高等学校における実数の指導の考察
—背理法，$\sqrt{2}$，π，e，大学入試出題例を通して—

榎本　里志

1　はじめに

数に関する指導は，小学校第１学年から始まり，第6学年までに，小数や，分数の四則演算，小数と分数との関係などを学んでいる。また，中学校1学年では，負の数，第3学年では，$\sqrt{2}$のような無理数の存在の必然性と無理数を含む数の計算を扱っている。

また，円周率は，小学校第5学年で，「どんな大きさの円についても円周の長さの直径の長さに対する割合が一定（学習指導要領解説）」に着目させ，この一定の割合を円周率としてその存在を学び，第6学年では，それを用いた円の面積などを求めている。

小学校では，「円周率は3.14を用いるものとする。（学習指導要領）」として計算させているが，中学校第1学年で文字式の計算を学ぶことから，「円の周の長さや面積を円周率πを用いて表すことを扱う。（学習指導要領解説）」としている。

高等学校では，数学Ⅰで，中学校までに学習した自然数，整数，有理数及び無理数を実数としてまとめ，数を実数まで拡張する意義や数の体系についての理解を深め，実数間での四則演算，有理化なども学んでいる。さらに，この単元では「集合の考えを用いて論理的に考察し，簡単な命題を証明する（学習指導要領）」として，対偶を利用した証明や背理法による証明を扱う。

命題が「仮定」と「結論」からなり，その「仮定」から「結論」を導くこと，すなわち「証明」の意義については，中学校第3学年の「図形」で中心的な学習をしており，加えて，この段階では，観察や操作，実験などにより帰納的に導かれたものと，演繹的に導かれたものとの違いを学び，帰納や類推が主流であった小学校の算数との差が出る場面である。

ところが，中学校で学習した証明のスタイルに対し，高校に入学して間もなく，「結論を否定して矛盾を導く」という背理法の証明方法を学ぶことで，生徒は少なからず大きなインパクトを受けることになり，この証明手法が，あらゆる場面での証明に有効ではないかという錯覚を感ずるのも事実である。

一つの例として「円周率が循環しない小数であることも，背理法で簡単に証明出来るの

ではないか」という疑問を聞く生徒も現れ，この素朴な質問への即答に窮することもある。

この拙稿では，実数，すなわち有理数と無理数について，30数年の高等学校での指導経験と高等学校の数学教育にも少なからず大きな影響を与えている大学入試の出題例などを引用しながら，高等学校における実数指導について考察してみた。

2　循環する小数

整数と分数，小数の仕組みは小学校5年生までに指導されている。たとえば,

$$\frac{1}{2}=0.5,\ \frac{1}{3}=0.333\cdots,\ \frac{1}{4}=0.25,\ \frac{1}{5}=0.2,\ \frac{1}{6}=0.166\cdots,\ \frac{1}{7}=0.142857142857\cdots$$

のように，1を割り切る数は，2と5しかないことで，分母が2と5のベキだけを含む分数の場合は有限な小数になり，それ以外は，ある部分から永遠に同じ数の組が繰り返される性質，すなわち，循環小数になることは自然に体得している。

しかし，分子が分母で割り切れない分数が，なぜ循環小数になるのかの証明については，高等学校で割り算の原理を確認するまで，きちんとした証明は学んでいない。

［分数は循環小数になる］

【証明】　整数aを整数bで割ったときの商qを，余りをrとすると，除法の原理から

$a = bq + r$（ただし，$0 \leq r < b$）

分数を小数に直していくとき，分子を分母で割ることから，商を立てるたびに余りがでる。この余りが 0 となれば，そこで割り算は終了。以下，0 が循環する小数となる。この場合，小数は有限になる。一方，この余りに 0 が表れてこないとするとき，そのときの余りを r' とすると，$0<r'<b$ で，r' は整数なので，r' は1，2，…，$b-1$ の$b-1$個のうちのどれかの一つの値をとる。

すなわち，b 回割り算を計算すれば，その中には必ず同じ余りが出る。よって，商はその段階から同じ値を繰り返すことになり，循環小数になる。［終］

さらに，小学校の段階では，分子が分母で割り切れる小数，すなわち有限小数を分数に戻すことは，可能であるが，分子が分母で割り切れない循環小数を分数に変換することは出来ない。ところが，中学校で方程式を学ぶことから，次のような方法ですべての循環小数を分数に直す方法を知ることができる。

たとえば，$0.\dot{3} = 0.333\cdots = x$ とおくと

$$\begin{array}{rr} & 10x = 3.333\cdots \\ -) & x = 0.333\cdots \\ \hline & 9x = 3 \end{array} \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{3}$$

$2.\dot{2}\dot{7} = 2.2727\cdots = x$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & 100x = & 227.2727\cdots \\ -) & x = & 2.2727\cdots \\ \hline & 99x = & 225 \end{array} \qquad \therefore \quad x = \frac{225}{99} = \frac{25}{11}$$

のように，教科書にも記載されている場合もあるが，この説明に，少なからず違和感を感ずるのは私だけだろうか。それは，小学校から学んできた四則演算は，有限数のものであり。無限数になる分数は，分数同士の演算で通分や約分の方法により結果も分数として扱っているものの，無限に続く小数の四則演算が可能であるかは不明なままであり，無限の話題が正式に出てくるのは，高等学校数学Ⅲの数列の極限からである。その前に上記のような方法を扱うことが適切なのかが，疑問である。

つまり，有限数と無限数の微妙な問題を安易に扱って良いのだろうかとの危惧である。

その例として,「$0.\dot{9} = 0.999\cdots = 1$」と，パラドックスの例として有名な「アキレスと亀」の話題を取り上げてみよう。

前者については，無限数での四則演算が可能であるとして，$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$ であるから，この両辺を3倍して $\frac{1}{3} \times 3 = 0.333\cdots \times 3$ すなわち, $1 = 0.999\cdots = 0.\dot{9}$ という説明をすると，半信半疑ながら理解してくれる。

ところが，「アキレスと亀」で，たとえば，アキレスが100 mを10秒で走ることができるとし，亀は10秒で10 mしか走れないとして9 mのハンディ（スタート時，アキレスは亀の9 m後方にいる）をつけて競走させたらどうなるかという問題を次のように説明したら，反論できない生徒は多い。

すなわち，二者が同時にスタートし，アキレスが，最初亀がいた地点に着くには0.9秒かかり，その間亀は0.9 m先にいる。さらに，その地点にアキレスが辿り着くには0.09秒かかり，その間，亀は0.09 m先にいる。さらに…とすると，アキレスは亀がいた地点に辿り着いたときには，わずかながら亀はその先にいることになる。すなわち，アキレスは亀には追いつけないということになる。この論点で生じた逆理を，前例の「$0.\dot{9} = 0.999\cdots = 1$」との関係を用いて解決できる生徒は非常に少ないのが現状である。

つまり，有限数と無限数には，非常にデリケートな問題があり，初等段階での数学教育においては，高等学校の数学Ⅲで無限数列を学ぶまで体系的に学ぶ機会はない。

※アキレスは，$0.9 + 0.09 + 0.0009 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{0.9\left(1-0.1^n\right)}{1-0.1} = 1$ により，1秒後には追いつく。

また，前出の $0.\dot{3} = 0.333\cdots = x$ として求めた計算は，極限値に関する線型性

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ が説明されたあとならば,

$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{10^k}$ より $10x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{10^{k-1}}$ であるから, $9x=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{3}{10^n}\right)=3$ となり，$x=\frac{1}{3}$ とすることで，無限小数の四則演算が可能となることが説明できる。

さて，これまで述べたように，有理数は，整数，有限小数，循環小数のいずれかで表されるが，このこと自体を設問にした問題が，2013年 大阪大学で出題されたことがある。

「有理数は，整数，有限小数，循環小数のいずれかで表される。これを証明せよ。」

小学生のときから，殆ど明らかなこととして体得していたことを，問われたことで，受験生の多くは困惑したと推察される。

3　連分数

有理数と無理数の話題を取り上げる上で，高校生に紹介しておきたい話題が連分数である。分数式の計算は高等学校では数学Ⅱで学ぶが，連分数という用語はもちろん，その性質を学ぶ機会は少ないが，高校生にも十分に理解できる内容である。

すなわち，分数の中に，さらに分数が含まれているような $a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3\cdots}}}$ なものを連分数といい，とくに，分子 b_1，b_2，… がすべて1で a_0 が整数，a_1，a_2，… が正の整数である連分数 $a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3\cdots}}}=[\,a_0 : a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\,]$ を正則連分数というが，連分数には，前節でふれた循環小数についても，次のように興味ある性質がある。

たとえば，$\frac{25}{11}=2.\dot{2}\dot{7}$ は，連分数に直すと $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=[2:3,\ 1]$ と有限な正則連分数になる。このことは，次のように容易に説明できる。

［有理数 ⇔ 有限正則連分数］

【証明】 ⇒ 整数 a を整数 b で割ったときの商 q を，余りを r とすると，$a=bq+r$（ただし，$0\leq r<b$）より，$\frac{a}{b}=q+\cfrac{1}{\cfrac{b}{r}}$ となる。すなわち，$\frac{a}{b}$ を正則連分数に直すには $\frac{b}{r}$ を正則連分数にすればよいことになり，ユークリッドの互除法が有限回で終了することに，有理数は有限な正則連分数になる。

有限な連分数は通分を繰り返せば，$\dfrac{a}{b}$ の形の分数に変形できるので有理数になる。[終]

この対偶をとることにより，「無限正則連分数 ⇔ 無理数」ということができる。

4　循環しない小数 ⇒ 無理数 … $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明を巡って

実数のうち循環小数が有理数であり，循環しない小数が有理数でない数，すなわち既約分数で表せない数が無理数であることは，生徒にとって理解し難いことではない。

その背景があるせいか，数を実数まで拡張した意義を学んだ後，論理的に考察する能力の育成として学ぶ背理法の例題に，多くの教科書が取り上げているのが「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」である。

教科書の例題であることから，無理数に係わる証明は背理法以外にないという誤った認識を持つ生徒も多いのも事実である。

ここでは，「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことの証明を，いくつかの例を通して再考してみたい。

【証明例1】［多くの教科書で扱っている証明方法］

$\sqrt{2}$ は無理数でない。すなわち有理数であると仮定すると，1以外に公約数を持たない（互いに素な）2つの自然数 m，n を用いて $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$ と表される。このとき，$m=\sqrt{2}n$

両辺を2乗すると，$m^2=2n^2$ … ①

よって，m^2 は偶数。したがって，m も偶数である（この部分の証明略）

ゆえに，m は，ある自然数 k を用いて $m=2k$ ･･･ ②　と表される。

②を①に代入すると，$4k^2=2n^2$

すなわち $n^2=2k^2$ よって，n^2 は偶数。したがって，n も偶数である。

m と n はともに偶数であり，公約数2をもつ。このことは，m と n が1以外に公約数をもたないことに反する。したがって，$\sqrt{2}$ は無理数である。[終]

【証明例2】［証明例1の①前行までは同様］

…　$\dfrac{m^2}{n^2}=2$ より，$\dfrac{m^2}{n^2}$ は整数となるが，m と n は互いに素であるから，$n^2=1$ でなければならない。したがって，$m^2=2$ であるから，$m=\sqrt{2}$。

ここで，$1<\sqrt{2}<2$ であるから，1と2の間には整数 m は存在しないことに矛盾する。

したがって，$\sqrt{2}$ は無理数である。[終]

【証明例3】［証明例1の①までは同様］

…　ここで，左辺で m が s 個に素因数分解されるとすると，$m^2=m\times m$ には，$2s$ 個，すなわち偶数個の素因数がある。一方，右辺では，n が t 個に素因数分解されるとする

と，$n^2 = n \times n$ で，$2t$ 個，2も素数であるから，奇数個の素因数があることになる。

これは素因数分解の一意性（この証明も必要であるが …）に反する。

したがって，$\sqrt{2}$ は無理数である。［終］

【証明例4】［証明例1の①までは同様］

… すべての自然数は，3で割ると余りは，0か1か2である。ここで，自然数の2乗を3で割った余りは，0か1に限られる（この部分証明略）から，①において，m^2 が3で割り切れるとすると，$2n^2$ も3で割り切れる。すなわち，n^2 も3で割り切れる。すなわち，m と n はともに3で割り切れることになり，m と n が互いに素に反する。したがって，m^2 を3で割った余りは1であることになり，①で $2n^2$ を3で割った余りも1となるが，$2n^2$ は3で割ると余りが2となるから矛盾する。

したがって，$\sqrt{2}$ は無理数である。［終］

【証明例5】［2次方程式が有理数の解をもつ場合を用いる証明方法］

「2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数の解 $\dfrac{p}{q}$（既約分数）をもつならば，q は a の約数で，p は c の約数である」【∵） $a\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 + b\left(\dfrac{p}{q}\right) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ap^2 + bpq + cq^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad p(ap + bq) = -cq^2$ 　p，q は互いに素であるから，p は c の約数である。

また，$ap^2 = q(-ap - cq)$ より　p，q は互いに素であるから，q は a の約数となる。（なお，このことは，n 次方程式でも同様に成立することが示すことが出来る）】

上に述べた性質により，2次方程式 $x^2 - 2 = 0$ の解は，$\pm\sqrt{2}$ であり，もし，この方程式が有理数の解をもつならば，上のことから，± 1，± 2 しかありえないから，$\sqrt{2}$ は有理数でない。［終］

【証明例6】［無限降下法と呼ばれている方法である］

$\sqrt{2} = \dfrac{m_0}{n_0}$（$1 < \sqrt{2} < 2$ より，m_0 と n_0 は互いに素な自然数）と表されたとする。

$\sqrt{2} + 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$ であるから，$\sqrt{2} = \dfrac{m_0}{n_0} = \dfrac{1}{\dfrac{m_0}{n_0} - 1} - 1 = \dfrac{2n_0 - m_0}{m_0 - n_0}$ となり，これを $\dfrac{m_1}{n_1}$

とおくと，$m_1 = 2n_0 - m_0$，$n_1 = m_0 - n_0$ であり $1 < \sqrt{2} < 2$ より，$n_0 < m_0 < 2n_0$ であるから，$0 < 2n_0 - m_0 = m_1 < 2m_0 - m_0 < m_0$ この操作を続けると，$m_0 > m_1 > m_2 > \cdots$ となることになる正の整数からなる無限数列が存在することになるが，m_0 より小さい正の整数は有限個しかないので不合理である。

したがって，$\sqrt{2}$ は有理数でない。［終］

【証明例7】［連分数展開による証明・・・無理数⇔無限正則連分数 であることを用いる］

$1 < \sqrt{2} < 2$ より，$\sqrt{2}$ を整数部分と小数部分に分けると（この部分は，多くの教科書

でも練習問題として扱っている）$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)$ と表すことができ，

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}=\cdots$$

以下，$\sqrt{2}-1$ の部分が無限に繰り返される。

したがって　$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}=[1:2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots]$ となることから

$\sqrt{2}$ は無理数である。［終］

このように，$\sqrt{2}$ の無理数性の証明には背理法以外にいろいろな方法があり，$\sqrt{2}$ の無理数性の証明＝背理法 という認識を与えかねない教科書の例題としての扱いは，柔軟な思考力ある高校生にとって適切かどうかは議論の分かれるところと思う。

5　$2^{\sqrt{2}}$ とは

前述したように，数に関する四則演算は，有理数は小学校までに，平方根や円周率 π などの実数は中学校までに学習している。

これらの計算方法を学ぶ中で，有理数同士の四則演算の結果もまた，有理数になることや，有理数と無理数の四則演算の結果がどうなるかなどについては，数学Ⅰの論理の練習問題として，次のような形でよく取り上げられる。

「次の命題は真か偽か。偽のときは反例を挙げよ。

（ｉ）有理数と無理数の積は無理数である ［偽：反例 0 と $\sqrt{2}$］

（ⅱ）無理数と無理数の和は無理数である ［偽：反例 $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$］ 」 など

さらに，中学校1学年で指数を定義し，3学年までに指数を含んだ多項式の計算などを学習し，高等学校数学Ⅱで指数関数を扱うときに，指数を有理数まで拡張する意義と，指数法則が有理数まで成り立つことを学ぶ。

ここで問題となるのが，指数が無理数の場合についてである。

たとえば，$2^{\sqrt{2}}$ の値は，$1<\sqrt{2}<2$ であるから，$2^1<2^{\sqrt{2}}<2^2$ となるような値があるとして，$\sqrt{2}=1.4142\ \cdots$ であるから，指数を有理数とした累乗の列を

$$2^1 = 2\ ,\ 2^{1.4} = 2.6390\cdots\ ,\ 2^{1.41} = 2.6574\cdots\ ,\ 2^{1.414} = 2.6647\cdots\ ,\ 2^{1.4142} = 2.6651\cdots$$

のように，ある一定の値に近づくことを直感的にその存在を認めさせる程度にとどめ，指数関数の連続性や単調性，指数法則が実数の範囲まで成り立つことも結果論的にまとめるだけで，まして，$2^{\sqrt{2}}$の値が有理数か無理数かまで踏み込むことはない。

※ $2^{\sqrt{2}}$ が無理数となることは，「ゲルフォント＝シュナイダーの定理：a を有理数係数の多項式の解，b を有理数係数の多項式の解のうち有理数でないものとするとき，a^bは超越数である」によれば，2は $x-2=0$ の解，$\sqrt{2}$ は $x^2-2=0$ の有理数でない解なので定理をみたすから超越数である。超越数は無理数なので $2^{\sqrt{2}}$ は無理数になることが示されるが，この定理は，1900年当時，数学の未解決問題としてされていたヒルベルトの23の問題のうちの第7問題にあげられていたように，その証明は難解であり，本稿のレベルを超える。

さらに，この定理によると，$2^{\sqrt{2}}$は無理数となり，無理数の無理数乗の無理数性について考察することができる。すなわち，指数が無理数でも指数法則が成り立つとしたことにより，$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\,2} = 2$（有理数）となり，無理数の無理数乗の中には有理数となるものが存在することになる。

これまで述べた内容が，2020年横浜市立大学では入試問題として出題された。

「以下の問いに答えなさい。

(1)　$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$の値を求めなさい。　(2)　$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明しなさい。

(3)　x^y の値が有理数になる無理数の組（$x,\ y$）が存在することを証明しなさい。」

この問題の(3)の【解答例】としては，高校生の段階では $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数か無理数であるかは判断できないので，次のような解答をすることになる。

すなわち，$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数ならば，(2)より，$\sqrt{2}$ が無理数であるから，$x=y=\sqrt{2}$ とすれば題意が示される。これに対し，$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数ならば，(1)，(2)より，$x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，$y=\sqrt{2}$ とすれば題意が示される。［終］

さらに，1986年大阪大学では，つぎのような出題例もある。

「(1)　$\log_3 4$ は無理数であることを証明せよ。

(2)　$a,\ b$ は無理数で，a^b が有理数であるような数の組 a，b を求めよ。」

【解答例】(1)　$\log_3 4 > 0$ が有理数であると仮定すると，正の整数 m，n を用いて $\log_3 4 = \dfrac{m}{n}$ とおけるから，$3^{\frac{m}{n}} = 4$ であるから $3^m = 4^n$ となり，左辺は奇数，右辺は偶数となり矛盾。したがって，$\log_3 4$ は無理数である。

（2） $\sqrt{3}$ は無理数（証明略），$\log_3 4$ は無理数であるから，$a=\sqrt{3}$，$b=\log_3 4$ とすると，

$$\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 4}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_3 2}=3^{\log_3 2}=2$$ （有理数）となるから，これが a，b の組である。［終］

6　実数に関する大学入試での出題例

ここまでもいくつか例を挙げたが，無理数に係わる性質や証明問題は，大学入試でも多く取り上げられていて，高校生の無理数指導の参考になる例が多い。さらに，代表的と思われるいくつかを取り上げてみよう。

$\boxed{\text{例題1}}$ 「$\sqrt[3]{2}$ は無理数である」［2002年東京理科大，2012年京都大で出題，なお，東京理科大では，（1）背理法とは何かを20字以上，100字以内で説明せよ。京都大では（2）$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。という設問を加えている］

【$\sqrt[3]{2}$ が無理数の略証】 $\sqrt[3]{2}>0$ が有理数であると仮定，$\sqrt[3]{2}=\dfrac{m}{n}$（m，n は互いに素な正の整数）とおくと，$2n^3=m^3$ より，m と n がともに偶数となり，互いに素であることに反する。［終］

【京都大学（2）の略解】 $P(x)$ が x^3-2 で割り切れないと仮定して，

$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c$（$a$，$b$，$c$ の少なくとも一つは0でない有理数）とおく。

$\alpha=\sqrt[3]{2}$ としたとき，$P(\alpha)=0$ であるから，$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ となる a，b，c の少なくとも一つは0でない有理数が存在しなくてはならない。

（イ） $a=0$ のときは，$b=c=0$ となり不合理

（ロ） $a\neq 0$ のときは，$\alpha^2+\dfrac{b}{a}\alpha+\dfrac{c}{a}=0$ より互助法により，

$x^3-2=\left(\alpha^2+\dfrac{b}{a}\alpha+\dfrac{c}{a}\right)\left(x+d\right)+ex+f$（$d$，$e$，$f$ は有理数）から $e=f=0$　さらに，

$(-d)^3-2=0$ であり，d が有理数にならないので不合理。［終］

※［2015年大阪大学では「（1）$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ

（2） p，q，$\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする。このとき，$p=q=0$ であることを示せ」という出題例がある。］

【大阪大学（2）の略解】 $\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q=r\cdots$①　とおく。（$p$，$q$，$r$ は有理数）

$\sqrt[3]{3}q=r-\sqrt{2}p$ として3乗して $\sqrt{2}p(3r^2+2p^2)=r(r^2+6p^3)-3q^3$ を得る。

$3r^2+2p^2>0$ であるから，$p\neq 0$ のとき $\sqrt{2}$ が無理数であるから，$p=0$，このとき，さらに，$\sqrt[3]{3}$ が無理数であるから，$q=0$ となる。［終］

例題2 「$\log_2 3$は無理数であることを証明せよ」［2002年千葉大学，2017年県立広島大学で出題。千葉大学では「(2) nが正の整数のとき，$\log_2 n$が整数でない有理数となるかどうか調べよ」。県立広島大学では，「(2) $3^q = 2^r$を満たす有理数q，rを求めよ。(3) $9^x 8^{y-1} = (1.5)^{2y+1}(0.5)^x$を満たす有理数$x$，$y$を求めよ。」という問題を（1）の結果を利用する設問を加えている。］

【$\log_2 3$は無理数であることは，前節と同様】

【千葉大（2）の略解】 $n=1$のときは$\log_2 n = 0$，$n \geq 2$のとき，$\log_2 n = \dfrac{p}{q}$（p，qは互いに素）として，$2^p = n^q$より，左辺が，素因数2しかないことから，$n = 2^r$（rは正の整数）となることから，$\log_2 n = \dfrac{p}{q} = r$（正の整数）となる。［終］

【県立広島大の略解】 （2） $3^q = 2^r \Leftrightarrow q\log_2 3 = r$より，$q \neq 0$が不合理を導き，$q = 0$から$p = 0$ （3） $3^{2x-2y-1} = 2^{-x-5y+2}$と変形できるから，(2)を利用して，$x = \dfrac{3}{4}$，$y = \dfrac{1}{4}$ ［終］

例題3 「$\tan 1^\circ$は無理数である」［2006年に京都大学で出題されたものであるが，三角関数の加法定理の応用になる］

【略証】 $1^\circ = \theta$とおき，$\tan\theta$が有理数と仮定すると，自然数k（$1 \leq k \leq 88$）に対し，加法定理により$\tan(k+1)\theta = \dfrac{\tan k\theta + \tan\theta}{1 - \tan k\theta \tan\theta}$であるから，数学的帰納法により，$1 \leq n \leq 89$のすべての自然数で成り立つことになるが，$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$は無理数であるから不合理。［終］

※［2018年茨城大学では，「2つの実数α，βはそれぞれ，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$を満たすとする。次の（ⅰ）と（ⅱ）の各命題に対して，その真偽を述べよ。また，真ならば証明し，偽ならば反例を示せ。

（ⅰ）$\tan\alpha$が無理数ならば，$\tan 2\alpha$は無理数である。

（ⅱ）$\tan\beta$が無理数ならば，$\tan\dfrac{\beta}{2}$は無理数である。」という出題例がある。］

【略解】 （ⅰ）［偽］反例：$\alpha = \dfrac{\pi}{8}$，$\beta = \dfrac{\pi}{4}$とすると，$\tan\dfrac{\pi}{4} = 1 = \dfrac{2\tan\dfrac{\pi}{8}}{1-\tan^2\dfrac{\pi}{8}}$より，

$\tan\dfrac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$（無理数）

（ⅱ）［真］証明：対偶をとって，「$\tan\dfrac{\beta}{2}$が有理数ならば$\tan\beta$は有理数である」ことを証明。$\tan\dfrac{\beta}{2} = r$（有理数）ならば，$\tan\beta = \dfrac{2\tan\dfrac{\beta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\beta}{2}} = \dfrac{2r}{1-r^2}$（有理数）［終］

※さらに，［2020年福岡女子大学では，以上の出題例をまとめたような類似の例もあり，正接の値に関する話題は尽きない。「有理数 $\dfrac{q}{p}$（p，q は整数，$p \neq 0$）と表されることを利用して，以下の問に答えなさい。

（1） $\tan\theta$（$0^\circ < \theta < 45^\circ$）が有理数ならば，$\tan 2\theta$ も有理数であることを示しなさい。

（2） $\tan\alpha$ と $\tan\beta$（$0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$）が有理数であるとき，$\tan(\beta-\alpha)$ も有理数であることを示しなさい。

（3） $\tan 4^\circ$ が無理数であることを示しなさい。ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは証明せずに利用してよい。

【略解】（1），（2）略。（3）は，$60^\circ = 64^\circ - 4^\circ$，$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$（無理数）であることから，（1），（2）の結果を利用。

例題4　「n を1以上の整数とするとき，次の問いに答えよ。

（1） $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は整数であることを示せ。

（2） $\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ が共に有理数であるような n は存在しないことを示せ。

（3） $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数であることを示せ。［2016年 富山大学で出題］

【略解】（1） $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$（p，q は互いに素な自然数）とおく。$n = \dfrac{p^2}{q^2}$ は自然数で，p，q は互いに素だから，$q = 1$ である。

（2）（1）から，$\sqrt{n} = a$，$\sqrt{n+1} = b$（a，b は自然数で $1 \leq a < b$）とすると，$b^2 - a^2 = 1 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 1$ となり，このような $1 \leq a < b$ は存在しない。

（3） $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = r$（有理数）と仮定して，$\sqrt{n+1} = \sqrt{n}+r$，$\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-r$ より両辺2乗すると，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ が共に有理数となり（2）に矛盾する。［終］

※［2007年京都大学では「n を1以上の整数とするとき，次の2つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ。

命題 p：ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ が共に有理数である。

命題 q：すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。」という出題例がある。

※［2020年大阪医科大学では，さらに，次のような類似の出題例もある。「a，b，c はいずれも正の有理数とする。

（1） $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$ も $\sqrt{b}$ も有理数であることを示せ。

（2） $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ のいずれも有理数であることを示せ。

【略解】（1） $\sqrt{a}+\sqrt{b} = p$（有理数）とおくと，$\sqrt{a} = \dfrac{p^2+a-b}{2p}$，$\sqrt{b} = \dfrac{p^2+b-a}{2p}$ となり，それぞれの右辺は有理数である。

（2） $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = q$（有理数）とおき，$\sqrt{b}+\sqrt{c} = q-\sqrt{a}$ の両辺を2乗して，

$b+2\sqrt{bc}+c=q^2-2q\sqrt{a}+a$ より，$q>0$ より，$\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{bc}{q^2}}=\dfrac{q^2+a-b-c}{2q}$ となり，

右辺は有理数より，a も $\dfrac{bc}{q^2}$ は正の有理数なので，(1) により，$\sqrt{a}$ は有理数。

同様に，$\sqrt{b}+\sqrt{\dfrac{ca}{q^2}}=\dfrac{q^2+b-c-a}{2q}$，$\sqrt{c}+\sqrt{\dfrac{ab}{q^2}}=\dfrac{q^2+c-a-b}{2q}$ より。

例題5　「次の問いに答えよ。

(1)　1，4，9，16 のように，自然数の2乗で表される数を平方数という。n を平方数でない自然数とするとき，$\sqrt{n}$ は無理数であることを示せ，

(2)　a，b を正の有理数，n を自然数とするとき，$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}$ は無理数であることを示せ。[2018年佐賀大学で出題]

【略解】 (1)　$\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$（p，q は互いに素な自然数）とおく。$n=\dfrac{p^2}{q^2}$ より，$nq^2=p^2$

ここで，p^2，q^2 の素因数の個数は偶数個，一方，n は平方数でないので，素因数は奇数個であるから矛盾が起こる。[4節の【証明例3】参照]

(2)　$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}=r$（r は有理数）とおき，2乗すると，$\sqrt{n(n+1)}$ が有理数となることが不合理であることを，(1) の対偶により「$\sqrt{n(n+1)}$ が有理数ならば，$n(n+1)$ が平方数である。」ことに矛盾することで示す。

すなわち，$n(n+1)=m^3$ とおくと，$m>n$，$n=m^2-n^2=(m-n)(m+n)>m+n$ であることから矛盾がおきる。[終]

例題6　「この問題の解答に背理法を用いてはならない。なお，必要なら正の整数に関する素因数分解を用いてよい。以下の各問に答えよ。

(1) (a)「正の整数 m について，$\log_{10} m$ が有理数ならば $\log_{10} m$ は整数である。」このことを証明せよ。

(b) (a) に述べられた事実を用いて，次の2013個の数

$\log_{10}1$，$\log_{10}2$，$\log_{10}3$，…，$\log_{10}2012$，$\log_{10}2013$

のうち無理数となるものはいくつあるか理由を述べ答えよ。さらに，有理数となるものをすべて求めよ。

(2) (a)「2つの正の整数 m，n について，$\sqrt[n]{m}$ が有理数ならば $\sqrt[n]{m}$ は整数である。」このことを証明せよ。

(b) (a) に述べられた事実を用いて，次の2013個の数

$\sqrt[6]{1}$，$\sqrt[6]{2}$，$\sqrt[6]{3}$，…，$\sqrt[6]{2012}$，$\sqrt[6]{2013}$

のうち無理数となるものはいくつあるか理由を述べ答えよ。さらに，有理数となるものをすべて求めよ。

（c）（a）に述べられた事実を用いて，次の2013個の数

$$\sqrt{1}\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ \cdots\ ,\ \sqrt{2012}\ ,\ \sqrt{2013}$$

のうち無理数となるものはいくつあるか理由を述べ答えよ。」［2013年，東京理科大］

【略解】（1）（a）$m=1$ のとき，$\log_{10}1=0$（整数），$m\geq 2$ のとき，$\log_{10}m=\dfrac{p}{q}$（p，q は互いに 素）として，$m^q=10^p=2^p5^p$ より，$m=2^a5^b$（a，b は正の整数）とおけることから，$aq=p$，$bq=p$ より，$q=1$ となる。

（b）（a）より，$\log_{10}m=q$（整数）となる m は，$1\leq m\leq 2013$ より，

$m=1$，10，10^2，10^3 の4個が有理数。したがって，無理数は $2013-4=2009$（個）

（2）（a）$m=1$ のとき，$\sqrt[n]{1}=1$（整数），$m\geq 2$ のとき，$\sqrt[n]{m}=\dfrac{p}{q}$（p，q は互いに 素）とすると，$mq^n=p^n$，ここで，右辺の p の素因数を，p_1，p_2，$\cdots$，p_k とすると，左辺も，これらの素因数をもつことになるが，p，q は互いに素であるため，$q=1$ となる。

（b）（a）より，$m=p^6$ となる m は，$1\leq m\leq 2013$ より，$m=1^6$，$2^6=64$，$3^6=729$ の3個が有理数。したがって，無理数は $2013-3=2010$（個）

有理数は，$\sqrt[6]{1}$，$\sqrt[6]{64}$，$\sqrt[6]{729}$

（b）（a）より，$m=p^2$ となる m は，$1\leq m\leq 2013$ より $m=1^2$，2^2，$\cdots$，$44^2=1936$ の44個が有理数。したがって，無理数は $2013-44=1969$（個）［終］

例題1 で2002年の同大学の出題例を示したが，背理法の扱い方の変化に興味深い出題である。本問の出題意図，解答が公表されていないため詳細は不明であるが，「無理数性の証明は背理法」，「証明に行き詰ったら，背理法や帰納法がある」という受験テクニックへの警鐘とも思えるのだが。…

7　π や e も無理数

さて，これまで無理数にまつわるいくつかの話題を追ってきたが，生徒からの質問に窮した円周率 π についての話に戻そう。

円周率 π が無理数であるとの証明は，1761年にドイツの数学者ヨハン・ランベルトによって初めて証明されたとされているが，その証明は完全ではなかったとの評価もある。後年，ルジャンドルによって補完されたとの記録もあり，π の無理数性の証明は数学者の話題を欠くことはなかったようだ。数学教育では，次のような入学試験問題として扱われている点が注目される。

2003年 大阪大学　π を円周率とする。次の積分について考える。

$$I_0 = \pi\int_0^1 \sin\pi t dt\ ,\ I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n \sin\pi t dt \quad (\ n = 1\ ,\ 2,\ \cdots)$$

(1)　n が自然数であるとき，不等式 $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}<e^x$（$x>0$）が成立することを数学的帰納法により示せ。これを用いて，不等式 $I_0 + uI_1 + u^2 I_2 + \cdots + u^n I_n < \pi e^{\pi u}$（$u>0$）が成立することを示せ。

(2)　I_0，I_1 の値を求めよ。また，漸化式 $I_{n+1}=\frac{4n+2}{\pi}I_n - I_{n-1}$（$n=1,\ 2\ ,\ \cdots$）が成立することを示せ。

(3)　π が無理数であることを背理法により証明しよう。π が無理数でないとし，正の整数 p，q によって $\pi=\frac{p}{q}$ として表されると仮定する。$A_0 = I_0$，$A_n = P^n I_n$ とおくとき，A_0，A_1，A_2，$\cdots$ は正の整数になることを示せ。さらに，これから矛盾を導け。

【略解】（1）（前半）$f_n(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$ とおき，$f_n'(x)=f_{n-1}(x)$ を利用。

（後半）$0<t<1$ で，$0<t^k(1-t)^k\sin\pi t<1$ であることから，$u^k I_k < \frac{(u\pi)^k \pi}{k!}$ を導き，$k=0$ から n までの総和をとり，不等式 $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}<e^x$ で $x=u\pi$ とおく。

(2)　$I_0 = 2$，I_1 は，三角関数を積分する方向で2回の部分積分により，$I_1=\frac{4}{\pi}$

同様にして，$I_{n+1}=\frac{4n+2}{\pi}I_n - I_{n-1}$

(3)（2）の漸化式を用いると，$n\geq 1$ で，$p=q\pi$ として，

$$A_{n+1}=p^{n+1}I_{n+1}=p^{n+1}\left(\frac{4n+2}{\pi}I_n - I_{n-1}\right)=\frac{p(4n+2)}{\pi}p^n I_n - p^2\cdot p^{n-1}I_{n-1}$$

$$=q(4n+2)A_n - p^2 A_{n-1} \cdots ①$$

また，$A_0 = I_0 = 2$，$A_1 = pI_1 = \pi q I_1 = 4q$ から，A_0，A_1 は正の整数。したがって，①により，帰納的に A_n（$n=0$，1，2，$\cdots$）は正の整数となり，（1）で $u=p$ とすると $I_0 + pI_1 + p^2 I_2 + \cdots + p^n I_n < \pi e^{\pi p}$　より，$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n < \pi e^{\pi p}$

A_n（$n=0$，1，2，$\cdots$）は正の整数であるから，左辺は $n+1$ 以上となり，$n+1<\pi e^{\pi p}$ となるが，右辺は定数であり，$n\to\infty$ とすると左辺は ∞ に発散することになり，π が無理数でないとし，正の整数 p，q によって $\pi=\frac{p}{q}$ として表されると仮定したことに矛盾する。

したがって，π は無理数である。[終]

やや，計算量は多いが，π が無理数であることを，高校生でも十分理解できるものとして，紹介しておきたい問題であると思う。

円周率 π と同様に，高等学校数学Ⅲで学ぶ自然対数の底（ネピアの数）e も無理数であ

る。e の定義については，高等学校学習指導要領解説には，【「数学Ⅲ」ではじめて扱う。その際，極限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 及び $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ が収束することを，コンピュータなどの情報機器を用いるなどとして直感的に理解させるようにする】とあり，単調性や有界性などの議論はしない。ここではそれら議論は省いて，e も，無理数であることの証明について，次のような入学試験問題としての出題例を取り上げてみよう。

1997年 大阪大学　自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^n e^{1-x}$ と，その積分 $a_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を考える。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　区間 $0\le x\le 1$ 上で $0\le f_n(x)\le 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ。

(2)　a_1 を求めよ，$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ。

(3)　自然数 n に対して，等式 $\frac{a_n}{n!}=e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

(4)　いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数にならないことを示せ。

【略解】(1)　$0\le x\le 1$ で $f_n(x)$ が単調増加であることから $0=f_n(0)\le f_n(x)\le f_n(1)=1$

等号は，$0<x<1$ では成り立たないから，$\int_0^1 0dx<\int_0^1 f_n(x)dx<\int_0^1 1dx$

(2)　$a_1=e-2$, $a_n=na_{n-1}-1$

(3)　(2) より，$\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=-\frac{1}{n!}$　$\therefore \frac{a_n}{n!}=\frac{a_1}{1!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}=e-2-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}\right)$

であるから，$\frac{a_n}{n!}=e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}\right)$

(4)　(3) より，$n!e=a_n+n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}\right)\cdots$ ①　$1\le k\le n$ で $n!\frac{1}{k!}$ は整数であり，

(1) から，$0<a_n<1$ であるから，①の右辺は整数でないことになるので，$n!e$ は整数でない。　［終］

本問のままでは，e が無理数の証明になっていないと思われるが，(4) で，e が無理数でないとして，$e=\frac{p}{q}$（p , q は互いに素な正の整数）とおき，①で $n=q$ としても成り立つ筈だから，$q!e=q(q-1)!e=a_q+q!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{q!}\right)$　これに，$p=qe$ を代入すると

$p(q-1)!=a_q+q!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{q!}\right)$ となり，(4) の解答と同様に，左辺は整数であるが，右辺が整数でないので矛盾する，したがって，e は有理数でない。［終］

※［ランベルトやルジャンドルによる の無理数性の証明の骨子］

tan x を sin x , cos x のマクローリン級数の規則性を利用して，

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{6!}\cdots}=\cfrac{x}{\cfrac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{6!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{7!}+\cdots}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{30}+\frac{x^6}{840}\cdots}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\cdots}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{\cfrac{3-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{40}-\cdots}{1-\frac{x^2}{10}+\frac{x^4}{280}\cdots}}}$$

$$=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{\frac{x^2}{5}-\frac{x^4}{70}+\cdots}{1-\frac{x^2}{10}+\frac{x^4}{280}-\cdots}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{\cfrac{5-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{58}-\cdots}{1-\frac{x^2}{14}+\cdots}}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{\frac{x^2}{7}+\cdots}{1-\frac{x^2}{14}+\cdots}}}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{\cdots}}}}}$$

と無限に連分数展開できることから，「 x が有理数ならば，tan x は無理数である」ことを導いた。このことにより，π が有理数とすると，$\frac{\pi}{4}$ も有理数となるが $\tan\frac{\pi}{4}=1$ は有理数となって矛盾。したがって，π は無理数である。［終］

連分数展開に慣れると，この証明は理解しやすい。π の無理性，超越性の証明には，その他にもいくつかの方法があるようだが，e と同様に私自身の技量を超えるものである。

この項の最後に，π や e の美しい連分数展開を書きとめておこう。

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\cfrac{5^2}{11+\cdots}}}}}}\qquad e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}}}}$$

8　π と e を話題にした興味ある問題

π と e にまつわる問題で，紹介しておきたい例をいくつか取り上げてみよう。

2003 年 東京大学　円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

【略解】　半径 1 の円に内接する正 12 角形の一辺の長さ l は，$l=2\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$2\pi\cdot 1>12l$ より $\pi>3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ここで，$\sqrt{2.44^2}=\sqrt{5.4536}<\sqrt{6}$

$\sqrt{1.42^2}=\sqrt{2.0164}>\sqrt{2}$ であることから。

（内接正 8 角形の周囲や，面積など利用もある。三角関数のどの公式になるかの差）［終］

2013年 大阪大学　円周率を π とする。正の整数 n に対して，

$$a_n=\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{1-x^{4n}}{1+x^2}dx\,,\ b_n=\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2}dx$$ とおく。

（1）$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\dfrac{\pi}{12}$ を証明せよ。

（2）$3.141<\pi<3.142$ を証明せよ。ただし，$1.7320508<\sqrt{3}<1.7320509$ である。

【略解】（1）$a_n=\displaystyle\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{x^{4n}}{1+x^2}dx$，$b_n=\displaystyle\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{x^{4n+2}}{1+x^2}dx$

$\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ より $\displaystyle\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{12}$　また，$0\le x\le 2-\sqrt{3}<1$ であるから

$0\le\dfrac{x^{4n+2}}{1+x^2}\le\dfrac{x^{4n}}{1+x^2}\le x^{4n}$（等号は $x=0$）

$$\therefore\ 0<\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{x^{4n+2}}{1+x^2}dx<\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{x^{4n}}{1+x^2}dx<\int_0^{2-\sqrt{3}}x^{4n}dx=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{4n+1}}{4n+1}$$

$\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{4n+1}}{4n+1}<a_n<\dfrac{\pi}{12}\cdots$①　$\dfrac{\pi}{12}<b_n<\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{4n+1}}{4n+1}\cdots$② であることから，

$n\to\infty$ とすれば良い。

（2）①は $n=2$ でも成り立つから，$\pi>12a_2$，②は $n=1$ でも成り立つから，$\pi<12b_1$

ここで，$\dfrac{1-x^8}{1+x^2}=\dfrac{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)\left(1+x^4\right)}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6$

$\dfrac{1+x^6}{1+x^2}=\dfrac{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2+x^4\right)}{1+x^2}=1-x^2+x^4$ であり，$\alpha=2-\sqrt{3}$ とすると，$\alpha^3=15\alpha-4$

$\alpha^5=209\alpha-56$，$\alpha^7=2911\alpha-780$ であることを用いて，積分値を求めると，

$$12a_2=\frac{-158784\alpha+42656}{35}=\frac{-274912+158784\sqrt{3}}{35}>\frac{-274912+158784\cdot1.7320508}{35}>3.141$$

また，$12b_1=\dfrac{2268\alpha-592}{5}=\dfrac{3944-2268\sqrt{3}}{5}<\dfrac{3944-2268\cdot1.7320508}{5}<3.142$　より，

$\therefore\ 3.141<12a_2<\pi<12b_1<3.142$　［終］

1999年 東京大学　$\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin^2 xdx>8$ であることを示せ。ただし，$\pi=3.14\cdots$ は円周率，$e=2.71\cdots$ は自然対数の底である。

【略解】$\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin^2 xdx=\int_0^{\pi}e^x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^xdx-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^x\cos 2xdx$ であり，

$I=\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\cos 2xdx$ として，部分積分を 2 回繰り返して，$I=\dfrac{1}{5}\left(e^{\pi}-1\right)$ を得るから，

$\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin^2 xdx=\frac{2}{5}\left(e^{\pi}-1\right)>8$　すなわち，$e^{\pi}>21$ を示せば良い。

ここで，$y=e^x$ のグラフと $y=e^x$ 上の点（$3, e^3$）での接線 $y=e^3x-2e^3$ との位置関係

で $x=\pi$ のときの，y 座標の上下関係から，

$$e^{\pi} > e^3\pi - 2e^3 = e^3(\pi - 2) > 2.7^3(3.1-2) = 21.6513 > 21$$ ［終］

※ $\log_{10}3$，$\log_{10}7$ の値を知っていたら次のように示される。$e^{\pi} > 2.7^{3.1} = X$ おくと，

$$\log_{10}X = 3.1\log_{10}2.7 = 3.1\log_{10}\frac{3^3}{10} = 3.1(3\times 0.4771 - 1) = 1.3361$$ 一方，

$\log_{10}21 = \log_{10}3 + \log 7 = 0.4771 + 0.8450 = 1.3221$ であるから，$e^x > X > 21$ ［終］

本問を素材にして，次のような問題も興味深い。

$\boxed{e^{\pi} \text{ と } \pi^{e}}$　e の π 乗と π の e 乗はどちらが大きいか

【略解】 $\log e^{\pi} = \pi\log e$ と，$\log\pi^{e} = e\log\pi$ であるから，$\dfrac{\log e}{e}$ と $\dfrac{\log\pi}{\pi}$ とを比べる。

$x>0$ で 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$ より，$x>e$ では $f(x)$ は単調減少。

$$\therefore\ f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{\log e}{e} > \frac{\log\pi}{\pi} \Leftrightarrow \pi\log e = \log e^{\pi} > e\log\pi = \log\pi^{e}$$ ［終］

実際，$\pi = 3.14$，$e = 2.71$ として，関数電卓で計算してみると

$e^{\pi} \fallingdotseq 22.8835\cdots$，$\pi^{e} \fallingdotseq 22.2166\cdots$ となり，かなり微妙な結果を得ることが出来る。

9　まとめ

本稿を書くにあたり，「大学卒業後 中学校，高等学校の数学教員を目指す学生に参考になるもの」「現在，中学校，高等学校で数学の指導をされている先生方からのご批判を仰げるもの」をと考えで，自らの高等学校の指導経験と，大学が高校に求めるものを探る上で，大学入試問題という実例も参考にしながら執筆してみた。

しかし，私自身の技量不足と見識の浅薄さのため，目標を達するに十分な表現が出来なかったことを情けなく感じている。

永年，高等学校での数学指導という現場で体得した実例や疑問，それに関連した問題などについて，自らの独断と偏見もある中での拙稿に対し，何らかの形で少しでも「参考になった」と感じられた人があったら幸いと思う。

［参考文献］

・小学校学習指導要領解説（平成29年度告示）　算数編
・中学校学習指導要領解説（平成29年度告示）　数学編
・高等学校学習指導要領解説（平成30年度告示）　数学編
・高等学校「数学Ⅰ」「数学Ⅱ」「数学Ⅲ」教科書（数研出版，啓林館，東京書籍，旺文社他）
・旺文社 全国大学入試問題正解　数学
・森北出版　塩川宇賢　無理数と超越数
・岩波現代文庫　野崎昭弘　πの話
・東京図書　金田康正　πのはなし
・Newton　数学の世界（数の神秘編）　　　他