総説

無限次元多様体の位相構造

嶺　幸太郎*

Topological structures of infinite-dimensional manifolds

Kotaro MINE *

1．はじめに

位相幾何学 (トポロジー) の研究対象となる空間や図形を**位相空間**と呼ぶ．ここで位相 (トポロジー) とは，写像の連続性や点列の収束発散を規定する際に用いる数学的構造のことを指し，位相を構成する集合を**開集合**と呼ぶ．二つの図形においてそれらの位相構造の間に本質的な違いが見られないとき，それらは**同相である**という．本稿では位相空間の中でも無限次元多様体と呼ばれる対象に話題を絞り，その位相構造について考察する．

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と局所的に同相な空間を**n次元多様体**という．多様体は，現代幾何学において主要な研究対象となる基本的な空間 (図形) である．1 次元多様体は直線または円のいずれかであり，2 次元多様体は曲面とも呼ばれている．そして高次元多様体の研究は，宇宙の形の可能性を追及する幾何学と見なすことができる．本稿で論じる空間は，これの無限次元版に相当する．すなわち，何らかの無限次元空間と局所的に同相な空間のことであり，このような空間を総称して**無限次元多様体**と呼ぶ．有限次元の多様体との大きな違いは，n 次元線形空間の位相が唯一つだけ定まるのに対して，無限次元線形空間には無数の位相構造が入るという点にある．本論の前半では，いくつかの無限次元位相線形空間を取り上げ，それらを近傍モデルとする多様体の特徴づけや分類定理について紹介する．また後半においては，図形の空間と写像の空間の位相構造について論じながら，無限次元の構造をもつ幾何学的対象のうち実際に多様体となることが判明した例について報告する．

本論において，位相空間はすべてハウスドルフの分離公理を満たすものと仮定する．つまり，与えられた点列の極限が 2 点以上定まることがないような空間のみを考える．また技術上の都合により，多様体にはパラコンパクト性を要求する．

*特任助教　工学部数学教室
Assistant Professor, Dept. of Mathematics

2. 多様体概念の一般化

n 次元多様体の定義から，次の概念が容易に類推されよう:

定義． E を等質な位相空間とする．各点が，E の開集合と同相な近傍を持つような位相空間を**E-多様体**という．このとき，E を多様体の**モデル空間**と呼ぶ．

n 次元多様体とは $\mathbb{R}^n$-多様体のことにほかならない．一般論としては，モデル空間 E がどんな等質空間であろうとも上のようにして E-多様体なる概念が定義できる．しかしながら本論では，E が主に線形空間となる場合について論じる．ただし，関連する研究としてヒルベルト立方体 $Q = [0,1]^{\mathbb{N}}$ をモデルとする Q-多様体についても部分的に紹介する．

無限次元位相線形空間の最も典型的な例は完備内積構造を持つヒルベルト空間である．距離空間として完備な無限次元多様体のトポロジーを研究する立場からすると，ヒルベルト多様体のみを論じればよいことが次の定理 1 により分かる．ここで，完備距離づけ可能な局所凸位相線形空間を**フレシェ空間 (Fréchet space)** と呼ぶ．ヒルベルト空間やバナッハ空間はフレシェ空間である．

定理 1 (Kadec-Anderson)**.** 稠密度の等しい無限次元フレシェ空間はすべて同相 ($\approx$) である．

稠密度とは，稠密部分集合の最小濃度のことを指す．位相空間 X の稠密度が可算無限濃度 $\aleph_0$ 以下になるとき，X は**可分である**という．定理 1 の非可分な場合を含めた証明は [29] にある．

3. ヒルベルト多様体の諸性質

τ を無限濃度, 稠密度 τ の無限次元ヒルベルト空間を $\ell_2(\tau) = \{(x_t)_{t\in\tau} \in \mathbb{R}^\tau \mid \sum_{t\in\tau} {x_t}^2 < \infty\}$ とし, とくに可分な場合について $\ell_2(\aleph_0)$ を ℓ_2 と略記する. $\ell_2(\tau)$-多様体について次が成り立つ (Henderson-Schori[13]).

定理 2 (埋蔵定理)**.** 任意の連結な $\ell_2(\tau)$-多様体は開部分空間として $\ell_2(\tau)$ 自身に埋め込める.

定理 3 (分類定理)**.** 連結な $\ell_2(\tau)$-多様体どうしが同相であるための必要十分条件はホモトピー同値となることである.

定理 4 (三角形分割定理)**.** 任意の連結な $\ell_2(\tau)$-多様体 M に対して, $M \approx |K| \times \ell_2(\tau)$ となるような局所有限次元多面体 $|K|$ が存在する. ここで, $|K|$ には距離から定まる位相が入っているとする.

これらの基本的事実を背景として, ヒルベルト空間とは異なるモデル空間による多様体の研究においては, 上述の定理群に類似するような良い性質を満たすようにモデル空間を設定することが望ましいとされてきた. 例えば, ノルム空間 E が $E \approx E^{\mathbb{N}}$ または $E \approx E^{\mathbb{N}}_f$ を満たすならば, 定理 2 及び 3 と同様の性質が E-多様体においても成立することが知られている. ここで, $E^{\mathbb{N}}_f$ は σ-積を表す. すなわち,

$$E^{\mathbb{N}}_f = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} \mid \text{有限個の } n \text{ を除いて } x_n = 0\}.$$

次に, 普遍空間としての $\ell_2(\tau)$-多様体の特徴づけを述べよう. ある位相空間のクラス $\mathcal{C}$ に対して, 位相空間 X が $\mathcal{C}$ の**普遍空間** (あるいは**万有空間**) であるとは, $\mathcal{C}$ の任意の元が X に埋め込めることをいう. 次の定理を見れば, 完備距離空間の "強い意味" での普遍空間として $\ell_2(\tau)$-多様体が特徴づけられることが分かる.

定理 5 (Toruńczyk [29])**.** 完備距離 ANR 空間 M が $\ell_2(\tau)$-多様体となるための必要十分条件は, 稠密度 τ 以下の任意の完備距離空間 X に対して, X から M への任意の連続写像が閉埋蔵写像で近似できることである.

4. 完備距離を持たない多様体

この節では, 完備距離が入らない線形距離空間について述べる. その典型的な例は前ヒルベルト空間

$$\ell_2^f = \{\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 \mid \text{有限個の } n \text{ を除いて } x_n = 0\,\}$$

である. ℓ_2^f を含め, 次に挙げる空間は, 特別な位相空間のクラスに関する普遍空間となることが知られる:

$$\begin{aligned} \ell_2^f &\ \text{— } \sigma\text{-有限次元コンパクト距離空間の普遍空間,} \\ \ell_2^f \times Q &\ \text{— } \sigma\text{-コンパクト距離空間の普遍空間,} \\ \ell_2 \times \ell_2^f &\ \text{— 可分な } \sigma\text{-完備距離空間の普遍空間.} \end{aligned}$$

ここで, $\ell_2^f \times Q$ は線形空間ではないが, この空間と同相な位相線形空間の存在が分かってる. 上に挙げた空間をモデル空間とする多様体も, 次の定理 6 によって "ある種" の普遍空間として特徴づけられる. いくつかの定義が繁雑なため各用語の詳細は省略するとして, 定理 6 の意図を大雑把に述べれば次のようになる: モデル空間として吸収的集合 (absorbing set) と呼ばれる特別な普遍空間を定義し, "強普遍" なる概念によって多様体の特徴づけを与える. もちろん上に挙げた三つの空間は, いずれも対応するクラスの吸収的集合である.

定理 6 (Theorem 2.5 of [18])**.** $\mathcal{C}$ を閉集合に関する有限和や遺伝性で閉じた位相的クラスとし, さらに任意の $n \in \mathbb{N}$ について τ 個の n 次元立方体の直和空間を $\mathcal{C}$ が含んでいるとする. このとき, $\mathcal{C}$ に関する $\ell_2(\tau)$ の吸収的集合を E とすれば, ANR 空間 X が E-多様体となるための必要十分条件は X が $\mathcal{C}$ に関して強普遍な強 Z_σ 空間であり, かつ $X \in \mathcal{C}_\sigma$ となることである.

上の定理により, 良い性質を満たす位相空間のクラス $\mathcal{C}$ とその吸収的集合 (普遍空間) $E \subset \ell_2(\tau)$ が与えられれば, E-多様体の特徴づけが得られることが分かった. このようなクラス $\mathcal{C}$ と吸収的集合 E の組について, いくつもの例があることを次に紹介しよう.

開集合 (閉集合) の可算共通部分 (可算和) で書ける集合を **$\mathbf{G}_\delta$-集合** (**$\mathbf{F}_\sigma$-集合**) と呼び, いかなる距離空間に埋め込んでも, その空間の中で G_δ-集合 (F_σ-集合) となるような距離空間を**絶対 $\mathbf{G}_\delta$-空間** (**絶対 $\mathbf{F}_\sigma$-空間**) と呼ぶ. そして, いかなる距離空間に埋め込んでも, その空間の中でボレル集合となるような距離空間を**絶対ボレル空間**と呼ぶ. よく知られる事実として, 位相空間が完備距離空間と同相であるための必要十分条件は, それが絶対 G_δ-空間となることである. コンパクト距離空間は絶対閉-空間である. また, σ-コンパクト距離空間と同相であることと, 可分な絶対 F_σ-空間であることは必要十分である. 蛇足ではあるが, 絶対開-空間は空集合のみである.

先に挙げた三つの普遍空間の例と, いま述べた事実を組み合わせた一般化を考えることで, 可分な絶対ボレル空間の各ボレル階層に対する普遍空間が存在することを Bestvina-Mogilski[6] は示した．更に, Sakai-Yaguchi[27] や Mine[18] により, 非可分な絶対ボレル空間に対しても同等の事実が証明され, これらの普遍空間をモデルとする多様体も定理 2 や 3, 4 にあるような性質を満たすことが分かっている．

また, 可分なクラスについては, 解析集合 (analytic subset) やその補集合 (coanalytic set), それらの一般化である射影集合 (projective set) の各階層に対する普遍空間の存在が Cauty[7] により得られている．

5. LF-空間と箱位相

次に, 距離づけ不可能なモデル空間の例として, LF-空間と呼ばれる位相線形空間を挙げる．LF-空間とは, 次で定義される, 局所凸位相線形空間におけるフレシェ空間の帰納的極限 (inductive limit) のことである．

定義. フレシェ空間の増大列 $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq F_3 \subsetneq \cdots$ に対して, 各 F_n から $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ への自明な写像が連続となるような F の局所凸線形位相の中で最強のものを導入した空間 F を **LF-空間**と呼び, $\text{ind-lim}\, F_n$ と書く．

注意したいのは, 位相空間における帰納的極限 $\varinjlim F_n$, すなわち $U \subset \varinjlim F_n$ が開集合であることを各 $U \cap F_n$ が F_n の開集合であることと定義する位相と $\text{ind-lim}\, F_n$ の位相は一般には一致せず, $\varinjlim F_n$ のほうが強いということである．二つの位相が一致するための必要十分条件は各 F_n が局所コンパクト (すなわち有限次元) となることであり, 実際, 局所コンパクトでない F_n が一つでもあると和の操作が $\varinjlim F_n$ では連続にならず, したがって $\varinjlim F_n$ は位相群にすらならない．

LF-空間の位相は, 箱位相と呼ばれる特殊な積位相と関係が深い．

定義. 積集合 $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ において, 集合族

$$\left\{ \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \;\middle|\; U_n \text{ は } X_n \text{ の開集合} \right\}$$

で生成される位相を**箱位相**と呼び, この箱位相空間を $\square X_n$ と書く．更に, 基点 $*_n \in X_n$ に対して定義される部分空間

$$\{\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \square X_n \mid \text{有限個の } n \text{ を除いて } x_n = *_n \,\}$$

を**弱箱位相空間**と呼び, これを $\boxdot X_n$ で表す．

弱箱位相空間は集合としては σ-積と等しい．有限積の場合, 箱位相空間および弱箱位相空間は通常の積位相空間と一致する．本節では X_n として主に線形空間を考えるので, 基点 $*_n$ は原点とする．

箱位相空間の位相は複雑で, $\square\ell_2$ ですら正規空間にはならず, 連結でも局所連結でもなく, 特に位相線形空間ではない．しかしながら, その部分空間である弱箱位相空間は比較的良いふるまいをする．実際, フレシェ空間の有限積による増大列,

$$F_1 \subset F_1 \times F_2 \subset F_1 \times F_2 \times F_3 \subset \cdots,$$

に関する LF-空間は弱箱位相空間に一致する:

命題 7. $\text{ind-lim} \prod_{i=1}^n F_i = \boxdot F_n$．とくに, $\varinjlim \mathbb{R}^n = \text{ind-lim}\, \mathbb{R}^n = \boxdot\mathbb{R}$.

Mankiewicz によれば, 稠密度が等しい LF-空間の位相は 2 種類以下に分類される:

定理 8 (Mankiewicz[17])**.** 可分な LF-空間は, $\boxdot\ell_2$ および $\boxdot\mathbb{R}$ のいずれかと同相になる．更に, 稠密度が非可算濃度 τ の LF-空間は, $\boxdot\ell_2(\tau)$ および $\boxdot\ell_2(\tau_n)$ のいずれかと同相になる．ここで, 各 τ_n は $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots$ および $\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n = \tau$ を満たす濃度とする．

系 9. 任意の無限濃度 τ について, $\boxdot\ell_2(\tau) \approx \ell_2(\tau) \times \boxdot\mathbb{R}$.

したがって, LF-空間をモデル空間とする多様体 (以下, これを総称して **LF-多様体**と呼ぶ) を考える場合, 位相的には 2 種類のモデル空間のみを考えればよい．$\boxdot\mathbb{R}$-多様体については, Heisey[12] や Sakai[25] の研究よって定理 2 や 3, 4 と同等の性質が成り立つことが分かっている．それ以外の LF-多様体についてはそこまでは分かっていないが, LF-空間の開部分空間に対して次が得られている．

定理 10 (M-Sakai[19])**.** $\boxdot\ell_2(\tau)$ の開部分空間どうしが同相であるための必要十分条件はホモトピー同値となることである．

定理 11 (M-Sakai[20])**.** LF-空間 F の任意の開部分空間 U には, $U \approx |K| \times F$ となるような局所有限次元多面体 $|K|$ が存在する. ここで, $|K|$ には距離から定まる位相が入っているとする.

6. 無限次元多様体となる幾何的対象

ここから先は, どのような数学的対象が無限次元多様体になり得るのかについて論じる. 実は, 1854 年に Riemann[23] が多様体の概念を提唱した際, 無限次元多様体の存在について次のように言及している (引用中の下線部は嶺によるもので, 邦訳は [24] による):

“位置の規定が有限個の量規定ではなく, 無限数列をなす量規定, あるいは連続多様体をなす量規定を要求するような多様体もある. そのような多様体をなすのは, 例えば, ある与えられた領域に対する［この領域を定義域とする］関数の可能な規定 や, 空間図形の可能な形 などである.”

つまり, 無限次元多様体の候補には, 関数の空間や図形の空間が挙げられるわけである. 本論では, 図形の空間として冪空間について, 写像 (関数) の空間として連続写像空間について, 一体どのような条件の下でこれらが無限次元多様体になるのか検討しよう.

7. 冪空間

本節では, 位相空間 X は 2 点以上からなる集合とし, X の閉集合全体を $\mathrm{Cld}(X)$ で表す. また, その部分集合として X のコンパクト集合全体を $\mathrm{Comp}(X)$, X の有限集合全体を $\mathrm{Fin}(X)$ と書く. 本論では割愛するが, これ以外にも有界閉集合全体や凸閉集合全体, ペアノ連続体全体などを考える場合もある. ここで**ペアノ連続体**とは, 閉区間 $\mathbf{I} = [0,1]$ の連続像となる空間のことを指す. これは局所連結な連結コンパクト距離空間になることと同値である.

ヴィエトリス位相をはじめとして, $\mathrm{Cld}(X)$ にはいくつかの位相が定義されている. ここではハウスドルフ距離による位相を導入しよう.

定義. 距離空間 (X,d) に対して, 次で定義される $\mathrm{Cld}(X)$ における距離 d_H を**ハウスドルフ距離**と呼ぶ.

$$d_H(A,B) = \inf\{\, \varepsilon > 0 \mid B \subset N(A,\varepsilon) \text{ かつ } A \subset N(B,\varepsilon)\,\}.$$

ここで, $N(A,\varepsilon)$ は集合 A の ε-開近傍を表す.

ハウスドルフ距離による位相は, X の距離 d に依存する点に注意しなければならない. つまり, $(X,d) \approx (X,d')$ だからといって $(\mathrm{Cld}(X), d_H) \approx (\mathrm{Cld}(X), d'_H)$ とは限らないということである. 部分空間 $\mathrm{Comp}(X)$ については距離によらずに位相が決まることが知られる.

冪空間の多様体性に関する有名な結果としては, 例えば次の定理が挙げられよう. 冪空間は多様体になるというだけではなく, 実際にはモデル空間そのものと同相であることが多い.

定理 12 (Curtis-Schori[11])**.** $\mathrm{Comp}(X)$ が Q と同相であるための必要十分条件は X がペアノ連続体となることである.

定理 13 (Curtis[8])**.** $\mathrm{Comp}(X)$ が ℓ_2 と同相であるための必要十分条件は X が局所連結な連結完備距離空間であり, かつ X の各点がコンパクトな近傍を持たないことである.

(X,d) がコンパクトでない場合は $\mathrm{Cld}(X)$ の位相的分類はよく分かっておらず, とくに完備距離空間でない場合は $\mathrm{Comp}(X)$ ですら扱いが難しい. 例えば, X が σ-コンパクトな場合でも $\mathrm{Comp}(X)$ は絶対ボレル空間ではない:

定理 14 (Banakh-Cauty[2])**.** coanalytic クラスの普遍空間 Π_2 と $\mathrm{Comp}(X)$ が同相であるための必要十分条件は, X が第 1 類かつ局所・連続体-連結な連結 coanalytic set となることである. とくに, $\mathrm{Comp}(\ell_2^f)$ は Π_2 と同相である.

ここで, 距離空間 X が**連続体-連結 (continuum-connected)** であるとは, $\{x,y\}$ を含む X の連結コンパクト部分集合 (連続体) の存在が任意の 2 点 $x, y \in X$ について言えることである. 更に, 連続体-連結な部分集合による開基を持つ空間を**局所・連続体-連結 (locally continuum-connected)** であると定める.

有限部分集合による冪空間については次が知られている. ここで, 有限次元閉部分空間の可算和で書ける空間を**強可算次元空間**と言う.

定理 15 (Curtis-Nhu[10])**.** $\mathrm{Fin}(X)$ が ℓ_2^f と同相であるための必要十分条件は X が局所連結な強可算次元 σ-コンパクト連結距離空間となることである.

X のボレル階層が高くなると $\mathrm{Fin}(X)$ の特徴づけを探すのは難しく, 定理 15 のような綺麗な結果は得られていない. それでも特定の位相空間に関する冪空間の位相的決定は興味深く, 例えば, $\mathrm{Fin}(Q) \approx \mathrm{Fin}(\ell_2^f \times Q) \approx \ell_2^f \times Q$ (Curtis[9]), $\mathrm{Fin}(\ell_2(\tau)) \approx \ell_2(\tau) \times \ell_2^f$ (Yaguchi[33]) などが得られている. 更に, X をある位相的クラスの普遍空間と見なし一般化することで次を得る.

定理 16 (M-Sakai-Yaguchi[22]). E を 4 節で挙げた完備距離づけ可能でない吸収的集合とし, M を連結な E-多様体とする. このとき $\mathrm{Fin}(M)$ は E と同相である.

このほか, 最近になって定理 13 および 15 の非可分化に相当する次が示されている.

定理 17 (Koshino[14]). $\mathrm{Comp}(X)$ が $\ell_2(\tau)$ と同相であるための必要十分条件は X が局所連結な連結完備距離空間であり, かつ X の空でない任意の開集合が稠密度 τ の非相対コンパクト集合となることである.

定理 18 (Koshino[15]). $\mathrm{Fin}(X)$ が $\ell_2^f(\tau)$ と同相であるための必要十分条件は X が局所連結な強可算次元 σ-局所コンパクト連結距離空間であり, かつ X の任意の空でない開集合の稠密度が τ となることである.

8. 連続写像空間

位相空間 X から Y への連続写像全体を $C(X,Y)$ で表す. $C(X,Y)$ 上に定められる自然な位相として, コンパクト開位相や一様収束位相, limitation 位相, グラフ位相などが知られている. これらの位相の強弱は次のようになっている (ただし, 一様収束位相は Y が距離空間のときに限り定義される位相である):

$$\text{コンパクト開位相} \subset \text{一様収束位相} \subset \text{limitation 位相} \subset \text{グラフ位相}.$$

これらの位相は, X がコンパクトでない場合に本質的に意味を持つ. すなわち, 定義域 X がコンパクトならば上の四種類の位相はすべて一致する. 本節では, 各位相ごとに $C(X,Y)$ の多様体性について論じる.

8.1. コンパクト開位相

この位相は, 解析学における広義一様収束位相に相当する概念である.

定義. X のコンパクト部分集合 K および Y の開集合 U を動かして定義される集合たち $[K,U] = \{ f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U \}$ によって生成される $C(X,Y)$ 上の位相を**コンパクト開位相**と言う.

定義域 X が局所コンパクトであると集合 $[K,U]$ による情報量は豊かになり, コンパクト開位相は位相的に扱いやすくなる. X や Y を最も一般化した場合における $C(X,Y)$ の多様体性について, 次の定理がある.

定理 19 (Sakai [26]). 有限集合でないコンパクト距離空間 X および孤立点を持たない可分完備距離 ANR 空間 Y について, $C(X,Y)$ はコンパクト開位相において ℓ_2-多様体である.

X がコンパクトでない場合は $C(X,Y)$ の ANR 性が問題になる. 例えば, X が CW 複体の場合については Smrekar-Yamashita[28] を見よ.

8.2. 一様収束位相

次で定めるような無限大の値も許す距離を考えよう:

定義. (Y,d) を距離空間とする. **上限距離** $d_S(f,g) = \sup\{ d(f(x),g(x)) \mid x \in X \}$ から定まる $C(X,Y)$ 上の位相を**一様収束位相**と言う.

ハウスドルフ距離と同様に, この位相も Y の距離に依存することに注意したい. $C(X,Y)$ の ANR 性を確保するために, 次の定理では, Y の条件に ANRU と呼ばれる性質を要求している.

定理 20 (Yamashita [34]). コンパクトでない可分距離空間 X および可分完備距離 ANRU 空間 Y に対して, Y の各連結成分の直径による下限が正数であるならば $C(X,Y)$ は一様収束位相において $\ell_2(2^{\aleph_0})$-多様体となる.

8.3 Limitation 位相

定義. Y の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, $\{f(x),g(x)\} \subset U$ なる $U \in \mathcal{U}$ の存在が任意の $x \in X$ について言えるとき, $f,g \in C(X,Y)$ は $\mathcal{U}$ **だけ近い** ($\mathcal{U}$**-close**) と定義し, f と $\mathcal{U}$ だけ近い $g \in C(X,Y)$ の全体を $\mathcal{U}(f)$ で表す. 集合族 $\{\mathcal{U}(f) \mid \mathcal{U}$ は Y の開被覆$\}$ を各 $f \in C(X,Y)$ の近傍基とするような $C(X,Y)$ の位相を **limitation 位相**と言う.

Y が距離空間かつ $f \in C(X, Y)$ が定数関数である場合, f の近傍は一様収束位相による近傍と一致し, ゆえに f は可算近傍基を持つ．ところが, f が同相写像である場合, f は可算近傍基を持たないことが分かる (詳しくは定理 24 の後で述べる)．したがって, $X = Y = \mathbb{R}$ の場合ですら $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ は多様体になり得ない.

8.4 グラフ位相

次で定義されるグラフ位相は, 0 階連続的微分可能な関数におけるホイットニー位相とも見なせる.

定義． 各 $f \in C(X, Y)$ に対して, f の**グラフ**を $\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X \}$ とする．更に, $X \times Y$ の部分集合 U に対して, グラフが U に含まれるような連続関数全体を Γ_U で表す．**グラフ位相**とは, 集合族 $\{\Gamma_U \mid U$ は $X \times Y$ の開集合$\}$ で生成される $C(X, Y)$ 上の位相のことである.

この位相は箱位相と相性が良く, 例えば空間の連結性についてその様子が見て取れる．まず, 次のような $\square\mathbb{R}$ の部分集合 U を考えると,

$$U = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \square\mathbb{R} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\},$$

これは原点 $(0, 0, 0, \cdots) \in \square\mathbb{R}$ の clopen な近傍であり, U は $(1, 1, 1, \cdots) \in \square\mathbb{R}$ を含まない．ゆえに, $\square\mathbb{R}$ は不連結である．さて,

$$U' = \left\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \right\}$$

とすると, U' も原点 (すなわち定数関数 $g = 0$) の clopen な近傍であり, g 以外の定数関数を含まない．したがって, $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ もまた不連結となる．連結成分を記述するために定義を続けよう.

基点 $* \in Y$ に関する $f \in C(X, Y)$ の**台 (support)** を次で定める:

$$\operatorname{supp} f = \operatorname{cl}\{ x \in X \mid f(x) \neq * \}.$$

台がコンパクトな関数全体からなる $C(X, Y)$ の部分空間を $C_c(X, Y)$ と書く．連結成分に関して次の命題が成り立つ.

命題 21． $\square\mathbb{R}$ の原点の連結成分は $\boxdot\mathbb{R}$ に一致し, $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ のグラフ位相における原点の連結成分は $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に一致する.

Y が群構造を持つ場合について, $C_c(X, G)$ が LF-多様体となることを我々は示した:

定理 22 (Banakh-M-Sakai-Yagasaki [5])**．** コンパクトでない局所コンパクト可分距離空間 X および可分完備距離 ANR 位相群 G に対して, グラフ位相による写像空間のペア $(C(X, G), C_c(X, G))$ は, 箱位相空間のペア $(\square\ell_2, \boxdot\ell_2)$ と局所的に同相である．とくに $C_c(X, G)$ は LF-多様体である.

9. 同相群の位相

$C(X, Y)$ の自然な部分空間がいくつか考えられる．例えば $X = Y = \mathbb{R}$ の場合は, 有界関数空間や PL 関数空間, 微分可能関数空間, 多項式空間などがある．本節では, 特別な部分空間として同相写像のなす群 (同相群) の研究の一部を報告したい.

位相空間 X 上の同相写像とは, X のトポロジーを保つような入れ替えのことを指す．このような入れ替え全体による集合が同相群であり, したがって同相群は X の対称性を記述する幾何的概念である.

9.1. 同相群予想

位相空間 X に対して, X の同相写像全体からなる群 $H(X)$ を X の**同相群**と呼ぶ. $C(X, X)$ の部分空間として $H(X)$ には様々な位相が入る．一般に, 各位相において, $H(X)$ が位相群になるための必要十分条件を見つけるのは容易ではない．しかしながら, 後述する同相群はすべて位相群である.

さて, 同相群の多様体性についてであるが, 実はその証明は困難を極め, とくに ANR 性を示すのが難しく, X がコンパクト多様体の場合ですら分かっていない．次は Homeomorphism group problem と呼ばれる未解決問題である.

問題． n 次元立方体 $\mathbf{I}^n$ $(n \geq 3)$ の同相群 $H(\mathbf{I}^n)$ は ANR 空間であるか?

なお, 2 次元以下の多様体については同相群の多様体性が示されている:

定理 23 (Luke-Mason[16])**．** コンパクト 2 次元多様体の同相群は ℓ_2-多様体である.

次に, 底空間がコンパクトでない場合について, 写像空間の各位相と同相群の多様体性との関係を見よう.

9.2. コンパクト開位相と一様収束位相

コンパクト開位相については, コンパクトでない連結2次元多様体の同相群が ℓ_2-多様体となるための必要十分条件が Yagasaki[30] により得られている. 更に, その連結成分の位相的分類も完了している (Yagasaki[31]).

一様収束位相においては同相群が位相群でないことから, 位相群となり得る部分群である一様同相群について論じるのが自然である. ここでは底空間の位相構造のみならず距離関数が与える情報にも左右されることから, 多様体性の決定は特殊なケースに限って研究されている. 例えば実数直線 $\mathbb{R}$ の一様同相群とその部分群の多様体性について Mine-Sakai-Yagasaki-Yamashita[21] で論じられている. また, 曲面の一様同相群の局所可縮性について, Yagasaki[32] がある.

9.3. グラフ位相と limitation 位相

台がコンパクトな同相写像による部分群を $H_c(X)$ と書く. ただし, 同相写像 h の台は次で定義される集合であり, 連続関数版との違いに注意したい:

$$\operatorname{supp} f = \mathrm{cl}\{\, x \in X \mid f(x) \neq x \,\}.$$

グラフ位相に関する同相群の研究は, 次の Banakh による結果が発端となった.

定理 24 (Banakh[1])**.** グラフ位相について $H_c(\mathbb{R}) \approx \boxdot\ell_2$

実は, グラフ位相と limitation 位相は同相群に限ると一致することが分かる. $\boxdot\ell_2$ は第 1 可算公理を満たさない空間であるから, したがって, limitation 位相における $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 上の同相写像も可算近傍基を持たないのである.

8.4 項で述べた通りグラフ位相は箱位相空間と相性が良かった. これに対して, コンパクト開位相は通常の積位相空間と相性が良い. その事実を象徴するのが次に紹介する定理である. Γ を 1 次元多面体 (すなわちグラフ) とし, Γ にはホワイトヘッド弱位相が入っているとする. 向きを保つ同相写像による部分群を $H_+(\Gamma)$ と書き, $H_0(\Gamma) = H_+(\Gamma) \cap H_c(\Gamma)$ と定義する. ここで, **向きを保つ同相写像** $h \in H(\Gamma)$ とは, Γ に如何なる向き付けを行っても h が有向グラフ自己同型を誘導するもののことを指す.

定理 25 (Banakh-M-Sakai[3])**.** コンパクトでない連結 1 次元多面体 Γ について次が成立する:

- コンパクト開位相について
  $(H_+(\Gamma), H_0(\Gamma)) \approx ({\ell_2}^{\mathbb{N}}, {\ell_2}^{\mathbb{N}}_f)$,
- グラフ位相について
  $(H_+(\Gamma), H_0(\Gamma)) \approx (\square\ell_2, \boxdot\ell_2)$.

最後に, 定理 24 の 2 次元への拡張を述べよう.

定理 26 (Banakh-M-Sakai-Yagasaki[4])**.** コンパクトでない連結 2 次元多様体 X のグラフ位相による同相群のペア $(H(X), H_c(X))$ は箱位相空間のペア $(\square\ell_2, \boxdot\ell_2)$ と局所的に同型である. とくに $H_c(X)$ は LF-多様体である.

References

[1] T. Banakh, *On hyperspaces and homeomorphism groups homeomorphic to products of absorbing sets and* $\mathbb{R}^\infty$, Tsukuba J. Math. **23** (1999) 495–504.

[2] T. Banakh and R. Cauty, *Hyperspaces of nowhere topologically complete spaces,* Mat. Zametki **62** (1997), 35–51; translation in Math. Notes **62** (1997), 30–43 (1998).

[3] T. Banakh, K. Mine and K. Sakai, *Classifying homeomorphism groups of infinite graphs,* Topology Appl. **156** (2009), 2845–2869.

[4] T. Banakh, K. Mine, K. Sakai and T. Yagasaki, *Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology,* Topology Proc. **37** (2011), 61–93.

[5] T. Banakh, K. Mine, K. Sakai and T. Yagasaki, *Spaces of maps into topological group with the Whitney topology,* Topology Appl. **157** (2010), 1110–1117.

[6] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts,* Michigan Math. J. **33** (1986), 291–313.

[7] R. Cauty, *Ensembles absorbants pour les classes projectives,* Fund. Math. **143** (1993), 203-206

[8] D.W. Curtis, *Hyperspaces homeomorphic to Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), 126–130.

[9] D.W. Curtis, *Hyperspaces of finite subsets as boundary sets,* Topology Appl. **22** (1986), 97–107.

[10] D.W. Curtis and Nguyen To Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces,* Topology Appl. **19** (1985), 251–260.

[11] D.W. Curtis and R.M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes,* Fund. Math. **101** (1978), 19–38.

[12] R.E. Heisey, *Manifolds modelled on the direct limit of lines,* Pacific J. Math. **102** (1982), 47–54.

[13] D.W. Henderson and R.M. Schori, *Topological classification of infinite-dimensional manifolds by homotopy type,* Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 121–124.

[14] K. Koshino, *On a hyperspace of compact subsets which is homeomorphic to a non-separable Hilbert space,* Topology Appl. **206** (2016), 166–170.

[15] K. Koshino, *Hyperspace of finite subsets, homeomorphic to pre-Hilbert spaces,* Topology Appl. **210** (2016), 133–143.

[16] R. Luke and W.K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 275–285.

[17] P. Mankiewicz, *On topological, Lipschitz, and uniform classification of LF-spaces,* Studia Math. **52** (1974), 109–142.

[18] K. Mine, *Universal spaces of non-separable absolute Borel classes,* Tsukuba J. Math. **30** (2006), 137–148.

[19] K. Mine and K. Sakai, *Open subsets of LF-spaces,* Bull. Polish Acad. Sci. Math. **56** (2008), 25–37.

[20] K. Mine and K. Sakai, *Simplicial complexes and open subsets of non-separable LF-spaces,* Canad. J. Math. **63** (2011), 436–459.

[21] K. Mine, K. Sakai, T. Yagasaki and A Yamashita, *Topological type of the group of uniform homeomorphisms of the real line,* Topology Appl. **158** (2011) 572–581.

[22] K. Mine, K. Sakai and M. Yaguchi, *Hyperspaces of finite sets in universal spaces for absolute Borel classes,* Bull. Polish Acad. Sci., Math. **53** (2005), 409-419.

[23] B. Riemann, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, **13**, (1867).

[24] B. Riemann,『リーマン論文集』(数学史叢書) 足立恒雄・杉浦光夫・長岡亮介編訳, 朝倉書店 (2004).

[25] K. Sakai, *On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds,* Topology Appl. **18** (1984), 69–79.

[26] K. Sakai, *The space of cross sections of a bundle,* Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 956–960.

[27] K. Sakai and M. Yaguchi, *Characterizing manifolds modeled on certain dense subspaces of non-separable Hilbert spaces,* Tsukuba J. of Math. **27** (2003), 143–159.

[28] J. Smrekar and A. Yamashita, *Function spaces of CW homotopy type are Hilbert manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 751–759.

[29] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology,* Fund. Math. **111** (1981), 247–262.

[30] T. Yagasaki, *The homeomorphism groups of noncompact* 2*-manifolds*, Mem. Fac. Engrg. Design Kyoto Inst. Tech. Ser. Sci. Tech. **47** (1998), 41–48.

[31] T. Yagasaki, *Homotopy types of homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds*, Topology Appl. **108** (2000), 123–136.

[32] T. Yagasaki, *Groups of uniform homeomorphisms of covering spaces*, J. Math. Soc. Japan **66**, (2014), 1227–1248.

[33] M. Yaguchi, *Hyperspaces of finite subsets of non-separable Hilbert spaces,* Tsukuba J. Math. **30** (2006), 181–193

[34] A. Yamashita, *Non-separable Hilbert manifolds of continuous mappings*, `arXiv:math.GN/0610214`.