写像空間，冪空間と無限次元多様体

越野　克久 *

Function spaces, hyperspaces and infinite-dimensional manifolds

Katsuhisa KOSHINO

概 要

本稿では，ヒルベルト空間，ヒルベルト立方体とその部分空間や，それらをモデル空間とする無限次元多様体の位相的な性質について解説する．また，それらと同相になる位相空間として，写像空間や冪空間の例を紹介する．

1　序

幾何学における重要な研究目的として，空間の分類が挙げられる．位相幾何学では，「近さ」や「距離」といった概念を抽象化した「位相」と呼ばれる構造を空間に導入し，その性質に関する研究が行われている．2 つの空間が同じ位相構造を持つとき，それらは同相であるといい，空間の分類を与える同値関係となる．そこで，代表的な空間の位相構造を決定する性質を調べること，即ち，その空間と同相になるための必要十分条件を与えることは，基本的な研究課題である．この条件を位相的特徴付けと呼ぶ．

空間 E に対して，各点が E のある開集合と同相な開近傍を持つパラコンパクト空間を E-多様体と呼び，E をモデル空間という．即ち，E-多様体とは局所的に E の開集合と同じ位相構造を持つ空間のことである．多様体は，現代数学における最も重要な概念の 1 つである．我々の身近にある図形，例えば，直線，平面，円，球面などは，ユークリッド空間をモデル空間とする多様体である．

無限次元多様体とは，そのモデル空間が無限次元空間のときをいい，20 世紀の半ばには無限次元線形位相空間の一般化として研究され始めた．完備距離付け可能な局所凸線形位相空間は線形位相空間の中でも重要なクラスであり，これをフレッシェ空間と呼ぶ．例えば，ユークリッド空間やヒルベルト空間などのバナッハ空間はフレッシェ空間である．稠密度が κ のヒルベルト空間を $\ell_2(\kappa)$ と書くことにする：

$$\ell_2(\kappa) = \left\{ x = (x(\gamma))_{\gamma<\kappa} \in \mathbb{R}^\kappa \;\middle|\; \sum_{\gamma<\kappa} x(\gamma)^2 < \infty \right\}.$$

無限次元フレッシェ空間は，稠密度の等しいヒルベルト空間と同相になることが知られている [1, 9, 22]．よって，可分ヒルベルト空間 $\ell_2(\aleph_0)$ は直線の可算積と同相であり，ゆえに，開区間 $(0,1)$ の可算積

$$\mathbf{s} = (0,1)^{\aleph_0}$$

と同相になる．無限次元凸空間で重要なものとして，ヒルベルト立方体，即ち，単位閉区間 $[0,1]$ の可算積

$$\mathbf{Q} = [0,1]^{\aleph_0}$$

が挙げられる．無限次元多様体論はヒルベルト空間やヒルベルト立方体，及びそれらの部分空間をモデル空間とするものを中心に研究されてきた．そして 1980 年代前半には，H. Toruńczyk [21, 22] によって，$\ell_2(\kappa)$-多様体と $\mathbf{Q}$-多様体の位相的特徴付けが与えられた．

ヒルベルト空間 $\ell_2(\kappa)$ の標準正規直交基底で張られる部分空間を $\ell_2^f(\kappa)$ と表すことにする：

$$\ell_2^f(\kappa) = \{x \in \ell_2(\kappa) \mid 有限個の\gamma < \kappaを除いて, x(\gamma) = 0\}.$$

これは，強可算次元 σ-局所コンパクト距離付け可能空間である．ここで，空間が σ-局所コンパクトであるとは，局所コンパクト部分集合の可算和で表されるときをいい，特にコンパクト部分集合の可算和で表される場合，σ-コンパクトであるという．また，有限次元閉集合の可算和で表される空間を，強可算次元であるという．

空間上の写像からなる写像空間や，空間の部分集合からなる冪空間は，自然に現れる無限次元空間であり，当該分野における重要な研究対象である．実際に無限次元多様体論の応用として，ヒルベル

*特任助教　数学教室
Assistant Professor, Dept. of Mathematics

ト空間やヒルベルト立方体，及びその部分空間をモデルとする無限次元多様体の位相的特徴付けを用いることで，それらの具体的な例が写像空間や冪空間からいくつも発見されてきた．こうして，無限次元多様体論と写像空間論，冪空間論は，相互に寄与し合いながら進展してきた．現在においても，無限次元多様体に有用な位相的特徴付けを与えることと，それを利用して写像空間や冪空間から具体例を見つけることが求められている．本稿では，$\ell_2(\kappa)$, $\mathbf{Q}$ とそれらの部分空間をモデル空間とする無限次元多様体の位相的特徴付けを解説する．そして，これらのモデル空間と同相になる写像空間や冪空間について，筆者が得た結果を中心に紹介する．

2　無限次元多様体の位相的特徴付け

本節では，まず H. Toruńczyk [21, 22] による $\ell_2(\kappa)$-多様体と $\mathbf{Q}$-多様体の位相的特徴付けを紹介する．また，$\ell_2^f(\kappa)$-多様体の位相的特徴付けについて，筆者の結果とその先行研究を概説する．無限次元多様体の位相的性質を述べる上で，次の 2 つの概念は中心的な役割を果たしている．

定義 1 (Z-集合)**.** 空間 X の閉集合 A が Z-集合であるとは，X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，X の恒等写像の $\mathcal{U}$-近似 $f: X \to X$ で，その像 $f(X)$ が A と交わらないものが存在するときをいう．さらに，$f(X)$ の閉包 $\mathrm{cl}_X f(X)$ が A と共通部分を持たないとき，A を強 Z-集合と呼ぶ．

空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，写像 $g: Y \to X$ が $f: Y \to X$ の $\mathcal{U}$-近似であるとは，Y の各点 y について，$f(y)$ と $g(y)$ がともに $\mathcal{U}$ のある元に含まれることをいう．Z-集合は，空間の「境界」を表す概念といえる．例えば，円周は円板の Z-集合である．

定義 2 (強普遍性)**.** 空間 X がクラス $\mathcal{C}$ に対して強普遍性を持つとは，次の条件を満たすことである：

- 空間 A が $\mathcal{C}$ に属しているとする．また，B を A の閉集合，$f: A \to X$ を A から X への写像とし，B の像 $f(B)$ が X の Z-集合であるものとする．このとき，X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，f の $\mathcal{U}$-近似 $g: A \to X$ で，g は埋め込みであり，その像 $g(A)$ が Z-集合であり，B への制限について $g|_B = f|_B$ となるものが存在する．

任意の完備距離付け可能空間はヒルベルト空間に閉集合として埋め込むことができるが，実際に，ヒルベルト空間とそれをモデル空間とする多様体は，完備距離付け可能空間のクラスに対して強普遍性を持っている．次の性質は，空間の「自由度」の高さを示すような概念といえ，無限次元空間の稠密度に深く関わる．

定義 3. 濃度 $n \leq \aleph_0$, κ に対して，空間 X が n-包体 κ-離散性を持つとは，次の条件を満たすときをいう：

- 任意の写像 $f : [0,1]^n \times \kappa \to X$, X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，f の $\mathcal{U}$-近似 $g : [0,1]^n \times \kappa \to X$ で，集合族 $\{g([0,1]^n \times \{\gamma\}) \mid \gamma < \kappa\}$ が離散的となるものが存在する．

空間 X とその部分集合 A に対して，ある写像 $f: X \to A$ が存在して，A への制限 $f|_A$ が A の恒等写像と等しくなるとき，A は X のレトラクトであるという．

定義 4 (ANR)**.** 空間 X が ANR であるとは，X を閉集合として含む任意の距離付け可能空間 Y に対して，X が Y におけるある近傍のレトラクトになることをいう．特に X が全体集合 Y のレトラクトになるとき，X を AR と呼ぶ．

距離付け可能な局所凸線形位相空間やその凸集合は AR であり，より一般に，それらをモデル空間とする多様体は ANR となる．次の H. Toruńczyk による $\ell_2(\kappa)$-多様体の位相的特徴付けは，無限次元多様体論における最も重要な結果の一つである．

定理 2.1 (H. Toruńczyk [22])**.** 空間 X は完備距離付け可能 ANR であり，その稠密度が無限濃度 κ とする．次は同値である：

(1) X は $\ell_2(\kappa)$-多様体である；

(2) X は稠密度 κ 以下の完備距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ；

(3) X はすべての非負整数 n に対して n-包体 κ-離散性を持ち，次の性質を満たす：

- 任意の写像 $f : X \times \aleph_0 \to X$, X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，f の $\mathcal{U}$-近似 $g: X \times \aleph_0 \to X$ で，集合族 $\{g(X \times \{n\}) \mid n < \aleph_0\}$ が局所有限となるものが存在する．

注意 1. 上の定理 2.1 の条件 (2) は，次のように弱めることができる：

- 空間 A を稠密度 κ 以下の完備距離付け可能空間とし，$f : A \to X$ を A から X への写像とする．このとき，X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，f の $\mathcal{U}$-近似 $g: A \to X$ で，g は埋め込みであり，その像 $g(A)$ が閉集合となるものが存在する．

空間 X が AR の場合，定理 2.1 はモデル空間 $\ell_2(\kappa)$ の位相的特徴付けになる．次に，H. Toruńczyk によって与えられた $\mathbf{Q}$-多様体の位相的特徴付けを紹介する．

定理 2.2 (H. Toruńczyk [21])．空間 X を可分局所コンパクト ANR とする．次は同値である：

(1) X は $\mathbf{Q}$-多様体である；

(2) X はすべての非負整数 n に対して n-包体 2-離散性を持つ．

空間 X がコンパクト AR の場合，定理 2.2 はモデル空間 $\mathbf{Q}$ そのものの位相的特徴付けになっている．

1984 年に J. Mogilski は，$\ell_2^f(\aleph_0)$-多様体に対して次のような位相的特徴付けを与えた．

定理 2.3 (J. Mogilski [16])．連結空間 X が $\ell_2^f(\aleph_0)$-多様体である必要十分条件は，次を満たすことである：

(1) X は強可算次元，σ-コンパクト ANR である；

(2) X は有限次元コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ；

(3) X の有限次元コンパクト部分集合は強 Z-集合となる．

これは，2003 年に K. Sakai と M. Yaguchi によって非可分の場合へと拡張された．

定理 2.4 (K. Sakai and M. Yaguchi [18])．任意の無限濃度 κ に対して，連結空間 X が $\ell_2^f(\kappa)$-多様体である必要十分条件は，次を満足することである：

(1) X は稠密度 κ の強可算次元，σ-局所コンパクト ANR であり，強 Z-集合の可算和で表される；

(2) X は稠密度 κ 以下の強可算次元，局所コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ．

空間の無限次元多様体性を見出す際に，大きく複雑なクラスに対する強普遍性を示すことは難しい．筆者は，n-包体 κ-離散性を用いて K. Sakai と M. Yaguchi の結果に現れる強普遍性に関する条件を弱めることで，より適用しやすい特徴付けを与えた．

定理 2.5 (K. Koshino [11])．任意の無限濃度 κ に対して，連結空間 X が $\ell_2^f(\kappa)$-多様体となる必要十分条件は，次を満たすことである：

(1) X は稠密度 κ の強可算次元，σ-局所コンパクト ANR である；

(2) X はすべての非負整数 n に対して n-包体 κ-離散性を持つ；

(3) X は有限次元コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ；

(4) X の有限次元コンパクト部分集合は強 Z-集合となる．

上記の定理 2.5 は，空間 X が AR の場合，モデル空間 $\ell_2^f(\kappa)$ そのものの位相的特徴付けとなる．

3 無限次元多様体の組

空間 X とその部分空間 Y の組を，(X, Y) と書くことにする．空間組 (X, Y) が (X', Y') と同相であるとは，X から X' への同相写像 $f : X \to X'$ で，$f(Y) = Y'$ を満たすものが存在するときをいう．空間組 (X, Y) が既知の空間組と同相であるかどうかを調べることは，部分空間 Y の全体空間 X への位相的な埋め込まれ方を考える際に有効である．空間組 (E, F) に対して，パラコンパクト空間の組 (X, Y) が (E, F)-多様体組であるとは，X の各点毎に E のある開集合 V と同相な開近傍 U が存在し，$(U, U \cap Y)$ が $(V, V \cap F)$ と同相になるときをいう．ヒルベルト空間，ヒルベルト立方体とそれらの稠密部分空間からなる空間組 (E, F) をモデルとする無限次元多様体組には，次のような位相的な一意性を持つものが存在する：

- 空間 X とその部分空間 Y, Y' に対して，空間組 (X, Y), (X, Y') がともに (E, F)-多様体組ならば，(X, Y) と (X, Y') は同相である．

このことから，無限次元多様体組の位相的特徴付けに関する研究は，当該分野において重要な位置を占める．R.D. Anderson [2, 3] は，空間組 $(\ell_2(\aleph_0), \ell_2^f(\aleph_0))$, $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q} \setminus \mathbf{s})$ などに対して，ある位相的特徴付けを与えた．これは，T.A. Chapman [4, 5] によって，それらの多様体組の特徴付けに拡張された．これらの特徴付けは，強普遍性の概念を空間組に導入したものとして，あるクラスに属した部分集合に対する「吸収性」を用いて記述されている．

定義 5 (*cap*-集合)．空間組 (X, Y) に対して，Y が X の *cap*-集合であるとは，Y が X の Z-集合の可算和で表されて，次の条件を満足することである：

- A を X のコンパクト部分集合とし，B を A の閉集合で，かつ Y に含まれているとする．このとき，X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，A の恒等写像の $\mathcal{U}$-近似 $f : A \to X$ が存在し，f は Y への埋め込みであり，B への制限 $f|_B$ が B の恒等写像と等しい．

定理 3.1 (R.D. Anderson [2])．空間組 (X, Y) が $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q} \setminus \mathbf{s})$ と同相である必要十分条件は，次を満たすことである：

(1) X は $\mathbf{Q}$ と同相である；

(2) Y は X の *cap*-集合である．

非可分無限次元多様体については，J.E. West が 1970 年に，$(\ell_2(\kappa), \ell_2^f(\kappa))$-多様体組を次のように特徴付けた．

定理 3.2 (J.E. West [23])**.** 任意の無限濃度 κ に対して，空間組 (X, Y) が $(\ell_2(\kappa), \ell_2^f(\kappa))$-多様体組である必要十分条件は，次を満たすことである:

(1) X は $\ell_2(\kappa)$-多様体である;

(2) Y は強可算次元，σ-局所コンパクトであり，次の性質を満足する:

- A を X の有限次元コンパクト部分集合とし，B を A の閉集合で，かつ Y に含まれているとする．このとき，X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，A の恒等写像の $\mathcal{U}$-近似 $f: A \to X$ が存在し，f は Y への埋め込みであり，B への制限 $f|_B$ が B の恒等写像と等しい．

一般に，空間組 (X, Y) と (E, F) が与えられたとき，X が E-多様体，Y が F-多様体であったとしても，(X, Y) が (E, F)-多様体組になるとは限らない．そこで，(X, Y) がいつ (E, F)-多様体組となるのかは，基本的な問題である．これに対して，$(\ell_2(\kappa), \ell_2^f(\kappa))$-多様体組に関する次のような解を得た．

定理 3.3 (K. Koshino [11])**.** 任意の無限濃度 κ に対して，空間組 (X, Y) が $(\ell_2(\kappa), \ell_2^f(\kappa))$-多様体組であるための必要十分条件は，$X$ が $\ell_2(\kappa)$-多様体であり，Y が $\ell_2^f(\kappa)$-多様体であり，かつ Y が X の中でホモトピー稠密となることである．

ホモトピー稠密性とは，稠密性より強い性質である．

定義 6 (ホモトピー稠密)**.** 空間 X の部分集合 Y がホモトピー稠密であるとは，X のホモトピー $h: X \times [0,1] \to X$ が存在し，X の各点 x について $h(x, 0) = x$ であり，かつ $h(X \times (0,1]) \subset Y$ となることである．

ヒルベルト立方体 $\mathbf{Q}$ とその部分空間 $\mathbf{s}$ に関して，$\mathbf{s}$ は $\mathbf{Q}$ の中でホモトピー稠密である．このホモトピー稠密性による特徴付けは，他のモデル空間では成り立たない．

注意 2. 積空間 $\mathbf{Q} \times \ell_2$ は ℓ_2 と同相であり，その部分空間 $\mathbf{s} \times \ell_2^f$ は $\ell_2 \times \ell_2^f$ と同相である．また，$\mathbf{s} \times \ell_2^f$ は $\mathbf{Q} \times \ell_2$ の中でホモトピー稠密である．しかし，空間組 $(\mathbf{Q} \times \ell_2, \mathbf{s} \times \ell_2^f)$ は $(\ell_2 \times \ell_2, \ell_2 \times \ell_2^f)$-多様体組とはならない．

4 写像空間

解析学において，写像の近さ（収束性，近似など）を考察するとき，写像全体からなる空間に位相構造を導入することは基本的な方法である．よって，写像空間の位相的な性質を調べることは，関数解析学等への応用展開も期待されて，有意義な研究である．本節では，空間 X から Y への連続写像全体からなる空間 $\mathrm{C}(X, Y)$ に位相を導入して，その位相型が先に紹介した無限次元多様体のモデル空間と一致することを見ていく．

写像空間に導入する最も基本的な位相に，コンパクト開位相が挙げられる．この位相は，局所コンパクト空間上において写像の合成や評価写像が連続になるなど，良いふるまいを見せてくれる．

定義 7 (コンパクト開位相)**.** 連続写像空間 $\mathrm{C}(X, Y)$ に対して，X のコンパクト部分集合 K と Y の開集合 U から定まる $\mathrm{C}(X, Y)$ の部分集合

$$\{f \in \mathrm{C}(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$$

によって生成される位相を，コンパクト開位相と呼ぶ．

空間 X が局所コンパクトかつ σ-コンパクトであり，Y が距離付け可能であるとき，写像空間 $\mathrm{C}(X, Y)$ も距離付け可能となる．K. Sakai, S. Uehara, A. Kogasaka [17, 10] らの研究によると，Y が直線 $\mathbb{R}$ であるとき，$\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ の位相型に関して次が成り立つ．

定理 4.1. 空間 X が無限濃度を持ち，局所コンパクト，局所連結，可分距離付け可能であるとする．このとき，X から直線 $\mathbb{R}$ への連続写像空間 $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ は自然なコンパクト化 $\overline{\mathrm{C}}(X, \mathbb{R})$ で，空間組 $(\overline{\mathrm{C}}(X, \mathbb{R}), \mathrm{C}(X, \mathbb{R}))$ が $(\mathbf{Q}, \mathbf{s})$ と同相になるようなものが存在する．

1 次元局所コンパクト AR は，直線 $\mathbb{R}$ や単位閉区間 $[0,1]$ の一般化であり，枝分れしたグラフなども含む．定理 2.2, 3.1 を適用することで，筆者は K. Sakai との共同研究において，上の定理を拡張して次の結果を得た．

定理 4.2 (K. Koshino and K. Sakai [14])**.** 空間 X を無限濃度を持つ局所コンパクト，局所連結，可分距離付け可能空間として，Y を 1 次元局所コンパクト *AR* とする．ここで，X が離散的でない，または Y がコンパクトでないとする．このとき，X から Y への連続写像空間 $\mathrm{C}(X, Y)$ は自然なコンパクト化 $\overline{\mathrm{C}}(X, Y)$ を持ち，空間組 $(\overline{\mathrm{C}}(X, Y), \mathrm{C}(X, Y))$ が $(\mathbf{Q}, \mathbf{s})$ と同相になる．

注意 3. 上の定理 4.2 において，X が離散的であり，かつ Y がコンパクトであるとき，$\mathrm{C}(X, Y)$ は積空間 Y^X と同一視される．これは，ヒルベルト立方体 $\mathbf{Q}$ と同相になる．

写像空間の自然なコンパクト化について述べておく．空間 X の閉集合全体を $\mathrm{Cld}^*(X)$ と表し，空でない閉集合全体を $\mathrm{Cld}(X)$ と表す．冪空間 $\mathrm{Cld}^*(X)$ には，次のように定義される Fell 位相を導入する．

定義 8 (Fell 位相)**.** 空間 X の冪空間 $\mathrm{Cld}^*(X)$ に対して，X の開集合 U とコンパクト部分集合 K から定まる $\mathrm{Cld}^*(X)$ の部分集合

$$\{A \in \mathrm{Cld}^*(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}, \quad \{A \in \mathrm{Cld}^*(X) \mid A \cap K = \emptyset\}$$

によって生成される位相を，Fell 位相という．

冪空間 $\mathrm{Cld}^*(X)$ の位相的性質について，以下の事実が知られている．

命題 4.3. 冪空間 $\mathrm{Cld}^*(X)$ がコンパクト距離付け可能であるためには，X が局所コンパクト，可分距離付け可能空間であることが必要十分である．

命題 4.4. 空間 X が局所コンパクト，局所連結であり，Y が局所コンパクトであるとき，X から Y への連続写像 $f : X \to Y$ とそのグラフを同一視することによって，コンパクト開位相を導入した連続写像空間 $\mathrm{C}(X,Y)$ は Fell 位相を導入した冪空間 $\mathrm{Cld}^*(X \times Y)$ の部分空間とみなせる．

1 次元局所コンパクト AR のコンパクト化に関して，次が成り立つ．

命題 4.5. 空間 Y が 1 次元局所コンパクト *AR* であることは，次の性質を満たすコンパクト化 $\overline{Y}$ を持つことと同値である*:*

(1) $\overline{Y}$ は 1 次元コンパクト *AR* である*;*

(2) 剰余 $\overline{Y} \setminus Y$ が閉集合であり，$\overline{Y}$ の終点集合に含まれる．

例えば，直線 $\mathbb{R}$ や開区間 $(0,1)$ のコンパクト化として，その両端に点を付して得られる拡大直線 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ や単位閉区間 $[0,1]$ が挙げられる．

定理 4.2 における写像空間 $\mathrm{C}(X,Y)$ の自然なコンパクト化とは，終集合 Y に対して，命題 4.5 のようなコンパクト化 $\overline{Y}$ をとり，$\mathrm{C}(X,Y)$ を冪空間 $\mathrm{Cld}^*(X \times \overline{Y})$ の部分空間とみなしたときに，その閉包

$$\overline{\mathrm{C}}(X,Y) = \mathrm{cl}_{\mathrm{Cld}^*(X \times \overline{Y})} \mathrm{C}(X,Y)$$

をとることである．

次に，この写像空間のコンパクト化が有意味なものであり，具体的にどのように記述されるのかを見ておきたい．空間 X から Y への空でない閉集合に値を持つ集合値関数 $\phi : X \to \mathrm{Cld}(Y)$ が上半連続であるとは，Y の開集合 U に対して，$\{x \in X \mid \phi(x) \subset U\}$ が X の開集合になるときをいう．空間 Y が正規空間のとき，X から Y への上半連続で，空でない連結閉集合に値を持つ集合値関数全体を $\mathrm{USCC}(X,Y)$ と表すと，集合値関数とそのグラフを同一視することで，$\mathrm{USCC}(X,Y)$ を冪空間 $\mathrm{Cld}^*(X \times Y)$ の部分集合とみなすことができる．定理 4.2 における写像空間 $\mathrm{C}(X,Y)$ の自然なコンパクト化 $\overline{\mathrm{C}}(X,Y) = \mathrm{cl}_{\mathrm{Cld}^*(X \times \overline{Y})} \mathrm{C}(X,Y)$ は，X が連結の場合，

$$\mathrm{USCC}(X, \overline{Y})$$

と一致する．

他の連続写像空間やそのコンパクト化について，同様のことが成り立つかどうかを考える．定理 4.2 では，空間 Y のコンパクト化として，1 次元コンパクト AR であるコンパクト化 $\overline{Y}$ を採用したが，1 点コンパクト化 αY を考えても，閉包 $\mathrm{cl}_{\mathrm{Cld}^*(X \times \alpha Y)} \mathrm{C}(X,Y)$ は $\mathbf{Q}$ と同相になる．しかし，$\mathrm{C}(X,Y)$ はそのコンパクト化 $\mathrm{cl}_{\mathrm{Cld}^*(X \times \alpha Y)} \mathrm{C}(X,Y)$ の中でホモトピー稠密になるとは限らず，よって，空間組として $(\mathrm{cl}_{\mathrm{Cld}^*(X \times \alpha Y)} \mathrm{C}(X,Y), \mathrm{C}(X,Y))$ は $(\mathbf{Q}, \mathbf{s})$ と同相にならない．実際に，次が成り立つ．

命題 4.6. 連続写像空間 $\mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ は，そのコンパクト化 $\mathrm{cl}_{\mathrm{Cld}^*([0,1] \times \alpha \mathbb{R})} \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ の中でホモトピー稠密ではない．

写像空間の終集合 Y の次元を上げて，n 次元局所コンパクト AR，特に n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と，そのコンパクト化 $\overline{\mathbb{R}^n}$ で，n 次元単位球と同相なものを考える．この場合も，$\mathrm{cl}_{\mathrm{Cld}^*(X \times \overline{\mathbb{R}^n})} \mathrm{C}(X, \mathbb{R}^n)$ と $\mathrm{C}(X, \mathbb{R}^n)$ は各々 $\mathbf{Q}$ と $\mathbf{s}$ と同相になるが，n が 2 以上のとき，空間組 $(\mathrm{cl}_{\mathrm{Cld}^*(X \times \overline{\mathbb{R}^n})} \mathrm{C}(X, \mathbb{R}^n), \mathrm{C}(X, \mathbb{R}^n))$ は $(\mathbf{Q}, \mathbf{s})$ と同相にならない．実際に，写像空間の始集合 X を $n-1$ 次元球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ とするとき，次が成り立つ．

命題 4.7. n が 2 以上のとき，連続写像空間 $\mathrm{C}(\mathbf{S}^{n-1}, \mathbb{R}^n)$ は，そのコンパクト化 $\mathrm{cl}_{\mathrm{Cld}^*(\mathbf{S}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}^n})} \mathrm{C}(\mathbf{S}^{n-1}, \mathbb{R}^n)$ の中でホモトピー稠密ではない．

5 冪空間

本節では，距離付け可能空間 X の空でないコンパクト部分集合のなす冪空間に Vietoris 位相を導入した $\mathrm{Comp}(X)$ と，空でない有限部分集合からなる冪空間 $\mathrm{Fin}(X)$ を中心に，その位相型に関する研究成果を見ていく．

定義 9 (Vietoris 位相)**.** 空間 X の冪空間 $\mathrm{Cld}^*(X)$ に対して，X の開集合 U から定まる $\mathrm{Cld}^*(X)$ の部分集合

$$\{A \in \mathrm{Cld}^*(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}, \quad \{A \in \mathrm{Cld}^*(X) \mid A \subset U\}$$

によって生成される位相を，Vietoris 位相という．

前節で紹介した Fell 位相に比べると，Vietoris 位相の方が細かいが，空間 X がコンパクトであるとき両者は一致する．まず，冪空間の位相に関する研究の歴史を遡ると，次の顕著な研究成果に行き着く．

定理 5.1 (D.W. Curtis, R.M. Schori and J.E. West [19, 20, 8])．2 点以上からなる空間 X に対して，$\mathrm{Comp}(X)$ がヒルベルト立方体 $\mathbf{Q}$ と同相になるためには，X が連結，局所連結，コンパクト距離付け可能空間であることが必要十分条件である．

これ以降，位相空間の種々の部分集合からなる冪空間の無限次元多様体性に関する研究は，大きく発展していった．特に X が非コンパクトの場合，D.W. Curtis, N.T. Nhu による次の結果が知られている．

定理 5.2 (D.W. Curtis [6])．空間 X に対して，$\mathrm{Comp}(X)$ が $\ell_2(\aleph_0)$ と同相になるための必要十分条件は，X が可分，連結，局所連結，完備距離付け可能空間であり，かつ各点でコンパクトな近傍を持たないことである．

定理 5.3 (D.W. Curtis and N.T. Nhu [7])．2 点以上からなる空間 X に対して，$\mathrm{Fin}(X)$ が $\ell_2^f(\aleph_0)$ と同相であるための必要十分条件は，X が可分，連結，局所道連結，強可算次元，σ-コンパクト距離付け可能空間である．

この方向に関する研究では，K. Mine, K. Sakai, M. Yaguchi [15, 24] によって，非可算濃度 κ に対して，$\mathrm{Comp}(\ell_2(\kappa))$ が $\ell_2(\kappa)$ と，$\mathrm{Fin}(\ell_2^f(\kappa))$ が $\ell_2^f(\kappa)$ と，それぞれ同相になることが証明された．筆者は，D.W. Curtis，N.T. Nhu の結果を非可分の場合へと一般化して，冪空間 $\mathrm{Comp}(X)$, $\mathrm{Fin}(X)$ がそれぞれ $\ell_2(\kappa)$, $\ell_2^f(\kappa)$ と同相になるための，空間 X の完全な位相的特徴付けを与えた．証明に定理 2.1, 2.5 を用いた．

定理 5.4 (K. Koshino [12])．空間 X，無限濃度 κ に対して，$\mathrm{Comp}(X)$ が $\ell_2(\kappa)$ と同相になるための必要十分条件は，X が連結，局所連結，完備距離付け可能であり，各点でコンパクトな近傍を持たず，かつ任意の空でない開集合の稠密度が κ に等しい．

定理 5.5 (K. Koshino [13])．空間 X，無限濃度 κ に対して，$\mathrm{Fin}(X)$ が $\ell_2^f(\kappa)$ と同相であるための必要十分条件は，X が連結，局所道連結，強可算次元，σ-局所コンパクト距離付け可能であり，かつ任意の空でない開集合の稠密度が κ に等しい．

また，空間 X とその完備化 $\overline{X}$ が与えられたとき，定理 3.3 を適用することで冪空間組 $(\mathrm{Comp}(\overline{X}), \mathrm{Fin}(X))$ が空間組 $(\ell_2(\kappa), \ell_2^f(\kappa))$ と同相になるための必要十分条件を与えた．

定理 5.6 (K. Koshino [12])．空間 X が連結，局所道連結，強可算次元，σ-局所コンパクト距離付け可能であり，その空でない開集合の稠密度が無限濃度 κ に等しいとする．また，$\overline{X}$ を X の完備化で，各点においてコンパクトな近傍を持たないようなものとする．このとき，冪空間組 $(\mathrm{Comp}(\overline{X}), \mathrm{Fin}(X))$ が空間組 $(\ell_2(\kappa), \ell_2^f(\kappa))$ と同相になるための必要十分条件は，剰余 $\overline{X} \setminus X$ が $\overline{X}$ において局所的不分割性を持つ．

ここで，空間 X とその部分空間 A について，A が X において局所的不分割性を持つとは，X の任意の空でない連結開集合 U に対して，$U \setminus A$ が空でない連結集合となることである．上の定理 5.6 により，$\mathrm{Comp}(\overline{X})$ と $\mathrm{Fin}(X)$ の位相的包含関係が明らかになった．さらに筆者は，距離付け可能空間の空でない連結なコンパクト部分集合からなる冪空間がヒルベルト空間と同相になるための必要十分条件も調べ，それがコンパクト部分集合の場合と同じであることを証明した．

参考文献

[1] R.D. Anderson, Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 515–519.

[2] R.D. Anderson, *A characterization of apparent boundaries of the Hilbert cube*, Notices Amer. Math. Soc. **16** (1969), 429.

[3] R.D. Anderson, On sigma-compact subsets of infinite-dimensional spaces, (unpublished).

[4] T.A. Chapman, Four classes of separable, metric, infinite-dimensional manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 399–403.

[5] T.A. Chapman, Dense sigma-compact subsets of infinite-dimensional manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971), 399–426.

[6] D.W. Curtis, Hyperspaces homeomorphic to Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 75, (1979), 126–130.

[7] D.W. Curtis and N.T. Nhu, Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces, Topology Appl. 19, (1985), 251–260.

[8] D.W. Curtis and R.M. Schori, 2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the Hilbert cube, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 927–931.

[9] M.I. Kadec, A proof the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces (Russian), Funkcional Anal. i Priložen, 1 (1967), 61–70.

[10] A. Kogasaka and K. Sakai, *A Hilbert cube compactification of the function space with the compact-open topology*, Cent. Eur. J. Math. **7** (2009), no. 4, 670–682.

[11] K. Koshino, Characterizing non-separable sigma-locally compact infinite-dimensional manifolds and its applications, J. Math. Soc. Japan 66 (2014), 1155–1189.

[12] K. Koshino, On a hyperspace of compact subsets which is homeomorphic to a non-separable Hilbert space, Topology Appl. 206 (2016), 166–170.

[13] K. Koshino, Hyperspaces of finite subsets, homeomorphic to pre-Hilbert spaces, Topology Appl. 210 (2016), 133–143.

[14] K. Koshino and K. Sakai, *A Hilbert cube compactification of a function space from a Peano space into a one-dimensional locally compact absolute retract*, Topology Appl. **161** (2014), 37–57.

[15] K. Mine, K. Sakai and M. Yaguchi, Hyperspaces of finite sets in universal spaces for absolute Borel classes, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 53, (2005), 409–419.

[16] J. Mogilski, Characterizing the topology of infinite-dimensional σ-compact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984), 111–118.

[17] K. Sakai and S. Uehara, *A Hilbert cube compactification of the Banach space of continuous functions*, Topology Appl. **92** (1999), 107–118.

[18] K. Sakai and M. Yaguchi, Characterizing manifolds modeled on certain dense subspaces of non-separable Hilbert spaces, Tsukuba J. Math. 27 (2003), 143–159.

[19] R.M. Schori and J.E. West, Hyperspaces of graphs are Hilbert cubes, Pacific J. Math. 53 (1974), 239–251.

[20] R.M. Schori and J.E. West, The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert cube, Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 217–235.

[21] H. Toruńczyk, On CE-images of the Hilbert cube and characterization of **Q**-manifolds, Fund. Math. 106 (1980), 31–40.

[22] H. Toruńczyk, Characterizing Hilbert space topology, Fund. Math. 111 (1981), 247–262.

[23] J.E. West, The ambient homeomorphy of incomplete subspaces of infinite-dimensional Hilbert spaces, Pacific J. Math. 34 (1970), 257–267.

[24] M. Yaguchi, Hyperspaces of finite subsets of non-separable Hilbert spaces, Tsukuba J. Math. 30, (2006), 181–193.