逆2乗ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式の散乱問題

鈴木　敏行*

Scattering problems for Nonlinear Schrödinger equations with an inverse－square potential

Toshiyuki SUZUKI*

1. はじめに

非線形シュレディンガー方程式は超流動や超電導（Bose-Einstein凝縮），光ファイバー内の信号の伝播，流体中の渦糸の運動，非調和結晶中の熱パルスなど，分散効果の強い波動現象を記述する，時間と空間とを変数にした偏微分方程式の1つである．筆者はこれに逆2乗ポテンシャル（inverse-square potentials）を摂動した問題に対して解の存在をはじめとする様々な研究を進めている．このポテンシャルは量子力学（Calogero-Moser系），conic manifoldにおける波の伝播，燃焼理論など数多くの物理現象に登場する．また，数学的に興味深い問題が介在しており，近年盛んに研究されている．この問題に対して筆者による最近の研究成果を中心に論述したい．これ以降は非線形項がHartree型である次の方程式に限定する．

$$\text{(HE)}\quad i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\Delta u(t,x) + \frac{a}{|x|^2}u(t,x) + \lambda u(t,x)\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u(t,y)|^2}{|x-y|^\gamma}dy.$$

ただし，$i = \sqrt{-1}$は虚数単位，空間次元は$N \geq 3$,

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2},$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2},$$

$$a \geq -a(N) = -\frac{(N-2)^2}{4},\ 0 < \gamma < \min\{N,4\}.$$

また，λは実数である．（HE）はHartree方程式やChoquard-Pekar方程式とも呼ばれる．（HE）の最終項はHartree型非線形項といい,

$$g(u) = \lambda u\,(|x|^{-\gamma} * |u|^2)$$

と略記されることが多い．これは物理学的には重要なものであり，非局所的相互作用を表す典型例である．これは，多体シュレディンガー方程式の準古典近似や，プラズマに対するHartree-Fock近似をすることにより現れる．一般に非線形偏微分方程式の研究ではべき乗型，例えば

$$g(u) = \lambda |u|^{p-1} u$$

などをはじめとする局所的相互作用を意味する非線形性を考察することが多い．しかし，非線形シュレディンガー方程式に対してはポテンシャルの有無にかかわらず両者ともに研究対象であり，それぞれに数多くの結果が得られている．

シュレディンガー方程式に対する重要な性質は保存則の成立である．例えば，（HE）に対しては

$$\|u(t,x)\|_{L^2}^2 = \|u(0,x)\|_{L^2}^2,\ E(u(t)) = E(u(0)).$$

また，virial等式と呼ばれる，非線形シュレディンガー方程式の研究には欠かせない関係式も成立する：

$$\frac{d^2}{dt^2}\|xu(t,x)\|_{L^2}^2 = 8P(u(t,x)).$$

ただし，以上までに登場した汎関数は

$$\|v(x)\|_{L^2}^2 := \int_{\mathbf{R}^N}|v(x)|^2\,dx,$$

$$Q(v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}[|\nabla v(x)|^2 + \frac{a}{|x|^2}|v(x)|^2]dx,$$

$$G(v) := \frac{\lambda}{4}\iint_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N}\frac{|v(x)|^2|v(y)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy,$$

$$E(v) := Q(v) + G(v),\ P(v) := 2Q(v) + \gamma\, G(v).$$

逆2乗ポテンシャルの数学的特徴を見よう．まず，αの条件は次に示す作用素が非負自己共役である必要十分条件である：

$$P_a := -\Delta + a|x|^{-2} \text{ in } L^2.$$

閾値が明記できるのは，$N \geq 3$で成立するHardyの不等式

$$a(N)\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|v(x)|^2}{|x|^2}dx \leq \int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v(x)|^2\,dx$$

が次の意味で最良だからである：左辺の係数$a(N)$を少しでも大きくすると，逆向きの不等式が成立する零でない関数が存在する．ところで，作用素の非負性はシュレディンガー方程式に限らず偏微分方程式の研究で重要な役割を果たす．一方，自己共役性はシュレディンガー方程式の研究に必要不可欠である．特に，Stoneの定理によれば自己共役性は線形シュレディンガー方程式の可解性に対する必要十分条件である．量子力学ではハミルトニアンの自己共役性は本質的な仮定であることにも注意する．さて，伸張関係式

$$P_a[v(\mu x)] = \mu^2(P_a v)(\mu x)$$

が成立するため，逆2乗ポテンシャルの効果を無視することはできない．その影響が非負自己共役性の限界の登場と考えてもよかろう．更に，エネルギー汎関数$E(v)$の定義域

$$X := D((1+P_a)^{1/2})$$

がaの値によって異なる．実際，$a > -a(N)$のときはよく知られたソボレフ空間

$$X = H^1 = \{v\,|\,v, \nabla v \in L^2\}$$

*助教　数学教室
Assistant Professor, Dept. of Mathematics

であるが，$a=-a(N)$ のときはそれよりも若干広い関数のクラスである．そのため解析が難しいと思われていたが，筆者らはエネルギー法を開発し（[5]），エネルギー空間 X を解析することで，解の存在証明に至ったのである（[8]）．エネルギー空間の解析にはガンマ関数の性質が重要であることは補足しておきたい：

$$\|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2} \le \frac{\Gamma((N+2s)/4)\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma((N-2s)/4)\Gamma((1+s)/2)}\|P_{a(N)}^{s/2}u\|_{L^2},\ 0<s<1.$$

なお，エネルギー法は解の存在しか得られないため，一意性などはStrichartz 不等式を利用しなければならない．（HE）に対応するものは[1]にて本質的な結果が得られている．Strichartz 不等式は空間だけでなく時間についても積分した量に対する不等式である．

$$\|\exp(-itP_a)u_0\|_{L_t^r(L_x^p)} \le C\|u_0\|_{L_x^2}.$$

実は，非線形シュレディンガー方程式の解の一意存在はStrichartz不等式を利用し，縮小写像の原理に基づいて証明することが標準的である．しかし，逆2乗ポテンシャルが摂動された問題には解の存在に a ないしγに余計な条件を課す必要があることがわかっており，良い方法とは言えないのが現状である（[4]）．

定理1（解の存在）

⑴　（see[6, 8]）$u(0)\in X$とする．このとき，次の意味での時間局所解が一意に存在する：

$u(t,x)\in C([-T,T];X)\cap C^1([-T,T];X^*).$

ただし，X^*は X の双対空間である．

⑵　（see[7, 10]）$u(0)\in\Sigma:=X\cap D(|x|)$ であれば，⑴の時間局所解はで連続である．

⑶　（see[6, 8]）$\lambda>0$または$\lambda<0$，$0<\lambda<2$とする．このとき，⑴の時間局所解は時間大域解に延長できる（$T=\infty$）．

⑷　（see[7, 10]）

$\lambda<0, \gamma>2, E(u(0))<0, xu(0)\in L^2$

とする．このとき⑴の時間局所解は有限時刻で爆発する．

2．散乱問題

この節では特に断らない限り$\lambda>0$に限定する．このとき時間大域解の性質，特に $t=\pm\infty$の挙動を考察する．保存則及び虚数の影響で解は振動する．そこで，その振動が$\lambda=0$の解に相当する

$\exp(-itP_a)u_0(x)$

と同じか否かを考える．解 $u(t,\ x)$ の振動がこれと同じであれば，それを打ち消したものの極限

（FC）　$\lim_{t\to+\infty}\exp(itP_a)u(t,x)=u_+(x)$

の存在を期待する．$u(0)\in Y$ なるすべての（HE）の解に対し極限（FC）が確定するとき，（HE）は Y で漸近自由という．その一方で逆問題として「（FC）を満たすような（HE）の時間大域解 $u(t,\ x)$ が存在するか」も考える必要がある．存在すれば対応

$W_+ : u_+(x)\mapsto u(0,x)$

が定められ，これを（HE）の波動作用素という．今は$+\infty$の方向だけ考えたが$-\infty$の方向を考えてもよい．このとき量子力学で重要な役割を演じる散乱作用素

$S=W_+^{-1}\circ W_-$

が構成できる．このような極限（FC）に関わる問題を散乱問題という．$a=0$の場合には詳しく研究されている．

定理2（$a=0$に対する散乱問題）

⑴　（see[3]）$\gamma>1$であれば

$\Sigma=X\cap D(|x|)=\{v\,|\,v,\nabla v, xv\in L^2\}$

において漸近自由である．また，波動作用素がΣ上で構成できる．

⑵　（see[2]）$\gamma\le 1$ならば漸近自由にはならない．詳しく言うと，(FC)を更に修正すれば極限が確定する．

Hayashi-Tsutsumi[3]による方法は方程式（HE）と終値条件（FC）とを適当な変換を施した問題を解くものである．擬共形変換

$$u(t,x)=(it)^{-\frac{N}{2}}\exp\left(\frac{i|x|^2}{4t}\right)\overline{v\left(\frac{1}{t},\frac{x}{t}\right)}$$

を用いて変換すると（HE）は

$$i\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)=P_a v(t,x)+t^{\gamma-2}g(v(t,x))$$

と変換される．一方，（FC）は

$$v(0,x)=i^{-N/2}\exp(iP_a)\exp(i|x|^2/4)\exp(iP_a)\overline{u_+(x)}$$

と $v(t,\ x)$ の初期条件を与える形に変換された．なお，この変換が正しく機能するためには空間遠方での強い減衰を仮定した重み付きエネルギー空間Σで考えなければならない．（HE）に対する散乱問題を解決するため，$v(t,\ x)$ に対する偏微分方程式の初期値問題に対し解の存在を示したり，$t=0$における連続性などを調べたりする．そのために筆者は非自励系の非線形シュレディンガー方程式に対するエネルギー法を開発した（[11]）．（HE）に対応する結果を書き下したものが次の定理である．

定理3

⑴　$\theta\ge 0$，$v(0)\in X$とする．このとき，

$$i\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)=P_a v(t,x)+t^{\theta}g(v(t,x))$$

の時間局所解が次のクラスで一意に存在する（λが負でもよい）：

$v(t,x)\in C([0,T];X)\cap C^1([0,T];X^*).$

更に，次のエネルギー関係式が成立する：

$$\|v(t,x)\|_{L^2}^2=\|v(0,x)\|_{L^2}^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left[Q(v(t,x))+t^{\theta}G(v(t,x))\right]=\theta t^{\theta-1}G(v(t,x)).$$

⑵　$v(0)\in\Sigma$であれば，⑴の時間局所解はΣで連続である．

⑶　$\lambda>0$，または$\lambda<0$，$0<\gamma<2$とする．このとき，⑴の時間局所解は時間大域解に延長できる（$T=\infty$）．

これを（HE）に対する散乱問題に換言すれば以下のようになる．

定理4（散乱問題）

⑴　$\gamma>2$，$u_+\in\Sigma$とする．このとき（FC）を満たすような（HE）の時間大域解が一意に存在する．従って，波動作用素がΣにおいて構成できる．

⑵　$\gamma>2$，$u(0)\in\Sigma$とする．このとき（HE）の一意な時間大域解に対し極限（FC）が確定する．従って，(HE)はΣ上漸近自由である．

⑶　u_+と $u(0)$ との間には次の等式が成立する：

$$Q(u_+)=Q(u(0))+G(u(0))=E(u(0)).$$

注意．極限（FC）はどの意味なのか（つまり，位相）も重要である．上の定理4における極限の強さはΣのノルム位相である．漸近自由性と波動作用素の存在が同じΣで示されたことになるが，（HE）の初期値問題の解がΣで連続になることも示されている（定理1）ので，（HE）はΣで漸近完全であるといえる．

補足．$\gamma<1$，$u(0)\in\Sigma$の場合，極限（FC）がL^2の意味で成立する解は零解に限られる（例えば[3]）．これは極限（FC）では除去できていない振動が残っている影響が原因である．そのため，より複雑な補正を加えて散乱問題を考察する必要がある（修正散乱問題）．

3．今後の展望

（HE）に対する散乱問題は$\gamma<2$の場合に難しい．これを克服するためにはエネルギー法（定理3）にある仮定$\theta\geq 0$を緩める必要がある．残念ながら現状ではその手筈が整っていない．ところで，散乱問題の解決には初期値問題と同様に縮小写像の原理の方法もある．ここでも Strichartz 不等式が有効である（例えば[9]）．しかしながら$a>-a(N)$，$1<\gamma<2$でないと波動作用素が構成できない．$\gamma>2$の場合にはaないしγに余計な条件が必要である．本来散乱問題においては$\gamma>2$が扱いやすいとされていたが，それと逆行する結果である．また，解の一意存在がいえるエネルギー空間Xにおける散乱問題を解決するには，Morawetz 不等式と呼ばれる virial 等式を一般化した不等式を利用しないと難しい．Zhang-Zheng[13]で部分的な結果がある程度である．$a=-a(N)$ では完全に手付かずの状態である．

一方，$\lambda<0$の場合には定在波解と呼ばれる変数分離された解

$$\exp(i\omega t)\phi_\omega(x)$$

が存在するため，散乱問題はより難しくなる．ただ，時間無限大での挙動を調べる観点では軌道安定性の考察も有効である．これは簡単に言えば，初期値を定在波解のものから少しずらした（HE）の解がいくら時間を経過しても定在波解と近いままであることが軌道安定性の定義である．部分的な結果が Trachanas-Zographopoulos[12]にあるが，まだ研究余地が大いに残っていると感じる．そもそも，より一般化した非線形項に対する定在波解の存在は示されていないので，その証明が急がれている．

参考文献

［1］N. Burq, F. Planchon, J. Stalker, and A. S. Tahvildar-Zadeh, Strichartz estimates for the wave and Schrödinger equations with the inverse-square potential, J. Funct. Anal., 203 (2), 519-549 (2003).

［2］J. Ginibre and T. Ozawa, Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension n ≥2, Comm. Math. Phys., 151 (3), 619-645 (1993).

［3］N. Hayashi and Y. Tsutsumi, Scattering theory for Hartree type equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, 46 (2), 187-213 (1987).

［4］N. Okazawa, T. Suzuki, and T. Yokota, Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations with inverse-square potentials, Appl. Anal., 91 (8), 1605-1629 (2012).

［5］N. Okazawa, T. Suzuki, and T. Yokota, Energy methods for abstract nonlinear Schrödinger equations, Evol. Equ. Control Theory, 1 (2), 337-354 (2012).

［6］T. Suzuki, Energy methods for Hartree type equation with inverse-square potentials. Evol. Equ. Control Theory, 2 (3), 531-542 (2013).

［7］T. Suzuki, Blowup of nonlinear Schrödinger equations with inverse-square potentials. Differ. Equ. Appl., 6 (3), 309-333 (2014).

［8］T. Suzuki, Solvability of nonlinear Schrödinger equations with some critical singular potential via generalized Hardy-Rellich inequalities, Funkcial. Ekvac., 59 (1), 1-34 (2016).

［9］T. Suzuki, Scattering theory for Hartree equations with inverse-square potentials, Appl. Anal., 96 (12), 2032-2043 (2017).

［10］T. Suzuki, Virial identities for nonlinear Schrödinger equations with an inverse-square potential of critical coefficient. Differ. Equ. Appl., 9 (3), 327-352.

［11］T. Suzuki, Scatting theory for semilinear Schrödinger equations with an inverse-square potential via energy methods, submitted.

［12］G. P. Trachanas and N. B. Zographopoulos, Orbital stability for the Schrodinger operator involving inverse square potential, J. Differ. Equ. 259 (10), 4989-5016 (2015).

［13］J. Zhang and J. Zheng, Scattering theory for nonlinear Schrödinger equations with inverse-square potential. J. Funct. Anal., 267 (8), 2907-2932 (2014).