総説

圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する時間局所的・大域的適切性

村田　美帆

On the local and global well-posedness for the compressible Navir-Stokes equations

Miho MURATA*

1. 緒言

水や空気などを総称して流体と呼ぶ．圧縮や膨張などの密度変化を無視できる現象を解析する場合は非圧縮性流体として扱い, 流体が高速で流れている場合や温度変化が大きい場合など密度変化を無視できない現象を解析する場合は圧縮性流体として扱う．これまで圧縮性流体の流れを支配する圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する時間局所的適切性, および時間大域的適切性について研究を行ってきた．$\mathbb{R}^N$ における圧縮性 Navier-Stokes 方程式は次の準線形双曲・放物型方程式系で記述される．

$$
\begin{cases}
\partial_t\rho + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u}) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N\times J_T,\\
\rho(\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) - \mathrm{Div}\,\mathbf{S}(\mathbf{u}) + \nabla P(\rho) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N\times J_T,\\
(\rho,\mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_* + \theta_0, \mathbf{u}_0) & \text{in } \mathbb{R}^N.
\end{cases}
\tag{1}
$$

ここで, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,t) = (u_1(x,t),\dots,u_N(x,t))$ と $\rho = \rho(x,t)$ はそれぞれ流速と密度を表す未知関数 ($N \geq 2$ は次元を表す), $\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{D}(\mathbf{u}) + (\beta-\alpha)\mathrm{div}\,\mathbf{u}\mathbf{I}$, $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T$, α, β はそれぞれ第一, 第二粘性係数を表す正定数, $\mathbf{I}$ は $N\times N$ の単位行列, $P(\rho)$ は圧力とし $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $P'(\rho) > 0$ $(\forall\rho > 0)$ を満たすと仮定する．また ρ_* は正定数, $J_T = (0,T)$ とする．

(1) に対し, 特に次の二つの問題について適切性を考察した．第一にスリップ境界条件下における圧縮性 Navier-Stokes 方程式, 第二に圧縮性流体と剛体の連成問題である．スリップ境界条件下では, 一般領域における時間局所的適切性と初期値が十分小さい場合に有界領域における時間大域的適切性を, 連成問題に対しては時間局所的適切性を得た．(cf. [7], [9], [6]) ここで, 一般領域とは一様 $W_q^{k-1/q}$ $(k\in\mathbb{N})$ 領域を指し, 境界の点の取り方によらず一様な球で領域を覆うことができるという性質をもち, 半空間, 摂動半空間, チューブ領域, 層領域, 外部領域のような非有界領域も含むものである．また, 圧縮性流体と剛体の連成問題に対しては, 時間局所的適切性を得た．以下, これらの結果について述べる．

2. スリップ境界条件下における圧縮性 Navier-Stokes 方程式

2.1 導入

スリップ境界条件下における圧縮性 Navier-Stokes 方程式は次で記述される．

$$
\begin{cases}
\partial_t\rho + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u}) = 0 & \text{in } \Omega\times J_T,\\
\rho(\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) - \mathrm{Div}\,\mathbf{S}(\mathbf{u}) + \nabla P(\rho) = 0 & \text{in } \Omega\times J_T,\\
\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} - \langle\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle\mathbf{n} = 0,\ \ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma\times J_T,\\
(\rho,\mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_* + \theta_0, \mathbf{u}_0) & \text{in } \Omega.
\end{cases}
\tag{2}
$$

ここで, Ω は境界 Γ をもつ一般領域, $\mathbf{n}$ は Γ 上の単位外法線ベクトルとする．

スリップ境界条件下における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時間局所的適切性・時間大域的適切性に関する先行研究は [2], [8] の 2 つのみである．これらの論文では有界領域で, 初期値は $(\theta_0,\mathbf{u}_0)\in H^{1+\alpha}(\Omega)$, $\alpha\in(1/2,1)$ であり, 解のクラスは時間空間ともに L_2 枠である．L_2 枠で扱う場合, ソボレフのうめこみの観点から可微分性の高い空間から初期値をとる必要がある．そこで, 本研究では先行研究に比べ, 初期値に対し低い可微分性と少ない整合条件の下, 解を得るために解を時間 L_p 空間 L_q 枠の最大正則性が成立するクラスで構成した．従って, 本研究で重要となるのは L_p-L_q 枠における最大正則性である．

流体方程式に限らず, 発展方程式を解くために重要な理論として半群理論がある．実際, 非圧縮性粘性流体方程式はディリクレ境界条件下で半線形方程式であるた

* 特別助教　数学教室
Assistant Professor, Dept. of Mathematics

め, 半群理論のみで解くことができる. 一方, 圧縮性粘性流体方程式は準線形方程式であるため正則性の損失 (regularity loss) が生じ, 半群の評価のみでは解くのが困難である. この困難を解消するために, 半群の生成だけでなく最大正則性も証明する必要がある. 最大正則性とは, 放物型または双曲・放物型の方程式 $d\mathbf{u}/dt + A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ ($\mathbf{u}$ を未知関数, $\mathbf{f}$ を既知関数, A を有界解析的半群の生成作用素とする) に対し, 左辺が時間について右辺と同じ正則性をもつことをいい, このとき得られる評価式によって準線形方程式を解くことができる. しかし, オイラー座標系で書かれた非線形問題 (2) には質量保存を表す双曲型の方程式に質量微分の項があるため, 最大正則性で扱うことはできない. そこでまず, オイラー座標 x からラグランジュ座標 ξ への変数変換

$$x = \xi + \int_0^t \mathbf{v}(\xi, s)ds$$

によって質量微分の項を密度の時間微分のみに変える手法を用いた. ここで, $\mathbf{v}(\xi, s)$ はラグランジュ座標上で見た流速とする. ラグランジュ座標への変換と線形化により得られる線形化方程式

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \rho_*\mathrm{div}\,\mathbf{u} = f & \text{in } \Omega \times J_T, \\ \rho_*\partial_t\mathbf{u} - \mathrm{Div}\,\mathbf{S}(\mathbf{u}) + P'(\rho_*)\nabla\rho = \mathbf{g} & \text{in } \Omega \times J_T, \\ \alpha[\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} - \langle\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n}] = \mathbf{h} - \langle\mathbf{h}, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n} & \text{on } \Gamma \times J_T, \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = h & \text{on } \Gamma \times J_T, \\ (\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0) & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{3}$$

に対し L_p-L_q 枠で最大正則性を示す. L_p-L_q 最大正則性を得るためには線形化問題 (3) に対応する次のレゾルベント問題の解作用素に対し $\mathcal{R}$ 有界性という概念が必要となる.

$$\begin{cases} \lambda\rho + \gamma_2\mathrm{div}\,\mathbf{u} = f & \text{in } \Omega, \\ \gamma_0\lambda\mathbf{u} - \mathrm{Div}\,\mathbf{S}(\mathbf{u}) + \nabla(\gamma_1\rho) = \mathbf{g} & \text{in } \Omega, \\ \alpha[\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} - \langle\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n}] = \mathbf{h} - \langle\mathbf{h}, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n}, \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = h & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{4}$$

ここで, $\gamma_i = \gamma_i(x)$ $(i = 0, 1, 2)$ は一様連続な関数とする. 最後に, $\mathcal{R}$ 有界性と L_p-L_q 最大正則性を得るために用いた Weis の作用素値 Fourier multiplier theorem[10] を導入する.

定義 1. $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ が $\mathcal{R}$ 有界であるとは, 正定数 C と p $(1 \le p < \infty)$ が存在して, 任意の $m \in \mathbb{N}, T_j \in \mathcal{T}$, $f_j \in X, [0, 1]$ 上の独立, 対称な任意の $\{-1, 1\}$-値確率変数 $\{r_j(u)\}(j = 1, \ldots, N)$ に対し

$$\int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^m r_j(u)T_jf_j\Big\|_Y^p du \le C\int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^m r_j(u)f_j\Big\|_X^p du$$

が成立するときをいう. 定数 C の下限を $\mathcal{R}$-bound といい, $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ で表す. ここで, $\mathcal{L}(X, Y)$ は Banach 空間 X から Y への有界線形作用素全体とする.

定理 1. X, Y を *UMD* 空間とし, $M(\tau) \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathcal{L}(X, Y))$ であり,

$$\mathcal{R}(\{M(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) = c_0 < \infty,$$
$$\mathcal{R}(\{|\tau|M'(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) = c_1 < \infty$$

を満たすとし, $1 < p < \infty$ とする. このとき, 作用素

$$[T_M f](t) = \mathcal{F}^{-1}[M(\tau)\mathcal{F}[f](\tau)](t)$$

は $L_p(\mathbb{R}, X)$ から $L_p(\mathbb{R}, Y)$ への有界線形作用素であり,

$$\|T_M f\|_{L_p(\mathbb{R},X)} \le C(c_0 + c_1)\|f\|_{L_p(\mathbb{R},Y)} \quad (f \in L_p(\mathbb{R}, X))$$

が成立する. ここで C は p, X にのみ依存する定数である.

2.2 主定理

本研究では, (2) に対し, 初期値を次の整合条件を満たす空間からとることで, 一般領域において時間局所的適切性を L_p-L_q 枠で得ることができた.

$$\mathcal{D}_q(\Omega) = \{(\rho, \mathbf{u}) \in W_q^{1,2}(\Omega) \mid \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} - \langle\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n} = 0,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma\}.$$

ここで,

$$W_q^{\ell,m}(\Omega) = \{(f, \mathbf{g}) \mid f \in W_q^\ell(\Omega), \mathbf{g} \in W_q^m(\Omega)\}.$$

定理 2. $2 < p < \infty$, $N < q < \infty$, $R > 0$, Ω を一様 $W_q^{3-1/q}$ 領域とする. ρ_* を正定数, $P(\rho)$ は $\rho > 0$ について C^∞ 関数で, ある正定数 ρ_1, ρ_2, 任意の $\rho \in (\rho_*/4, 4\rho_*)$ に対し $\rho_1 < P(\rho) < \rho_2$ を満たすとする. このとき, R に依存するある T が存在して

$$\|\theta_0\|_{W_q^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega)} \le R$$
$$\rho_*/2 < \rho_* + \theta_0(x) < 2\rho_* \quad (x \in \Omega)$$

を満たす任意の初期値
$(\theta_0, \mathbf{u}_0) \in (W_q^{1,0}(\Omega), \mathcal{D}_q(\Omega))_{1-1/p,p}$ に対し, (2) の一意解が次のクラスで存在する.

$$\rho \in W_p^1(J_T, L_q(\Omega)) \times L_p(J_T, W_q^1(\Omega)),$$
$$\mathbf{u} \in W_p^1(J_T, L_q(\Omega)) \times L_p(J_T, W_q^2(\Omega)).$$

ここで, $B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega) = (L_q(\Omega), \mathcal{D}_q(\Omega))_{1-1/p,p}$.

時間大域的適切性について述べるためにまず, rigid space を導入する.

$$\mathcal{R}_d = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{D}(\mathbf{p}) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma\}.$$

$\{\mathbf{p}_\ell\}_{\ell=1}^M$ を $\mathcal{R}_d$ の正規直交基底とする．

定理 3. $2 < p < \infty$, $N < q < \infty$, Ω を有界な一様 $W_q^{4-1/q}$ 領域, 粘性係数 α, β は次を満たすとする．

$$\alpha > 0, \quad \beta > \frac{N-2}{N}\alpha.$$

さらに, 初期値 $(\theta_0, \mathbf{u}_0) \in (W_q^{1,0}(\Omega), \mathcal{D}_q(\Omega))_{1-1/p,p}$ に対し次を仮定する．ある $\epsilon > 0$ が存在し,
smallness condition:

$$\|\theta_0\|_{W_q^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega)} \le \epsilon,$$

orthogonal conditions:

$$\begin{cases} (\theta_0, 1)_\Omega = 0, \quad ((\rho_* + \theta_0)\mathbf{u}_0, \mathbf{p}_\ell)_\Omega = 0 \ (\ell = 1, \ldots, M) \\ \quad \textit{if } \Omega \textit{ is rotationally symmetric}, \\ (\theta_0, 1)_\Omega = 0 \\ \quad \textit{if } \Omega \textit{ is not rotationally symmetric}. \end{cases}$$

このとき, (2) は一意解を次のクラスでもつ．

$$\rho \in W_p^1(J_\infty, L_q(\Omega)) \times L_p(J_\infty, W_q^1(\Omega)),$$
$$\mathbf{u} \in W_p^1(J_\infty, L_q(\Omega)) \times L_p(J_\infty, W_q^2(\Omega)).$$

さらに, 正定数 γ が存在し, 次の評価が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\|e^{\gamma t}\partial_t \rho\|_{L_p(J_\infty, L_q(\Omega))} + \|e^{\gamma t}\rho\|_{L_p(J_\infty, W_q^1(\Omega))} \\ &+ \|e^{\gamma t}\partial_t \mathbf{u}\|_{L_p(J_\infty, L_q(\Omega))} + \|e^{\gamma t}\mathbf{u}\|_{L_p(J_\infty, W_q^2(\Omega))} \le C\epsilon. \end{aligned}$$

2.3 証明の概略

まずレゾルベント問題 (4) に対する解作用素の $\mathcal{R}$ 有界性を示す．領域が全空間または半空間の場合は部分フーリエ変換を用いレゾルベント問題の解表示を行い, 一般領域においては境界近傍を半空間からの摂動, 境界から離れた部分を全空間として捉え, 半空間と全空間における解を cut-off 関数でつなぎ合わせることにより $\mathcal{R}$ 有界な解作用素の存在を得ることができる．以下, 簡単のため λ が十分大きい場合のみ考える．

定理 4. $1 < p < \infty$, $N < q < \infty$, $0 < \epsilon < \pi/2$, Ω を一様 $W_q^{3-1/q}$ 領域,

$$X_q(\Omega) = \{(f, \mathbf{g}, \mathbf{h}, h) \mid f \in W_q^1(\Omega), \mathbf{g} \in L_q(\Omega), \mathbf{h} \in W_q^1(\Omega), \ h \in W_q^2(\Omega)\},$$

$$\mathcal{X}_q(\Omega) = \{F = (F_1, \ldots, F_7) \mid F_1 \in W_q^1(\Omega), F_5 \in L_q(\Omega), F_2, F_3, F_6 \in L_q(\Omega), F_4, F_7 \in L_q(\Omega)\}$$

とする．このとき, $\lambda_0 \ge 1$ と作用素の族 $R(\lambda) \in \mathrm{Hol}(\Lambda_{\epsilon,\lambda_0}, \mathcal{L}(\mathcal{X}_q(\Omega), W_q^{1,2}(\Omega)))$ が存在し, 任意の $\lambda \in \Lambda_{\epsilon,\lambda_0}$, $(f, \mathbf{g}, \mathbf{h}, h) \in X_q(\Omega)$ に対し $(\rho, \mathbf{u}) = R(\lambda)(f, \mathbf{g}, \lambda^{1/2}\mathbf{h}, \nabla \mathbf{h}, \lambda h, \lambda^{1/2} h, \nabla^2 h)$ は 方程式 (4) の一意解を与え, さらに作用素 $R(\lambda)$ は次の評価を満たす．

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{L}_1}(\{(\tau\partial_\tau)^\ell(\lambda R(\lambda)) \mid \lambda \in \Lambda_{\epsilon,\lambda_0}\}) &\le C, \\ \mathcal{R}_{\mathcal{L}_1}(\{(\tau\partial_\tau)^\ell(\gamma R(\lambda)) \mid \lambda \in \Lambda_{\epsilon,\lambda_0}\}) &\le C, \\ \mathcal{R}_{\mathcal{L}_2}(\{(\tau\partial_\tau)^\ell(\lambda^{1/2}\nabla P_v R(\lambda)) \mid \lambda \in \Lambda_{\epsilon,\lambda_0}\}) &\le C, \\ \mathcal{R}_{\mathcal{L}_2}(\{(\tau\partial_\tau)^\ell(\nabla^2 P_v R(\lambda)) \mid \lambda \in \Lambda_{\epsilon,\lambda_0}\}) &\le C. \end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(\mathcal{X}_q(\Omega), W_q^{1,0}(\Omega))$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(\mathcal{X}_q(\Omega), L_q(\Omega))$, $\lambda = \sigma + i\tau$, $\ell = 0, 1$, $P_v R(\lambda)(f, \mathbf{g}, \lambda^{1/2}\mathbf{h}, \nabla \mathbf{h}, \lambda h, \lambda^{1/2} h, \nabla^2 h) = \mathbf{u}$, $\Lambda_{\epsilon,\lambda_0} = \Sigma_{\epsilon,\lambda_0} \cap K_\epsilon$, $\gamma = \sup_{x \in \bar\Omega} \gamma_1(x)\gamma_2(x)$,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\epsilon,\lambda_0} &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \ge \lambda_0, |\arg \lambda| \le \pi - \epsilon\}, \\ K_\epsilon &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \\ &(\lambda + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} + \epsilon)^2 + (\mathrm{Im}\,\lambda)^2 \ge (\frac{\gamma}{\alpha+\beta} + \epsilon)^2\}. \end{aligned}$$

証明． 領域 Ω が全空間, 半空間, 摂動半空間, 一般領域の場合の順に考えていくが, 摂動半空間と一般領域については perturbation method により示すことができるので, ここでは全空間と半空間の場合のみを扱う．レゾルベント問題 (4) の第一式より, $\lambda \ne 0$ とすれば $\rho = \lambda^{-1}(f - \gamma_2(x)\mathrm{div}\,\mathbf{u})$ であるので, これを (4) の第二式に代入すれば,

$$\begin{aligned} &\lambda \mathbf{u} - \gamma_0^{-1}\mathrm{Div}\,\mathbf{S}(\mathbf{u}) - \lambda^{-1}\gamma_0^{-1}\nabla(\gamma_1\gamma_2 \mathrm{div}\,\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{g} - \lambda^{-1}\gamma_0^{-1}\nabla(\gamma_1 f) =: \mathbf{f} \end{aligned}$$

が得られる．よって, 次の方程式が得られる．

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{u} - \gamma_0^{-1}\mathrm{Div}\,\mathbf{S}(\mathbf{u}) - \lambda^{-1}\gamma_0^{-1}\nabla(\gamma_3 \mathrm{div}\,\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \alpha[\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} - \langle \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle \mathbf{n}] = \mathbf{h} - \langle \mathbf{h}, \mathbf{n}\rangle \mathbf{n} & \text{on } \Gamma, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = h & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{5}$$

ただし, $\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2$. 変数係数をもつ (5) は定数係数からの摂動として扱うことができるので, 全空間と半空間では γ_0, γ_3 は正定数として考えれば十分である．従って, 次のレゾルベント問題を考察する．

$$\begin{cases} \gamma_0 \lambda \mathbf{u} - \alpha \Delta \mathbf{u} - (\beta + \gamma_3 \lambda^{-1})\nabla \mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \alpha[\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} - \langle \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle \mathbf{n}] = \mathbf{h} - \langle \mathbf{h}, \mathbf{n}\rangle \mathbf{n} & \text{on } \Gamma, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = h & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{6}$$

(i) 全空間の場合

(6) の解表示は Forier 変換と Fourier 逆変換により

$$\begin{aligned} u_j =& \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^N \mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\frac{\delta_{jk} - \xi_j\xi_k|\xi|^{-2}}{\alpha^{-1}\gamma_0\lambda + |\xi|^2}\hat{f}_k\right](x) \\ &+ \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma_3\lambda^{-1}}\sum_{k=1}^N \mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\frac{\xi_j\xi_k|\xi|^{-2}}{(\alpha+\beta+\gamma_3\lambda^{-1})^{-1}\gamma_0\lambda + |\xi|^2}\hat{f}_k\right](x) \end{aligned} \tag{7}$$

となる．定理 4 を示すために次の定理を用いた．

定理 5. $1 < q < \infty$, Λ を $\mathbb{C}$ の集合とする．$m(\lambda, \xi)$ は $\Lambda \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上の関数で, 任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(\lambda, \xi) \in \Lambda \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ に対し,

$$|D_\xi^\alpha k(\lambda, \xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}$$

を満たすとする．このとき, 作用素 K_λ を

$$[K_\lambda f](x) = \mathcal{F}_\xi^{-1}[m(\lambda, \xi)\hat{f}(\xi)](x)$$

で定義すれば,

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}(L_q(\mathbb{R}^N))}(\{K_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}) \leq C_{q,N} \max_{|\alpha| \leq N+1} C_\alpha.$$

(7) の kernel は定理 5 の仮定を満たすので, 定理 4 が得られる．

(ii) 半空間の場合

領域 Ω が半空間のとき, 単位外法線ベクトル $\mathbf{n}$ は $\mathbf{n} = (0, \ldots, 0, -1)$ であるので, (6) は次で表される．

$$\begin{cases} \gamma_0 \lambda \mathbf{u} - \alpha \Delta \mathbf{u} - (\beta + \gamma_3 \lambda^{-1}) \nabla \mathrm{div}\, \mathbf{u} = \mathbf{f} \ \text{in } \mathbb{R}_+^N, \\ \alpha(\partial_N u_j + \partial_j u_N) = -h_j, \quad u_N = -h \quad \text{on } \mathbb{R}_0^N. \end{cases} \tag{8}$$

ここで, $j = 1, \ldots, N-1$. 簡単のため, $h = 0$ として示す．全空間へ拡張した解の第 N 成分が 0 となるように $\mathbf{f}$ を $\mathbf{F} = (f_1^e, \ldots, f_{N-1}^e, f_N^o)$ で拡張する．ここで,

$$f_j^e(x) = \begin{cases} f_j(x) \ (x_N > 0), \\ f_j(x', -x_N) \ (x_N < 0). \end{cases}$$

$$f_N^o(x) = \begin{cases} f_N(x) \ (x_N > 0), \\ -f_N(x', -x_N) \ (x_N < 0). \end{cases}$$

ここで, $x' = x_1, \ldots, x_{N-1}$. 全空間での結果により次を満たす $\mathbf{U}$ が存在する．

$$\begin{cases} \gamma_0 \lambda \mathbf{U} - \alpha \Delta \mathbf{U} - (\beta + \gamma_3 \lambda^{-1}) \nabla \mathrm{div}\, \mathbf{U} = \mathbf{F} \ \text{in } \mathbb{R}_+^N, \\ U_N = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}_0^N. \end{cases}$$

$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{v}$ とおくと, $\mathbf{v}$ が満たす補正方程式は次のようになる．

$$\begin{cases} \gamma_0 \lambda \mathbf{v} - \alpha \Delta \mathbf{v} - (\beta + \gamma_3 \lambda^{-1}) \nabla \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \ \text{in } \mathbb{R}_+^N, \\ \alpha(D_N v_j + D_j v_N) = -h_j, \quad v_N = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}_0^N. \end{cases}$$

ただし, $h_j + \alpha(D_N U_j + D_j U_N)$ を改めて h_j とした. $\mathbf{U}$ については全空間の結果から $\mathcal{R}$ 有界な解作用素の存在が示されているので, $\mathbf{v}$ についてのみ解表示を行い, $\mathcal{R}$ 有界な解作用素の存在を示せばよい．以下, v_N についても同様に示されるので, 特に $v_j (j = 1, \ldots, N-1)$ についてのみ考えることにする．部分 Forier 変換と部分 Forier 逆変換により

$$\begin{aligned} &u_j(x) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1} \Big[\frac{\lambda^{1/2}}{B^3} B e^{-B(x_N + y_N)} \mathcal{F}_{x'}[\lambda^{1/2} h_j](\xi', y_N) \Big](x')\, dy_N \\ &- \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1} \Big[\frac{i\xi_k}{B^3} B e^{-B(x_N + y_N)} \mathcal{F}_{x'}[\partial_k h_j](\xi', y_N) \Big](x')\, dy_N \\ &- \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1} \Big[\frac{1}{B^2} B e^{-B(x_N + y_N)} \mathcal{F}_{x'}[\partial_N h_j](\xi', y_N) \Big](x')\, dy_N \\ &+ \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta + \lambda^{-1})} \sum_{k=1}^{N-1} \Big\{ \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1} \Big[\frac{(i\xi_j)(i\xi_k)}{A(A+B)B^2} B^2 M(x_N + y_N) \\ &\qquad \mathcal{F}_{x'}[\partial_N h_k](\xi', y_N) \Big](x')\, dy_N \\ &- \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1} \Big[\frac{(i\xi_j)(i\xi_k)}{A(A+B)B^2} B e^{-B(x_N + y_N)} \mathcal{F}_{x'}[\partial_N h_k](\xi', y_N) \Big](x')\, dy_N \\ &- \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1} \Big[\frac{i\xi_k}{(A+B)B^2} B^2 M(x_N + y_N) \mathcal{F}_{x'}[\partial_j h_k](\xi', y_N) \Big](x')\, dy_N \end{aligned} \tag{9}$$

ここで, $A = \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma_3 \lambda^{-1})^{-1} \gamma_0 \lambda + |\xi'|^2}$, $B = \sqrt{\alpha^{-1} \gamma_0 \lambda + |\xi'|^2}$, $M(x_N) = \dfrac{e^{-Bx_N} - e^{-Ax_N}}{B - A}$. 定理 4 を示すために, 次の定理を用いた．

定理 6. $0 < \varepsilon < \pi/2$, $1 < q < \infty$, $\lambda_0 > 0$ とし, $m(\lambda, \xi')$ は $\Lambda_{\epsilon, \lambda_0} \times \mathbb{R}^{N-1} \setminus \{0\}$ 上の関数で, 任意の多重指数 $\alpha' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(\lambda, \xi') \in \Lambda_{\epsilon, \lambda_0} \times (\mathbb{R}^{N-1} \setminus \{0\})$ に対し,

$$|D_{\xi'}^{\alpha'} (\tau \frac{d}{d\tau})^\ell m(\lambda, \xi')| \leq C_{\alpha'} (|\lambda|^{1/2} + |\xi'|)^{-2-|\alpha'|}$$

を満たす．このとき, 作用素 $K_i(\lambda)$ を

$$[K_1(\lambda) f](x) = \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}[m(\lambda, \xi') B e^{-B(x_N + y_N)} \hat{f}(\xi', y_N)](x') dy_N,$$

$$[K_2(\lambda) f](x) = \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}[m(\lambda, \xi') B^2 M(x_N + y_N) \hat{f}(\xi', y_N)](x') dy_N$$

で定義すれば,

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{L}(L_q(\mathbb{R}_+^N))} \left(\{ (\tau \frac{d}{d\tau})^\ell (G_\lambda K_i(\lambda)) \mid \lambda \in \Lambda_{\epsilon, \lambda_0} \} \right) \leq C.$$

ただし, $G_\lambda \mathbf{u} = (\lambda \mathbf{u}, \lambda^{1/2} \nabla \mathbf{u}, \nabla^2 \mathbf{u})$, $\ell = 0, 1$, $i = 1, 2$.

(9) の kernel は定理 6 の仮定を満たすので, 半空間の場合にも定理 4 が示される．

□

$\mathcal{R}$ 有界性の定義から作用素の族が $\mathcal{R}$ 有界ならば一様有界であるので, レゾルベント評価を得ることができる．これより $W_q^{1,0}(\Omega)$ 上で線形化問題に対する解析半群が生成されることが分かる．さらに $\mathcal{R}$ 有界な解作用素の存在により定理 1 を適用でき線形化問題 (3) に対し次の L_p-L_q 最大正則性を得る．

定理 7. $1 < p < \infty$, $N < q < \infty$, Ω を一様 $W_q^{3-1/q}$ 領域とする．このとき，ある γ_0 が存在して任意の初期値 $(\theta_0, \mathbf{u}_0) \in (W_q^{1,0}(\Omega), \mathcal{D}_q(\Omega))_{1-1/p,p}$ と $e^{-\gamma_0 t} f \in L_p(\mathbb{R}, W_q^1(\Omega))$, $e^{-\gamma_0 t}\mathbf{g} \in L_p(\mathbb{R}, L_q(\Omega))$, $e^{-\gamma_0 t}\mathbf{h} \in L_p(\mathbb{R}, W_q^1(\Omega))$, $e^{-\gamma_0 t}\Lambda_\gamma^{1/2}\mathbf{h} \in L_p(\mathbb{R}, L_q(\Omega))$, $e^{-\gamma_0 t} h \in L_p(\mathbb{R}, W_q^2(\Omega)) \cap W_p^1(\mathbb{R}, L_q(\Omega))$ に対し，(3) は一意解を次のクラスでもつ．

$$\rho \in W_p^1(J_\infty, W_q^1(\Omega)),$$
$$\mathbf{u} \in W_p^1(J_\infty, L_q(\Omega)) \cap L_p(J_\infty, W_q^2(\Omega)).$$

さらに，任意の $\gamma \geq \gamma_0$ に対し次の評価を満たす．

$$\begin{aligned}
&\|e^{-\gamma t}(\gamma\rho, \rho_t)\|_{L_p(J_\infty, W_q^1(\Omega))} + \|e^{-\gamma t}(\gamma\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)\|_{L_p(J_\infty, L_q(\Omega))} \\
&\qquad + \|e^{-\gamma t}\mathbf{u}\|_{L_p(J_\infty, W_q^2(\Omega))} \\
&\leq C(\|\theta_0\|_{W_q^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{(L_q(\Omega), W_q^2(\Omega))_{1-1/p,p}} \\
&\qquad + \|e^{-\gamma t}(f, \mathbf{g})\|_{L_p(\mathbb{R}, W_q^{1,0}(\Omega))} \\
&\qquad + \|e^{-\gamma t}(\nabla\mathbf{h}, \Lambda_\gamma^{1/2}\mathbf{h})\|_{L_p(\mathbb{R}, L_q(\Omega))} \\
&\qquad + \|e^{-\gamma t} h\|_{W_p^1(\mathbb{R}, L_q(\Omega))} + \|e^{-\gamma t} h\|_{L_p(\mathbb{R}, W_q^2(\Omega))}).
\end{aligned}$$

ただし，$f = h = 0$, $\mathbf{g} = \mathbf{h} = 0$ $(t < 0)$, $\Lambda_\gamma^{1/2}\mathbf{h}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\lambda^{1/2}\mathcal{L}[\mathbf{h}](\lambda)](t)$ とする．

定理 7 の最大正則性に関する評価式と縮小写像の原理により定理 2 を得ることができる．

また，領域 Ω が有界であるとき，線形化問題 (3) に対する次の解の指数減衰評価を用い，定理 2 で得た時間局所解を時間について延長することにより，定理 3 を得ることができる．

定理 8. $1 < p < \infty$, $N < q < \infty$, $T > 0$, Ω を有界な一様 $W_q^{3-1/q}$ 領域とする．このとき，ある γ_1 が存在して次の整合条件を満たす任意の初期値 $\theta_0 \in W_q^1(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\mathbf{u}_0)\mathbf{n} - \langle\mathbf{D}(\mathbf{u}_0)\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n} = \mathbf{h}|_{t=0} - \langle\mathbf{h}|_{t=0}, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n}, \\
\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = h|_{t=0} \quad \text{on } \Gamma,
\end{aligned}$$

任意の $f \in L_p(J_T, W_q^1(\Omega))$, $\mathbf{g} \in L_p(J_T, L_q(\Omega))$, $\mathbf{h} \in L_p(J_T, W_q^1(\Omega)) \cap W_p^1(J_T, \mathbf{W}_q^{-1}(\Omega))$ $h \in L_p(J_T, W_q^2(\Omega)) \cap W_p^1(J_T, L_q(\Omega))$ に対し，(3) は一意解を次のクラスでもつ．

$$\rho \in W_p^1(J_T, W_q^1(\Omega)),$$
$$\mathbf{u} \in W_p^1(J_T, L_q(\Omega)) \times L_p(J_T, W_q^2(\Omega)).$$

さらに，任意の $\gamma \in (0, \gamma_1)$, $t \in (0, T]$ に対し次の評価を満たす．

$$\begin{aligned}
&\|e^{\gamma s}\rho\|_{W_p^1(J_t, W_q^1(\Omega))} + \|e^{\gamma s}\partial_s\mathbf{u}\|_{L_p(J_t, L_q(\Omega))} \\
&\qquad + \|e^{\gamma s}\mathbf{u}\|_{L_p(J_t, W_q^2(\Omega))} \\
&\leq C_\gamma\Big\{\|\theta_0\|_{W_q^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega)} \\
&\quad + \|e^{\gamma s}(f, \mathbf{g})\|_{L_p(J_t, W_q^{1,0}(\Omega))} + \|e^{\gamma s}\mathbf{h}\|_{L_p(J_t, W_q^1(\Omega))} \\
&\quad + \|e^{\gamma s}\partial_s\mathbf{h}\|_{L_p(J_t, \mathbf{W}_q^{-1}(\mathbb{R}^N))} + \|e^{\gamma s}h\|_{L_p(J_t, W_q^2(\Omega))} \\
&+ \|e^{\gamma s}h\|_{W_p^1(J_t, L_q(\Omega))} + \Big(\int_0^t (e^{\gamma s}|(\theta(\cdot, s), 1)_\Omega|)^p\, ds\Big)^{1/p} \\
&\quad + \delta(\Omega)\sum_{\ell=1}^M \Big(\int_0^t (e^{\gamma s}|(\mathbf{v}(\cdot, s), \mathbf{p}_\ell)_\Omega|)^p ds\Big)^{1/p}\Big\}.
\end{aligned}$$

ここで，$\delta(\Omega)$ は $\delta(\Omega) = 1$ *(if Ω is rotationally symmetric)*, $\delta(\Omega) = 0$ *(if Ω is not rotationally symmetric)*, $W_q^{-1}(\mathbb{R}^N)$ は $W_q^1(\mathbb{R}^N)$ の双対空間とし

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_q^{-1}(\Omega) = \{f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) \mid \\
\|f\|_{\mathbf{W}_q^{-1}(\Omega)} = \|\iota f\|_{W_q^{-1}(\mathbb{R}^N)} < \infty\},
\end{aligned}$$

作用素 ι は，$L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ から $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ への拡張とする．

3. 圧縮性流体と剛体の連成問題

3.1 導入

3 次元全空間上に広がる圧縮性流体中に回転や平行移動する剛体がある場合の流体と剛体，双方の運動について考察した．流体の運動は圧縮性 Navier-Stokes 方程式，剛体の運動は線形運動量と角運動量のバランスを表す常微分方程式，境界条件は，剛体が動くときに流体との間に真空ができないことを仮定するため，剛体の速度と流体の速度のつり合いを表す式とし，これらを連立した以下の連立方程式系を扱った．これを連成問題と呼ぶことにする．剛体は有界領域 $\mathcal{B}(t)$ で表すものとし，流体が占める領域は外部領域 $\mathcal{D}(t) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}(t)}$, その境界を $\Gamma(t)$, 初期領域を $\mathcal{D} = \mathcal{D}(0)$ とする．

$$\begin{cases}
\partial_t\varrho + \mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{u}) = 0 & \text{in } \mathcal{D}(t)\times J_T, \\
\varrho(\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) - \mathrm{Div}\,\mathbf{T}(\mathbf{u}, P) = 0 & \text{in } \mathcal{D}(t)\times J_T, \\
\mathbf{u}(t, x) = \eta(t) + \omega(t) \times (x - x_c(t)) & \text{on } \Gamma(t)\times J_T, \\
m\eta'(t) - \int_{\Gamma(t)} \mathbf{T}(\mathbf{u}, P)\mathbf{n}(t, x)d\sigma = \mathbf{F}(t) & t \in J_T, \\
(J\omega)'(t) & \\
-\int_{\Gamma(t)}(x - x_c)\times\mathbf{T}(\mathbf{u}, P)\mathbf{n}(t, x)d\sigma = \mathbf{M}(t) & t \in J_T, \\
(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0) & \text{in } \mathcal{D}, \\
(\eta, \omega)|_{t=0} = (\eta_0, \omega_0). &
\end{cases} \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, ρ, P は先に定義したものと同様，η, ω はそれぞれ重心 $x_c(t)$ の速度，角速度を表す未知関数，$\mathbf{T}(\mathbf{u}, P) = \alpha\mathbf{D}(\mathbf{u}) + (\beta - \alpha)\mathrm{div}\,\mathbf{u}\mathbf{I} - P(\rho)\mathbf{I}$, m は剛体の質量を表す正定数，$J(t)$ は慣性モーメント，$\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$ はそれぞれ既知の外力とトルクを表す．この問題の先行研

究として, [1] は初期値が $(\rho_0-\bar{\rho}, \mathbf{u}_0) \in H^3(\mathcal{D}) \times H^3(\mathcal{D})$ (ここで, $\bar{\rho}$ は ρ_0 の平均値を表す正定数), かつ整合条件 $\partial_t^i \mathbf{u}|_{t=0} = \partial_t^i(\eta + \omega \times (x - x_c))|_{t=0}$ $(i = 0, 1)$ を満たすとき L_2-L_2 枠で時間局所的適切性と時間大域的適切性を得ている.

3.2 主定理

(10) に対し, 次の L_p-L_q 枠における時間局所的適切性を得た.

定理 9. $1 < p < \infty$, $3 < q < \infty$, $R > 0$ とし, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ を $C^{2,1}$ 級の境界をもつ外部領域とする. $\mathbf{F}$, $\mathbf{M} \in L_p(J_T, \mathbb{R}^3)$ とし, 初期値 $(\rho_0-\bar{\rho}, \mathbf{u}_0) \in \mathcal{D}_q(\mathcal{D})$, η_0, $\omega_0 \in \mathbb{R}^3$ は $\|\rho_0-\bar{\rho}\|_{W_q^1(\mathcal{D})}+\|\mathbf{u}_0\|_{B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\mathcal{D})}+|\eta_0|+|\omega_0| \leq R$ を満たすとする. このとき, R に依存する $T > 0$ が存在し (10) は次のクラスの一意解をもつ.

$$(\eta, \omega) \in W_q^1(J_T, \mathbb{R}^6),$$
$$\rho \in W_p^1(J_T, L_q(\mathcal{D}(\cdot))) \cap L_p(J_T, W_q^1(\mathcal{D}(\cdot))),$$
$$\mathbf{u} \in W_p^1(J_T, L_q(\mathcal{D}(\cdot))) \cap L_p(J_T, W_q^2(\mathcal{D}(\cdot))),$$

ここで, $\mathcal{D}_q(\mathcal{D}) = \{(\rho_0 - \bar{\rho}_0, \mathbf{u}_0) \in W_q^{1,2}(\mathcal{D}) \mid \mathbf{u}_0 = \eta_0 + \omega_0 \times x \text{ } \mathit{for} \text{ } \eta_0, \omega_0 \in \mathbb{R}^3\}$ とする.

3.3 証明の概略

スリップ境界条件の場合と同様, 線形化問題に対し L_p-L_q 最大正則性を証明し, 縮小写像の原理により定理 9 を得る. 線形化問題を得る手順は (10) を固定領域 $\mathcal{D} \times (0, T)$ に変換し, 次にラグランジュ座標上の問題に変換する. これについて詳細を述べる. $m(t)$ を次を満たす交代行列とする:

$$m(t)x = \omega(t) \times x.$$

まず次の微分方程式を考える.

$$\begin{cases} \partial_t X_0(t, y) = m(t)(X_0(t, y) - x_c(t)) + \eta(t), & \mathbb{R}^3 \times (0, T), \\ X_0(0, y) = y, & y \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{11}$$

$\eta, \omega \in W_p^1(0, T)$ であれば, (11) の解はある行列 $Q(t) \in SO(3)$ を用い $X_0(t, y) = Q(t)y + x_c(t)$ と表せる. ここで $Q \in W_p^2((0, T), \mathbb{R}^{3\times3})$. $X_0(t)$ の逆写像 $Y_0(t)$ は

$$Y_0(t, x) = Q^T(t)(x - x_c(t))$$

で与えられ, 以下の微分方程式を満たす.

$$\begin{cases} \partial_t Y_0(t, x) &= -M(t)Y_0(t, x) - \xi(t), & \mathbb{R}^3 \times (0, T), \\ Y_0(0, x) &= x, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ここで

$$M(t) = Q^T(t)m(t)Q(t), \quad \xi(t) = Q^T(t)\eta(t).$$

とした. 次に, 回転, 平行移動する剛体の近傍でのみ X_0, Y_0 と一致するような微分同相写像を構成する. そこで X_0 に対応する新しい写像を X とし, 次の方程式を考える.

$$\begin{cases} \partial_t X(t, y) &= b(t, X(t, y)), & \mathbb{R}^3 \times (0, T), \\ X(0, y) &= y, & y \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{12}$$

ここで, b は次のように定義する: $\overline{\mathcal{B}} \subset B_1 \subset \overline{B_1} \subset B_2$ を満たす開球 $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^3$ をとり cut-off 関数

$$\chi(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in \overline{B_1}, \\ 0 & \text{if } y \in \mathcal{D} \setminus B_2, \end{cases}$$

に対し $b : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$b(t, x) = \chi(x - x_c(t))[m(t)(x - x_c(t)) + \eta(t)]$$

とする. これより, $b \in W_p^1(J_T, C_0^\infty(\mathbb{R}^3))$, $b|_\Gamma = m(x - x_c) + \eta$ を得る.

Picard-Lindelöf の定理より, 既知の η, $\omega \in W_p^1(J_T)$ に対し, (12) は一意解 $X \in C^1(J_T, C^\infty(\mathbb{R}^3))$ をもつ. X のヤコビ行列 J_X の成分は

$$(J_X)_{ij} = \delta_{ij} + \int_0^t \frac{\partial b_i}{\partial y_j} ds$$

で表され, $T > 0$ が十分小さければ次を満たす十分小さい正定数 c が存在する:

$$\max_{i,j=1,2,3} \| \int_0^t (\partial b_i/\partial y_j)(s, \cdot) ds \|_{L_\infty(\mathbb{R}^3)} < c \text{ for } t \in (0, T).$$

これより, J_X の逆行列の存在が示されるので X の逆写像 Y は次の方程式を満たすことがわかる.

$$\begin{cases} \partial_t Y(t, x) &= b^{(Y)}(t, Y(t, x)), & (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ Y(0, x) &= x, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ここで,

$$b^{(Y)}(t, y) = -J_X^{-1}(t, y)b(t, X(t, y)).$$

これらの考察から, $X \equiv X_0$, $Y \equiv Y_0$ in B_1, $X \equiv Y$ in $\mathcal{D} \setminus B_2$ を得るので, 目標とする微分同相な写像を構成することができる.

この変換を用い (10) を書き換える. 圧縮性の効果が現れる (10) の第一式について述べることにする. $\tilde{\mathbf{u}}(t, y) = \mathbf{u}(t, X(t, y))$, $\tau(t, y) = \rho(t, X(t, y)) - \bar{\rho}$, $\kappa(t) = Q^T(t)\eta(t)$, $\Omega(t) = Q^T(t)\omega(t)$ とおけば

$$\partial_t \tau + ((\nabla X)^{-1}(\tilde{\mathbf{u}} - \partial_t X)) \cdot \nabla \tau + \bar{\rho} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = F_0(\tilde{\mathbf{u}}, \tau, \kappa, \Omega).$$

ここで, $F_0(\tilde{\mathbf{u}}, \tau, \kappa, \Omega) = \bar{\rho} \operatorname{tr}(\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{I} - \nabla X)^{-1}) - \tau \operatorname{tr}((\nabla \tilde{\mathbf{u}})(\nabla X)^{-1})$. さらにラグランジュ座標を用いるために, $\mathbf{w}(t, y) = (\nabla X)^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}(t, y) - \partial_t X)$ とおけば

$$\partial_t \tau + \mathbf{w} \cdot \nabla \tau + \bar{\rho} \operatorname{div} \mathbf{w} = F_0'(\mathbf{w}, \tau, \kappa, \Omega).$$

ここで, $F_0'(\mathbf{w},\tau,\kappa,\Omega) = -\bar{\rho}\{(\nabla X - \mathbf{I})\mathrm{div}\,\mathbf{w} + (\Delta X)\mathbf{w} + \mathrm{div}\,(\partial_t X)\} + F_0((\nabla X)\mathbf{w} + \partial_t X, \tau, \kappa, \Omega)$.

最後にラグランジュ座標 $\xi \in \mathcal{D}$ を用い変換する. $\mathbf{v}(t,\xi) = \mathbf{w}(t, Y_{\mathbf{v}}(t,\xi))$ に対し

$$y = \xi + \int_0^t \mathbf{v}(t,\xi)ds \equiv Y_{\mathbf{v}}(t,\xi)$$

とおく. 変換 $y = Y_{\mathbf{v}}(t,\xi)$ の逆の存在は $\max_{i,j=1,2,3} \| \int_0^t (\partial v_i/\partial \xi_j)(s,\cdot)ds\|_{L^\infty(\Omega)} \le \sigma$ を満たす十分小さい $\sigma > 0$ が存在することから示される. さらに, $\theta(t,\xi) = \tau(t, Y_{\mathbf{v}}(t,\xi))$ とおけば第一式は

$$\partial_t \theta + \mathrm{div}\,\mathbf{v} = f_0(\mathbf{v},\theta,\kappa,\Omega)$$

となる. ここで,

$$f_0(\mathbf{v},\theta,\kappa,\Omega) = -V_1(\int_0^t \nabla \mathbf{v}(s,\xi)ds)\mathrm{div}\,\mathbf{u} \\ +F_0'(\mathbf{v},\theta,\kappa,\Omega).$$

$V_1(\int_0^t \nabla \mathbf{v}(s,\xi)ds)$ は

$$\mathrm{div}_{\,y} = (\mathbf{I} + V_1(\int_0^t \nabla \mathbf{v}(s,\xi)ds))\mathrm{div}_{\,\xi}$$

を満たす.

以上をまとめると, $\mathbf{v}(t,\xi) = (\nabla X)^{-1}(\mathbf{u}(t, X(t,y)) - X_t)$, $\theta(t,\xi) = \rho(t, X(t,y)) - \bar{\rho}$, $\Omega(t) = Q^T(t)\omega(t)$, $\kappa(t) = Q^T(t)\eta(t)$, $N(\xi) = Q^T(t)\mathbf{n}(t, X(t,y)))$, $I = Q^T(t)J(t)Q(t)$, $\mathcal{T}(\mathbf{v},\theta) = Q^T(t)\mathbf{T}(\mathbf{v},\theta)Q(t)$ とおくことにより (10) は次のように書き換えられる.

$$\begin{cases} \partial_t\theta + \bar{\rho}\mathrm{div}\,\mathbf{v} = f_0(\mathbf{v},\theta,\kappa,\Omega) & \text{in } J_T \times \mathcal{D}, \\ \partial_t \mathbf{v} - \mathrm{Div}\,\mathcal{T}(\mathbf{v},\theta) = \mathbf{f}_1(\mathbf{v},\theta,\kappa,\Omega) & \text{in } J_T \times \mathcal{D}, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{on } J_T \times \Gamma, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{w}_0, \quad \theta(0) = \rho_0 - \bar{\rho} & \text{in } \mathcal{D}, \\ m\kappa' - \int_\Gamma \mathcal{T}(\mathbf{v},\theta)Nd\sigma = \mathbf{g}_0(\mathbf{v},\theta,\kappa,\Omega) & t \in J_T, \\ I\Omega' - \int_\Gamma \xi \times \mathcal{T}(\mathbf{v},\theta)Nd\sigma = \mathbf{g}_1(\mathbf{v},\theta,\kappa,\Omega) & t \in J_T, \\ \kappa(0) = \eta_0, \quad \Omega(0) = \omega_0. \end{cases} \tag{13}$$

ここで $\mathbf{w}_0 = \mathbf{u}_0 - X_t|_{t=0}$, f_0, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{g}_i (i = 0, 1)$ は非線形項を表す. 先に述べた 2 つの変換はそれぞれ微分同相写像なので (10) を考える代わりに (13) に対し解の一意存在性を考えればよい.

(13) に対応する次の線形化問題に対する L_p-L_q 最大正則性を示す.

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \gamma_1\mathrm{div}\,\mathbf{u} = f_0 & \text{in } J_T \times \mathcal{D}, \\ \partial_t \mathbf{u} - \mathrm{Div}\,\mathbf{T}(\mathbf{u},\rho) = \mathbf{f}_1 & \text{in } J_T \times \mathcal{D}, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } J_T \times \Gamma, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \rho(0) = \rho_0 - \bar{\rho} & \text{in } \mathcal{D}, \\ m\kappa' - \int_\Gamma \mathbf{T}(\mathbf{u},\rho)\nu d\sigma = \mathbf{g}_0 & t \in J_T, \\ \mathcal{I}\Omega' - \int_\Gamma \xi \times \mathbf{T}(\mathbf{u},\rho)\nu d\sigma = \mathbf{g}_1 & t \in J_T, \\ \eta(0) = \eta_0, \quad \omega(0) = \omega_0. \end{cases} \tag{14}$$

ここで, $f = (f_0, \mathbf{f}_1)$ and $g = (\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1)$ は既知の関数, ν は Γ 上の単位法線ベクトル. (14) に対し次を得る.

定理 10. $\mathcal{D}$ を $C^{2,1}$ 級の境界をもつ外部領域とし, $1 < p, q < \infty$, $T > 0$ とする. 初期データと外力について η_0, $\omega_0 \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_0 \in B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathcal{D})$, $\rho_0 - \bar{\rho} \in W^1_q(\mathcal{D})$, $f_0 \in L_p(J_T, W^1_q(\mathcal{D}))$, $\mathbf{f}_1 \in L_p(J_T, L_q(\mathcal{D}))$, $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1 \in L_p(J_T, \mathbb{R}^3)$ を仮定する. このとき, (14) は次の一意解をもつ.

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} \in X^T_{p,q} := W^1_p(J_T, L_q(\mathcal{D})) \cap L_p(J_T, W^2_q(\mathcal{D})), \\ &\rho \in Y^T_{p,q} := W^1_p(J_T, W^1_q(\mathcal{D})), \\ &\kappa, \Omega \in W^1_p(J_T, \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

さらに, 次の評価を満たす定数 $C > 0$ が存在する.

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}\|_{X^T_{p,q}} + \|\rho\|_{Y^T_{p,q}} + \|\kappa\|_{W^1_p(J_T)} + \|\Omega\|_{W^1_p(J_T)} \\ &\quad \le C(\|f_0\|_{L_p(J_T, W^1_q(\mathcal{D}))} + \|\mathbf{f}_1\|_{L_p(J_T, L_q(\mathcal{D}))} \\ &\quad + \|\mathbf{g}_0\|_{L_p(J_T)} + \|\mathbf{g}_1\|_{L_p(J_T)} + \|\mathbf{u}_0\|_{B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathcal{D})} \\ &\quad + \|\rho_0 - \bar{\rho}\|_{W^1_q(\mathcal{D})} + |\eta_0| + |\omega_0|). \end{aligned}$$

証明. (14) にあるように, 流体方程式を変換して得られた線形方程式には未知数として κ, Ω を含まないので, 流体方程式に対する最大正則性を示したあと, 剛体との連立方程式について考えればよい.

次の圧縮性 Navier-Stokes 方程式を考える.

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \gamma_1\mathrm{div}\,\mathbf{u} = f_0 & \text{in } J_T \times \mathcal{D}, \\ \partial_t \mathbf{u} - \mathrm{Div}\,\mathbf{T}(\mathbf{u},\rho) = \mathbf{f}_1 & \text{in } J_T \times \mathcal{D}, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } J_T \times \Gamma, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, & \text{in } \mathcal{D}, \\ \rho(0) = \rho_0 - \bar{\rho} & \text{in } \mathcal{D}. \end{cases} \tag{15}$$

[3], [4] より次の結果を得る.

命題 2. $1 < p, q < \infty$, $\mathbf{u}_0 \in B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathcal{D})$, $\rho_0 - \bar{\rho} \in W^1_q(\mathcal{D})$, $f_0 \in L_p(J_T, W^1_q(\mathcal{D}))$, $\mathbf{f}_1 \in L_p(J_T, L_q(\mathcal{D})^3)$ とする. このとき, (15) は次を満たす一意解 $(\mathbf{u}, \rho) \in X^T_{p,q} \times Y^T_{p,q}$ をもつ. さらに, 次を満たす f_0, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{u}_0$,

$\rho_0-\bar\rho$ に依存しない定数 $C>0$ が存在する.

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}\|_{X^T_{p,q}}+\|\rho\|_{Y^T_{p,q}}\\&\quad\le C(\|f_0\|_{L_p(J_T,W^1_q(\mathcal{D}))}+\|\mathbf{f}_1\|_{L_p(J_T,L_q(\mathcal{D}))}\\&\qquad+\|\mathbf{u}_0\|_{B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathcal{D})}+\|\rho_0-\bar\rho\|_{W^1_q(\mathcal{D})}).\end{aligned}$$

連立方程式に対し最大正則性を得るために, 次の $X^T_{p,q}$ に対する埋め込みを用いる.(cf. [5])

補題 3. $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^3$ を $C^{1,1}$ 級の境界をもつ領域, $1<p,q<\infty$, $0<\alpha<1$, $T>0$ とする. このとき

$$X^T_{p,q}\hookrightarrow H^\alpha_p(J_T,H^{2-2\alpha}_q(\mathcal{D})).$$

ここで, $[\cdot,\cdot]_\theta$ $(0<\theta<1)$ は複素補間を表し, $H^s_q(\mathcal{D})=[L_q(\mathcal{D}),W^m_q(\mathcal{D})]_{s/m}$.

ここで, 6×6 の定数行列 $\mathbf{I}_6$ を次で定義する.

$$\mathbf{I}_6=\begin{pmatrix} m\mathbf{I} & 0\\ 0 & \mathbf{I}\end{pmatrix}.$$

さらに, $0<\epsilon\le 1-1/q$ に対し, 作用素 $\mathcal{J}_{\epsilon,\nu}$ を次で定義する

$$\mathcal{J}_{\xi,\nu}:W^{\epsilon+1/q}_{q,\mathrm{loc}}(\mathcal{D},\mathbb{R}^{3\times3})\to\mathbb{R}^6,\ h\mapsto\begin{pmatrix}\int_\Gamma h\nu d\sigma\\ \int_\Gamma\xi\times h\nu d\sigma\end{pmatrix}.$$

これらを用いれば, (14) は次で書き直される.

$$\begin{gathered}\mathbf{I}_6\begin{pmatrix}\kappa'\\ \Omega'\end{pmatrix}-\mathcal{J}_{\xi,\nu}\mathbf{T}(\mathbf{u},\rho)=\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0\\ \mathbf{g}_1\end{pmatrix},\\ \kappa(0)=\eta_0,\quad\Omega(0)=\omega_0.\end{gathered}\tag{16}$$

$\mathbf{I}_6$ は逆写像をもつので, κ, Ω は次で表される.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\kappa\\ \Omega\end{pmatrix}=\int_0^t\mathbf{I}_6^{-1}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0\\ \mathbf{g}_1\end{pmatrix}+\mathcal{J}_{\xi,\nu}(\mathbf{T}(\mathbf{u},\rho))\right](s)ds\\ +\begin{pmatrix}\eta_0\\ \omega_0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

右辺を命題 2, 補題 3, トレース作用素 $\gamma:H^{\epsilon/2+1/q}_{q,\mathrm{loc}}(\mathcal{D})\to L_q(\partial\mathcal{D})$ の有界性から得られる $|\mathcal{J}_{\xi,\nu}h|\le C\|\gamma h\|_{L_q(\Gamma)}\le C\|h\|_{W^{\epsilon+1/q}_q(\mathcal{D})}$ $(h\in W^{\epsilon+1/q}_q(\mathcal{D}))$ を用いて評価すれば, 定理 10 を得る. □

4. 結論

スリップ境界条件下での圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する時間局所的・大域的適切性と, 圧縮性粘性流体と剛体の連成問題に対する時間局所的適切性をこれまで扱われてきた L_2 枠ではなく, L_p-L_q 枠で得た. 先行研究と比較し, L_p-L_q 最大正則性を用いたことで, 初期値の正則性と整合条件に対し最小な条件の下, 適切性を証明することが出来た.

参考文献

[1] M. Boulakia and S. Guerrero, *A regularity result for a solid-fluid system associated to the compressible Navier-Stokes equations.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **26** (2009), No. 3, 777–813.

[2] M. Burnat and W. Zajaczkowski, *On local motion of a compressible barotropic viscous fluid with boundary slip condition*, Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Julinsz Schauder Center **10** (1997), 195–223.

[3] R. Denk, M. Hieber, J. Prüss, *$\mathcal{R}$-boundedness, Fourier Multiplier and Problems of Elliptic and Parabolic Type*, Memoirs of AMS. Vol 166. No. 788 (2003).

[4] R. Denk, M. Hieber, J. Prüss, Optimal L^p-L^q estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data, Math. Z. **257** (2007), 193–224.

[5] M. Geissert, K. Götze and M. Hieber, *L^p-theory for strong solutions to fluid-rigid body interaction in Newtonian and generalized newtonian fluids.* Trans of AMS, **365** (2013), 1393–1439.

[6] M. Hieber and M. Murata, *The Lp-approach to the fluid-rigid body interaction problem for compressible fluids.* Evol. Equ. Control Theory, **4** (2015), 69–87.

[7] M. Murata, *On a maximal Lp-Lq approach to the compressible viscous fluid flow with slip boundary condition.* Nonlinear Anal, **106** (2014), 86–109.

[8] T. Kobayashi and W. Zajączkowski, *On global motion of a compressible barotropic viscous fluid with boundary slip condition*, Applicationes Mathematicae, **26, 2** (1999), 159–194.

[9] Y. Shibata and M. Murata, *On the global well-posedness for the compressible Navier-Stokes equations with slip boundary condition.* J. Differential Equations, **260** (2016), no. 7, 5761–5795.

[10] L. Weis, *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity.* Math. Ann. **319** (2001), 735–758.