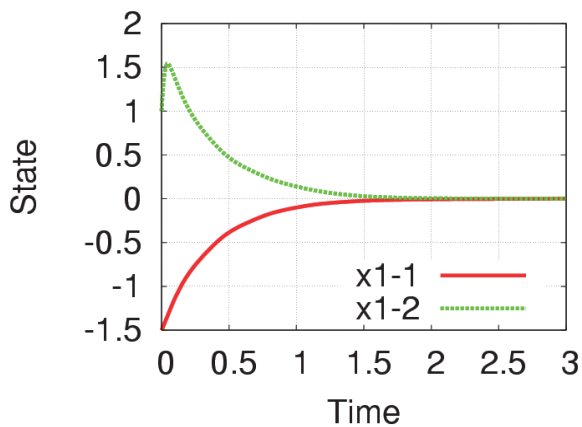


図1 サブシステム1の時間応答

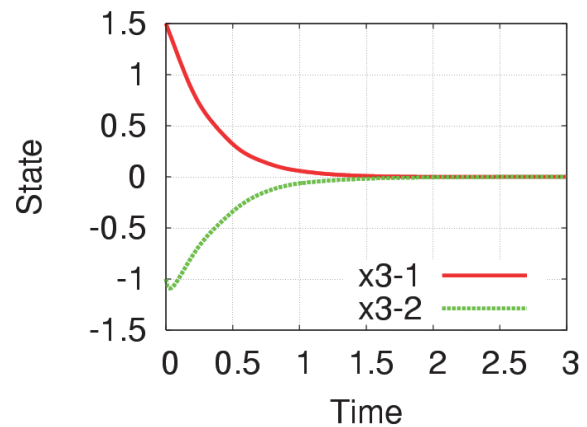


図3 サブシステム3の時間応答

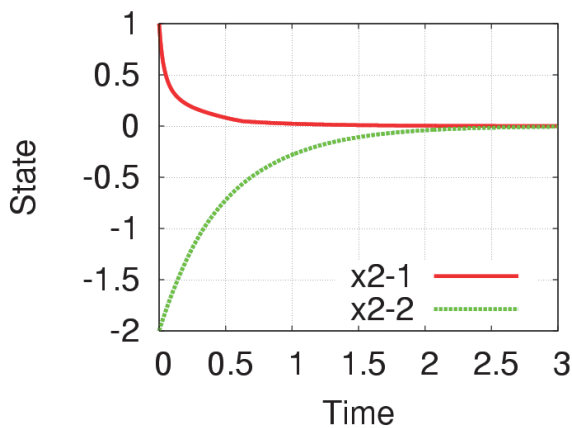


図2 サブシステム2の時間応答

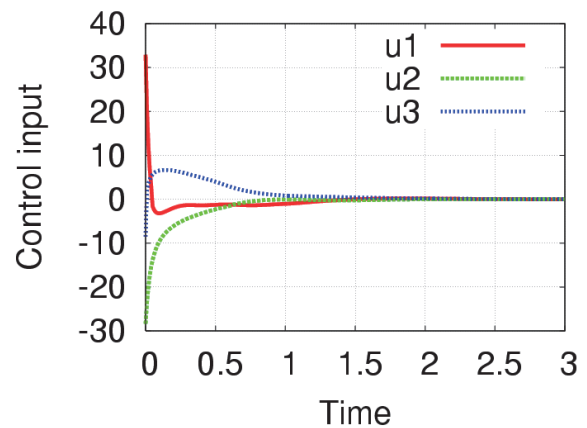


図4 各サブシステムに対する制御入力

参考文献

- [1] k. Zhou and J. C. Doyle, Essentials of Robust Control, Prentice Hall (1998).
- [2] D. D. Sijjak, Decentralized Control of Complex Systems, Academic Press (1991).
- [3] H. Mukaidani, The Guaranteed Cost Control for Uncertain Nonlinear Largescale Stochastic Systems via State and Output Feedback, J. Mathematical Analysis and Applications, 359 (2), 527–535 (2009).
- [4] W. J. Mao and J. Chu, Robust Decentralized Stabilization of Interval Discrete-Time Singular Large-Scale Systems, IET Contr. Theory and Applications, 4 (2), 244–252 (2010).
- [5] S. Gutman, Uncertain Dynamical Systems - A Lyapunov min-max approach, IEEE Trans. Automat. Contr., 24 (3), 437–443 (1979).
- [6] M. Maki and K. Hagino, Robust Control with Adaptation Mechanism for Improving Transient Behavior, Int. J. Contr., 72 (13), 1218–1226 (1999).
- [7] S. Nagai, H. Oya, T. Kubo and T. Matsuki, Decentralized Variable Gain Robust Practical Tracking for a Class of Uncertain Large-Scale Interconnected Systems, Proc. of the 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 3015–3020 (Beijing, 2017. 10).