

金融政策ラグと均衡の決定性*

品川 俊介[†]・都築 栄司[‡]

Monetary policy lags and equilibrium determinacy

Shunsuke Shinagawa · Eiji Tsuzuki

Kanagawa University · Nanzan University

【要約】 本稿では、金融政策に政策ラグが存在するニューケインジアンモデルを展開し、政策ラグが定常状態の安定性（決定性）に与える影響について考察する。(a) 政策当局が名目利子率の操作において、インフレ率と産出の両方をターゲットとし、それぞれの反応に同じ長さのラグがある場合、ラグの増大は正の実部を持つ固有値を増加させる効果を持つ。この結果、ラグの増大が不決定性を解消し、定常状態の決定性をもたらすことが示される。しかし、過度なラグの増大は定常状態の不安定性をもたらす。(b) インフレ率と産出の両方をターゲットとし、一方にはラグがあるがもう一方にはラグがない場合には、ラグの増大が、正の実部を持つ固有値を増加させるケースと負の実部を持つ固有値を増加させるケースが存在する。このため、ラグの増大によって、一度決定性を失った定常状態が、さらなるラグの増大によって、再び決定性を取り戻す可能性がある。

【キーワード】 ニューケインジアンモデル 金融政策ルール 均衡の決定性 政策ラグ 遅延微分方程式

目 次

1. 序論
2. モデル
3. 政策ラグが存在しない場合
4. 政策ラグが存在する場合
5. 結論
- A. 補論

* 本稿は、日東学術振興財団助成（平成28年度～平成30年度）の下に行われた研究の成果の一部である。

† 神奈川大学経済学部 E-mail: shinagawa@kanagawa-u.ac.jp

‡ 南山大学経済学部 E-mail: tsuzuki@nanzan-u.ac.jp

1. 序論

本稿の目的は、政策ラグを導入したニューケインジアン（NK）モデルを用いて、金融政策ラグが経済の安定性に与える影響を分析することである。特に、政策ラグの増大が経済の安定性（均衡の決定性）に寄与する可能性があることを理論的に示すことにある。

政策ラグとは、政策の必要性が認識され、政策が決定され実行され効果を表すまでの時間的な遅れのことである。政策ラグは一般に、認知ラグ、決定ラグ、実施ラグ、波及ラグに分類される。本論では、内在的な遅れ（波及ラグ）ではなく、政策の必要性が生じてから実際にそれが実施されるまでにかかる時間的な遅れ（すなわち、認知、決定、および実施ラグ）を考察の対象とする。

マクロ経済学で用いられる理論モデルでは、各種の政策ラグの存在は捨象して議論が展開されることが多い。政策ラグの存在がモデルの性質に大きな影響を与えないのであればこうした単純化も正当化されるが、もし無視できない影響を持つのであれば、これまで発展してきたマクロ経済理論の妥当性に関わるものとなる。政策ラグの先駆的な研究としては、Friedman (1948) がある。Friedman (1948) は理論的に厳密な分析は行っていないが、ラグの存在が不安定性を高める可能性があることを指摘している。

理論モデルにおいてラグを表現する方法には、分布ラグと固定ラグという2種類の方法がある。例として、政策当局がある目標変数の変動に応じて政策変数を操作するような状況を考えてみよう。分布ラグの場合、政策当局は、目標変数の過去から現在までの加重平均値に反応して政策変数を操作する。たとえば、加重を表す分布関数がベキ関数である場合には、政策当局は目標変数の現在の値を最も重視し、過去にさかのぼるほどその重みは小さくなる。一方、固定ラグの場合、政策当局は過去のある一時点の目標変数の値に反応して、政策変数を操作する。これは、過去のある一時点で分布関数が垂直に立ったケースとして概念的には解釈することができる。しかし解析的にはそれを分布ラグの一特殊ケースとして扱うことはできない。なぜなら、分布ラグを含むモデルが常微分方程式体系として表されるのに対して、固定ラグを含むモデルは「遅延微分方程式体系（system of delay-differential equations）」として表されることになるからである。

Benhabib, Schmitt-Grohé, and Uribe (2003) は、無限の過去から現在までのインフレ率の加重平均値に名目利子率が反応すると想定した金融政策ルールを含むNKモデルを展開している。この政策ルールは、形式的には分布ラグを伴う金融政策を表している。しかし、解釈としては、これは政策実施の遅れというより、政策当局が意図的に過去のインフレ率を参照して名目利子率を操作している状況と理解するのが妥当であろう。政策実施に遅れがある状況を表現する方法としては、固定ラグの方が適切であると考えられる。

政策ラグを固定ラグとして表現したモデルは、Asada and Yoshida (2001) や De Cesare and Sportelli (2005)、Yoshida and Asada (2007) などによって提示されている¹。しかしこれらの研究では、ミクロ的基礎を持たない、すなわち経済主体の行動を動学的最適化の結果として明示的に説明しないモデルが用いられている。この種のモデルにおいて定常状態が「安定」であるとは、任意の初期状態から出発する解が定常状態に収束することである。つまり、正の実部を持つ固有値が存在しないことである。

一方、NKモデルのようなミクロ的基礎を持つモデルでは、安定性の基準として「均衡の決定性（determinacy of equilibrium）」が用いられる。動学的最適化問題における非先決変数（non-predetermined

1 これらの研究では、課税ラグや財政政策ラグが安定性に与える影響について考察が行われている。

variables) は、その初期値を経済主体が設定することができる。そのため、その選択が一意 (決定) であるためには、非先決変数の数に等しい数の正の実部を持つ固有値が必要となる。たとえば、非先決変数の数が2であるとすると、正の実部を持つ固有値が2つのとき、均衡は決定 (determinate) となる。正の実部を持つ固有値の数が2より小さければ、均衡は不決定 (indeterminate)、すなわち均衡経路は一意に決まらない。均衡の不決定性は、経済主体の期待の変化に起因する経済変動 (いわゆるサンスポット変動) が発生するための必要条件であるため、ミクロ的基礎を持つモデルではそれはある種の不安定性の要因とみなされる。このような安定性基準の下で、政策ラグの影響について議論した研究はまだ少ないが、Tsuzuki (2014, 2015, 2016) による NK モデルを用いた一連の研究を挙げる事ができる²。

Tsuzuki (2014, 2015) の研究は金融政策ラグと均衡の決定性に関するものであり、前者が money-in-the-utility function (MIUF)、後者が money-in-the-production function (MIPF) の設定の下で議論している³。前述した Benhabib, Schmitt-Grohé, and Uribe (2003) のモデルは MIPF の設定を採用しているため、Tsuzuki (2015) のモデルは Benhabib, Schmitt-Grohé, and Uribe (2003) のモデルの固定ラグ版とみなすことができる。

Tsuzuki (2014) は、政策ラグの増大には定常状態を不安定化させる効果があることを示している。この結果は Friedman (1948) の指摘と一致している。一方、Tsuzuki (2015) は、政策ラグが安定性 (決定性) に寄与する可能性があることを示している。これら2つの結論は相反するようにみえるが、ラグの増大は正の実部を持つ共役複素根の数を増加させる、という共通の数学的結果から導かれている。これらのモデルにおける非先決変数の数は2であるから、正の実部を持つ根の数が2であれば均衡は決定となる。MIPF モデルでは、ラグがない場合に正の実部を持つ根が存在しないケースが現れ得る。しかし、MIUF モデルではそのようなケースは現れ得ない (正の実根が少なくとも1つは存在する)。したがって、MIUF モデルではラグは不安定性をもたらすのみであるが、MIPF モデルではラグの増大によって不決定性が解消される可能性があるのである。

以上の議論では、ラグの数は1と想定されているが、複数のラグが存在する場合やパラメータがラグに依存する場合などの研究も、近年活発に行われている。これらの場合には、ラグの増大によって負の実部を持つ根の数が増加するケースが現れ得ることが知られている⁴。ところが、特性方程式がある「特殊な条件」を満たすときには、たとえラグの数が1であり、パラメータがラグ依存でなかったとしても、ラグの増大が安定性をもたらす (すなわち、負の実部を持つ根を増加させる) 可能性がある。このようなケースの存在を示した経済モデルとして、Matsumoto and Szidarovszky (2013b) の課税ラグを含む動学的 IS-LM モデルを挙げる事ができる。ただし、彼らのモデルはミクロ的基礎を持たないため、本論のような均衡の決定性・不決定性という基準を用いた安定性分析は行われていない。

本稿では、MIPF モデルを用いて、ラグが不決定性だけでなく、不安定性をも解消する可能性があることを示す。言い換えれば、MIPF モデルでは、ラグの増大が正の実部を持つ固有値を増加させる

2 ミクロ的基礎付けを持たないモデルではあるが、新古典派の枠組みに固定ラグを導入したモデルとして、Guerrini and Sodini (2013) の資本蓄積ラグを考慮したソローモデルがある。

3 Tsuzuki (2016) は財政政策ラグを含む MIUF モデルを展開している。

4 以下の数学的研究が挙げられる: 2つの固定ラグを含むケースについては Gu, Niculescu, and Chen (2005) と Lin and Wang (2012); 3つの固定ラグを含むケースについては Gu and Nagmaeian (2011); パラメータがラグ依存であるケースについては Beretta and Kuang (2002)。Tsuzuki, Shinagawa, and Inoue (2015), Tsuzuki and Shinagawa (2015), Tsuzuki, Kurokawa, and Shinagawa (2016) では、これらの数学的手法を NK モデルに適用し分析を行っている。

ケースだけでなく、負の実部を持つ固有値の数を増加させるケースも存在する、ということを示す。Tsunami (2015) では金融政策ルール目標変数としてインフレ率のみ（インフレターゲット）のケースが検討されているが、ここでは産出（産出ターゲット）をも考慮する。これにより、特性方程式に関する「特殊な条件」が満たされる可能性が生じる。具体的には、政策当局の認知に変数間で偏りがある（一方には遅れがあるが、他方にはない）と想定した場合に、ラグの増大によって負の実部を持つ根の数が増加するケースが現れるのである。

本論文の構成は以下の通りである。まず第2節ではモデルの構築、第3節と第4節でそれぞれ政策ラグがある場合とない場合の安定性分析を行う。最後に第5節で結論を述べる。

2. モデル

NKモデルは基本的に3つの構成要素から成る。オイラー方程式、ニューケインジアンフィリップス曲線（NKPC）、金融政策ルールである。本節では、まず経済主体の最適化行動からオイラー方程式とNKPCを導出し、続いて金融当局の政策ルールを定式化する。

Benhabib, Schmitt-Grohé, and Uribe (2003) に従い、経済を、金融当局と家計-企業ユニットの連続体から成る取引の場として表現する。

2.1 家計-企業ユニット

家計-企業ユニットは、区間 $[0, 1]$ に異質性をもって連続的に分布し、 $j \in [0, 1]$ によってインデックスされる。各家計-企業ユニットは、差別化された財 j の生産と最終財の消費を行う。また無限の将来にわたって存続可能であるとする。家計-企業ユニット j の通時的効用関数を次のように表す。

$$U_j(c_j, \pi_j) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[\log c_j(t) - \frac{\eta}{2} (\pi_j(t) - \pi^*)^2 \right] dt, \quad \rho > 0, \eta > 0 \quad (1)$$

ただし、 c_j は家計-企業ユニット j による最終財の消費量、 π_j は第 j 財の価格の変化率、 π^* はインフレ率の定常値、 ρ と η はそれぞれ主観的割引率と価格改定コストの規模を表すパラメータである。価格改定コストは価格交渉などによってもたらされる生産者の心理的負担などと理解される⁵。ここでは、価格の変化率 π_j が π^* から乖離した場合にのみコストが発生する、という定式化を行っているが、これは計算の簡単化のためであり、本論の結論には影響しない。また、Rotemberg (1982) などに倣い、関数を2次式に特定している。価格改定コストの存在のために価格は粘着的となる。よって η は価格粘着性の程度とみなすこともできる。

最終財は各家計-企業ユニットによって生産された差別化された財を組み立てることにより生産される。よって、差別化財は最終財生産のための中間財と解釈できる。さらにここでは、最終財の生産はその構成物である中間財のみを必要とし、本源的投入物は必要ないと仮定する。また、最終財の市場は完全競争であるとする。最終財の生産技術を次のようなCES関数によって表す。

$$y = \left[\int_0^1 y_j^\alpha dj \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

ここで y は最終財の生産量、 y_j は第 j 財の投入量である。差別化財の間の代替の弾力性は $\phi \equiv 1/(1-\alpha) >$

5 価格改定コストを財の負担を伴わない生産者の心理的負担として扱うこのような定式化は、以降の計算を大幅に簡単化する。同様の定式化は Benhabib, Schmitt-Grohé, and Uribe (2001, 2003) や Shinagawa and Inoue (2016) などでも採用されている。

1によって表される。最終財生産企業は、技術(2)の下で生産量 y を所与として総費用 $\int_0^1 p_j y_j dj$ を最小化するように第 j 財の需要量を決定する。ただし p_j は第 j 財の価格である。最適性条件から、第 j 財に対する需要関数

$$y_j = \left(\frac{p_j}{p} \right)^{-\phi} y \quad (3)$$

が得られる。ここで p は以下のように定義される物価の指標である。

$$p = \left[\int_0^1 p_j^{1-\phi} dj \right]^{\frac{1}{1-\phi}} \quad (4)$$

インフレ率は $\pi \equiv \dot{p}/p$ によって表される。

第 j 財の生産には実質貨幣残高 m_j が必要であるとする。第 j 財の生産技術を次のように表す。

$$y_j = (\zeta m_j)^\beta, \quad 0 < \beta < 1, \quad \zeta > 0 \quad (5)$$

貨幣が唯一の投入物であるという想定は分析の簡単化のためである。Benhabib, Schmitt-Grohé, and Uribe (2003) ではより一般的な、貨幣に加えて労働も必要とされるケースも検討されているが、基本的な結果は変わらない、ということが示されている。

家計-企業ユニット j は資産として貨幣のほかに名目債券 B_j を保有する。債券は名目利子率 R で収益を生む。 A_j を名目資産残高、 $M_j \equiv pm_j$ を名目貨幣残高とすると、 $A_j \equiv M_j + B_j$ が成り立つ。資産は所得と利子の受け取りによって増大し、消費によって減少するので、家計-企業ユニット j の瞬時的な予算制約式を次のように表すことができる。

$$\dot{A}_j = p_j y_j + RB_j - pc_j$$

実質単位で表すと次の式が得られる。

$$\dot{a}_j = \frac{p_j}{p} y_j + ra_j - c_j - Rm_j \quad (6)$$

ここで $a_j \equiv A_j/p$ は家計-企業ユニット j の実質資産残高、 $r \equiv R - \pi$ は実質利子率である。

需要関数(3)に直面した家計-企業ユニットは、(5)と(6)、価格の遷移式 $\dot{p}_j = \pi_j p_j$ を制約条件として、(1)を最大化するように c_j と π_j の経路を選択する。最適性条件から以下の2本の式が導出される(Appendix A.1を参照)。

$$\dot{c}_j = (r - \rho)c_j \quad (7)$$

$$\dot{\pi}_j = \rho(\pi_j - \pi^*) + \frac{\phi - 1}{\eta} \frac{p_j y_j}{pc_j} - \frac{\phi}{\beta \eta \zeta} \frac{y_j^{\frac{1}{\beta}}}{c_j} R \quad (8)$$

(7)は消費のオイラー方程式、(8)はNKPCである。なお経済学的に意味のある解は、横断性条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mu_1(t) a_j(t) = 0$ と $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mu_2(t) p_j(t) = 0$ も満たさなければならない。 μ_1 と μ_2 はそれぞれ最適化問題における a_j と p_j の共役変数である。

家計-企業ユニットの間の対称性より、すべての家計-企業ユニットが消費や資産構成、価格設定について同一の選択を行うような「対称均衡」が成立する。このとき、(2)と(4)より、すべての $j \in [0, 1]$ について $y = y_j$ 、 $p = p_j$ 、および $c = c_j$ が成り立つ。 $c \equiv \int_0^1 c_j dj$ は経済全体の消費である。したがって、(8)は次のように書き換えられる。

$$\dot{\pi} = \rho(\pi - \pi^*) + \frac{\phi - 1}{\eta} \frac{y}{c} - \frac{\phi}{\beta\eta\zeta} \frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{c} R \quad (9)$$

最後に、市場清算条件として財市場の均衡条件が次のように書ける⁶。

$$y = c \quad (10)$$

2.2 金融政策当局

金融政策当局はルールに従い、産出 y とインフレ率 π の変動に応じて名目利子率 R を操作するものとする。ここでは当局は y と π の安定化を目的とし、それらの定常値を目標値に設定していると仮定する。金融政策当局の政策ルールは次のように定式化される⁷。

$$R(t) = \bar{R} + D_1(y(t - \tau^1) - y^*) + D_2(\pi(t - \tau^2) - \pi^*) \quad (11)$$

ここで $\bar{R} > 0$ は目標達成時における名目利子率、 $D_1 \geq 0$ と $D_2 \geq 0$ はそれぞれ産出とインフレ率に対する名目利子率の反応度である。 $\tau^1 \geq 0$ 、 $\tau^2 \geq 0$ は政策ラグの大きさを表している。政策ラグがないときは $\tau^1 = \tau^2 = 0$ であり、 $\tau^i > 0, \exists i \in \{1, 2\}$ であれば政策ラグが存在することになる。 τ^1 が産出量を参照する際の政策ラグ、 τ^2 がインフレ率を参照する際の政策ラグである⁸。

2.3 遅延微分方程式系

経済の均衡動学は、オイラー方程式 (7)、NKPC(9)、最終財市場の清算条件 (10) および金融政策ルール (11) によって描写される。これらの式は、以下のような y と π を内生変数とする微分方程式系に集約することができる。

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= [\bar{R} + D_1(y(t - \tau^1) - y^*) + D_2(\pi(t - \tau^2) - \pi^*) - \pi - \rho]y(t) \\ \dot{\pi}(t) &= \rho(\pi(t) - \pi^*) + \frac{\phi - 1}{\eta} \\ &\quad - \frac{\phi}{\beta\eta\zeta} y(t)^{\frac{1-\beta}{\beta}} [\bar{R} + D_1(y(t - \tau^1) - y^*) + D_2(\pi(t - \tau^2) - \pi^*)] \end{aligned} \quad (12)$$

τ^1 、 τ^2 のうち、少なくとも1つが正の場合、名目利子率 $R(t)$ が過去の産出量 $y(t - \tau^1)$ やインフレ率 $\pi(t - \tau^2)$ に依存するため、これらの式は遅延微分方程式となる。

(12) の非自明な解（定常値）は次のように与えられる。

$$y^* = \left[\frac{(\phi - 1)\beta\zeta}{\phi\bar{R}} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}, \quad \pi^* = \bar{R} - \rho$$

これらの値は政策ラグの大きさに依存しない。

3. 政策ラグが存在しない場合

以下では、前節で提示したモデルの定常状態の局所的安定性について分析する。まず、政策ラグの

6 このモデルでは政府の存在を明示的に考慮していないため、債券 B は民間主体間の貸借とみなされなければならない。したがって、債券市場の均衡条件は $B = 0$ である。

7 本論では分析の簡単化のために、既存の研究に倣い、線形に特定化したルールを用いる。

8 ただし、本稿では、 τ^1 と τ^2 がともに正で異なる値をとるようなケースは扱わない。

安定性への影響を明確にするために、ラグの存在しないケース ($\tau^1 = \tau^2 = 0$) を分析する。定常状態の近傍で、 $\tau^1 = \tau^2 = 0$ とした体系 (12) を線形化する。

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{y}}(t) \\ \dot{\hat{\pi}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{J}_0 \begin{bmatrix} \hat{y}(t) \\ \hat{\pi}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{where} \quad \mathbf{J}_0 \equiv \begin{bmatrix} D_1 y^* & (D_2 - 1)y^* \\ -A_1 D_1 - A_2 & \rho - A_1 D_2 \end{bmatrix}$$

ただし、 $\hat{y}(t) \equiv y(t) - y^*$ 、 $\hat{\pi}(t) \equiv \pi(t) - \pi^*$ 、 $A_1 \equiv \frac{\phi}{\beta\eta\zeta} y^* \frac{1-\beta}{\beta} > 0$ 、 $A_2 \equiv \frac{\phi}{\beta\eta\zeta} \frac{1-\beta}{\beta} y^* \frac{1-2\beta}{\beta} \bar{R} > 0$ である。

体系 (12) の動学について分析するため \mathbf{J}_0 の特性根を求める。 y と π はともに非先決変数であるため、特性根が2つとも正の実部を持つとき、定常状態は局所的に決定となる。ヤコビ行列 \mathbf{J}_0 より、特性方程式が次のように得られる。

$$\Delta_0(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr} \mathbf{J}_0 \lambda + \det \mathbf{J}_0 = 0$$

ここで、

$$\text{tr} \mathbf{J}_0 = \rho + D_1 y^* - A_1 D_2$$

$$\det \mathbf{J}_0 = D_1(\rho - A_1)y^* + A_2 y^*(D_2 - 1)$$

である。正の実部を持つ特性根が2つ存在するための必要十分条件は、 $\det \mathbf{J}_0 > 0$ かつ $\text{tr} \mathbf{J}_0 > 0$ が成立することである。

3.1 インフレーターゲティングのみのケース

最も基本的な NK モデルで想定される金融政策当局のターゲットがインフレ率のみであるようなケースを検討する。この場合、 $D_1 = 0$ である。よって、均衡の決定性のための条件 $\det \mathbf{J}_0 > 0$ と $\text{tr} \mathbf{J}_0 > 0$ が満たされるのは、以下の条件が成り立つときである。

$$D_2 > 1 \tag{13}$$

$$D_2 < \frac{\rho}{A_1} \tag{14}$$

条件 (13) は、金融当局の政策態度が「アクティブ」、すなわち名目利子率をインフレ率の変動に対して1対1以上に反応させなければならない、ということを示している。この規範は「Taylor 原理」と呼ばれている。

すでに良く知られているように、基本的な MIUF モデルでは、金融当局の政策態度がアクティブであることが決定性のための十分条件となる。ところが MIPF モデルでは、アクティブな政策の下でさえ、あわせて条件 (14) が成り立たなければ、決定性は達成されない。このことは、主要な結論として強調されていないものの、Benhabib, Schmitt-Grohé, and Uribe (2003) のモデルからも導かれる結果である。彼らの研究の主眼は大域的動学の分析にあり、その主張はアクティブな政策の下で不決定な状態が決定な状態へと移行するとき、ホップ分岐の発生により定常点の回りに周期解が現れるということを示したことにある。彼らはさらに、周期解は現実妥当性を持つほぼすべてのパラメータ値の組に対して安定であるということも示している。このことは、均衡が局所的に決定であっても、大域的には不決定であるような状況が MIPF モデルでは起こり得る、ということを示している⁹。同

9 Carlstrom and Fuerst (2003) は、効用関数における消費と貨幣保有の交差弾力性が負であり、かつその絶対値がある程度大きい MIUF モデルは MIPF モデルと同等の性質を持つ、ということを示している。

様の主張は本稿のモデルからも導かれ得るが、本稿での我々の関心は系の局所的動学にあるため、その厳密な証明は別稿にゆずることとする。

3.2 インフレ・産出ターゲティングが行われるケース

インフレターゲティングと産出ターゲティングが同時に行われる場合、決定性のための必要条件 $\det J_0 > 0$ と $\text{tr } J_0 > 0$ が満たされるのは、以下の条件が成り立つときである。

$$D_2 > \bar{D}_2 \equiv 1 - \frac{D_1(\rho - A_1)}{A_2} \quad (15)$$

$$D_2 < \frac{\rho + D_1 y^*}{A_1} \quad (16)$$

$D_1 > 0$ のとき、条件 (16) は条件 (14) より満たされやすくなる。一方、条件 (15) は、条件 (13) と比較して、 $\rho > A_1$ ならば満たされやすくなるが、 $\rho < A_1$ ならば逆に満たされにくくなる¹⁰。

$\rho > A_1$ の場合、たとえ $D_2 \leq 1$ 、すなわち Taylor 原理が満たされていないとしても、 D_1 が十分に大きければ均衡は決定となる。これは、産出ターゲティングの有効性を示した Bullard and Mitra (2002) の結果と整合的である。 $\rho > A_1$ の場合、 π と y は比例的に変化するため、金融政策当局が π のみをターゲットとしている場合より名目利子率の反応は大きくなり、決定性のための必要条件も満たされやすくなるのである。 $A_1 \equiv (\phi - 1)/(\eta \bar{R})$ であるから、価格粘性性 η が大きいほど産出ターゲティングの有効性も高まるといえる。

4. 政策ラグが存在する場合

以上の分析結果を踏まえて、本節では政策ラグが均衡の決定性に与える影響を分析する。本稿では、以下の2つのケースについて分析を行う。

第1は、産出ターゲティングとインフレターゲティングにともに正の政策ラグが存在し、ラグの大きさが同じケースである ($\tau^1 = \tau^2 > 0$)。この場合、数学的には遅延微分方程式系に含まれるラグの数は1となる。第2は、インフレターゲティングには政策ラグが存在するが、産出ターゲティングには政策ラグが存在しないケースである ($\tau^2 > \tau^1 = 0$)。このケースも遅延微分方程式系に含まれるラグの数は1である。

インフレターゲティングと産出ターゲティングの両方に各々異なった大きさのラグを仮定した場合には、体系は「2つの遅れを持つ微分方程式系 (system of two-delay differential equations)」となる。この場合、分析には本稿とは異なる、比較的新しいアプローチ [Gu, Niculescu, and Chen (2005); Lin and Wang (2012); Matsumoto and Szidarovszky (2012) など] を用いなければならない。また、その複雑さから解析的な分析はほぼ不可能となり、数値シミュレーションに頼らなければならなくなる¹¹。本論では解析の結果の導出を重視するとともに、たとえラグの数が1であったとしてもラグの

多くの MIUF モデルで仮定されるように、もし効用関数が加法的に分離可能であるならば、交差弾力性はゼロである。このとき、NKPC は $R(t)$ から独立になる (Tsuzuki, 2014, 2015 参照)。これは本稿のモデルにおける $A_1 \rightarrow 0$ のケースに相当する。この場合、条件 (14) は常に満たされるため、Taylor 原理が決定性のための唯一の十分条件となる。

10 効用関数が加法的に分離可能であるような MIUF モデル ($A_1 \rightarrow 0$ のケースに相当) では、条件 (16) はインフレターゲティングのみのケースと比べて満たされやすくなる。

11 Tsuzuki, Shinagawa, and Inoue (2015) では、本稿同様 NK モデルをベースとして、金融政策と財政政策のそれぞれにラグが存在する「ラグが2つ」のケースについて、Tsuzuki, Kurokawa, and Shinagawa

増大が安定化効果を持ち得る、ということを示すために、ラグが1つのケースに限定し、分析を行う。定常状態の局所的決定性について分析するため、(12)を (y^*, π^*) の近傍で線形化する。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}(t) &= [D_1\hat{y}(t - \tau^1) + D_2\hat{\pi}(t - \tau^2) - \hat{\pi}(t)]y^* \\ \dot{\hat{\pi}}(t) &= \rho\hat{\pi}(t) - A_1D_1\hat{y}(t - \tau^1) - A_1D_2\hat{\pi}(t - \tau^2) - A_2\hat{y}(t)\end{aligned}$$

さらに、この系の解として指数関数 $\hat{y}(t) = C_y e^{\lambda t}$ と $\hat{\pi}(t) = C_\pi e^{\lambda t}$ （ここで C_y と C_π は任意定数、 λ は固有値）を仮定し、代入して整理すると、次の式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{y}}(t) \\ \dot{\hat{\pi}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \hat{y}(t) \\ \hat{\pi}(t) \end{bmatrix}$$

ここで \mathbf{J} は次のように表されるヤコビ行列である。

$$\mathbf{J} \equiv \begin{bmatrix} D_1 y^* e^{-\lambda \tau^1} & (D_2 e^{-\lambda \tau^2} - 1) y^* \\ -A_1 D_1 e^{-\lambda \tau^1} - A_2 & \rho - A_1 D_2 e^{-\lambda \tau^2} \end{bmatrix}$$

(12)の特性方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &\equiv \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}) \\ &= \lambda^2 - \rho\lambda - A_2 y^* + D_1 y^* (-\lambda + \rho - A_1) e^{-\lambda \tau^1} + D_2 (A_1 \lambda + A_2 y^*) e^{-\lambda \tau^2} = 0\end{aligned}\quad (17)$$

\mathbf{I} は単位行列である。

(17)は、 λ の指数関数を含む2次方程式である。上記の通り、本稿では、 $\tau^1 = \tau^2 > 0$ のケースと、 $\tau^2 > \tau^1 = 0$ のケースについて分析する。いずれも数学的にはラグの数は1である。Matsumoto and Szidarovszky (2013a)は、ラグの数が1であり、かつ特性方程式が λ の指数関数と1次関数によって構成される場合には、ラグの増大は必ず正の実部を持つ虚根の数を増加させる、ということを一般的なフレームワークの下で証明している。本稿では、特性方程式が(17)のように指数関数と非線形関数(2次関数)によって構成される場合には、たとえラグの数が1であったとしても、ラグの増大が安定化をもたらす(負の実部を持つ根の数を増加させる)可能性がある、ということを示す。

y と π は、家計-企業ユニットの選択によって初期条件が決定される非先決変数である。ただし、遅延微分方程式系では、ラグを伴う変数はその初期条件として時点 $t=0$ だけでなく $t-\tau \leq t < 0$ における値も与えられなければ、体系は作動しない。しかしながら、 y と π の過去の値は、時点0では所与である。つまり、時点0で家計-企業ユニットが選択可能であるのは $y(0)$ と $\pi(0)$ のみである。したがって、政策ラグの存在しない標準的なモデルと同様に、本稿のモデルでも、(17)が正の実部を持つ特性根を2つ持つ場合にのみ、定常状態は安定(均衡は局所的に決定)となる。

4.1 インフレ・産出ターゲティングの双方に遅れが存在するケース

本小節ではインフレターゲティングと産出ターゲティングの両方に、同じ大きさのラグが存在するケースについて分析する¹²。特に、政策ラグの存在によって、不決定性が解消され、定常状態の決定

(2016)では、金融政策の3つの目標変数(インフレ率、産出、資産価格)を想定し、それぞれにラグが存在する「ラグが3つ」のケースについて、数値シミュレーションを用いて分析を行っている。

12 政策の遅れが、決定ラグや実施ラグによって生じている場合、各目標変数に付随するラグの大きさは同じ大きさになると考えられる。

性がもたらされるケースが存在することを示したい。

(17) に $\tau^1 = \tau^2 = \tau > 0$ を代入すると、このケースの特性方程式が得られる。

$$\Delta_1(\lambda) = \lambda^2 - \rho\lambda - A_2y^* + D_1y^*(-\lambda + \rho - A_1)e^{-\lambda\tau} + D_2(A_1\lambda + A_2y^*)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (18)$$

この特性方程式は $e^{-\lambda\tau}$ を含むため無限の個数の解を持つ。定常状態の決定性が変化する（すなわち、根が複素平面の虚軸を横切る）のは τ を変化させていったとき $\lambda = 0$ あるいは $\lambda = \pm i\omega$ ($\omega > 0$ は正の実数、 i は虚数単位) が現れたときである¹³。

実根の符号の変化 τ の変化により特性根が $\lambda = 0$ を通過するとき、正の実根の数が変化する。しかし、 $D_2 \neq \bar{D}_2 \equiv 1 - \frac{D_1(\rho - A_1)}{A_2}$ のとき、 $\Delta_1(0) = \{A_2(D_2 - 1) + D_1(\rho - A_1)\}y^* \neq 0$ であり、 $\lambda = 0$ は根とはなり得ない。つまり、ラグの増大により正の実根の数は変化しない。 $D_2 = \bar{D}_2$ のときは、特性根に $\lambda = 0$ が含まれるが、これは τ の値に依存しないため、やはり正の実根の数が変化することはない。

このため、正の実根が1つだけ存在し、定常状態が局所的に不決定となっている状態から、ラグの変化によって定常状態の決定性がもたらされることはあり得ない。ラグが存在しない場合、正の実根が1つだけ存在するのは、 $\det \mathbf{J}_0 < 0 \iff D_2 < \bar{D}_2$ が満たされるケースである。以下では、このケースを除外して議論をすすめる。

仮定 1 $D_2 > \bar{D}_2 \equiv 1 - \frac{D_1(\rho - A_1)}{A_2}$

仮定 1 は、十分にアクティブなインフラターゲットイング政策が採られていることを意味している。

虚根の実部の符号の変化 τ の変化に伴って特性根が純虚数 $\lambda = \pm i\omega$ を通過するとき、正の実部を持つ虚根の数が変化する。 $\lambda = \pm i\omega$ を (18) に代入すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta_1(\pm i\omega) &= -\omega^2 \mp i\rho\omega - A_2y^* + [\pm i(A_1D_2 - D_1y^*)\omega + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*]e^{\mp i\tau\omega} \\ &= -\omega^2 - A_2y^* + (A_1D_2 - D_1y^*)\omega \sin \tau\omega + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^* \cos \tau\omega \\ &\quad + i[\mp \rho\omega \pm (A_1D_2 - D_1y^*)\omega \cos \tau\omega \mp \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^* \sin \tau\omega] = 0 \end{aligned}$$

第 2 辺から第 3 辺への書き換えには、オイラーの公式 ($\forall x \in \mathbb{R}, e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$) を用いている。この式の実部と虚部について次の 2 本の式が得られる。

$$\omega^2 + A_2y^* = (A_1D_2 - D_1y^*)\omega \sin \tau\omega + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^* \cos \tau\omega \quad (19)$$

$$-\rho\omega = \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^* \sin \tau\omega - (A_1D_2 - D_1y^*)\omega \cos \tau\omega \quad (20)$$

(19) と (20) を $\cos \tau\omega$ と $\sin \tau\omega$ を未知変数とする連立方程式とみなし、 $\cos \tau\omega$ について解くと、

$$\cos \tau\omega = \frac{(A_1D_2\rho + A_2D_2y^* - A_1D_1y^*)\omega^2 + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}A_2y^{*2}}{(A_1D_2 - D_1y^*)^2\omega^2 + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}^2y^{*2}} \quad (21)$$

を得る。ここで、 $2\pi h < \tau\omega < 2\pi(1+h)$ 、 $\pi = 3.14159 \dots$ 、 $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ である。

さらに、(19) と (20) の 2 乗の和から、次のような ω の 4 次方程式が得られる。

13 Cooke and Grossman (1982) などを参照。

$$\omega^4 + \gamma_1 \omega^2 + \gamma_2 = 0 \quad (22)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\equiv \rho^2 - (A_1 D_2 - D_1 y^*)^2 + 2A_2 y^* \\ \gamma_2 &\equiv [A_2^2 - \{A_2 D_2 + D_1(\rho - A_1)\}^2] y^{*2} \end{aligned}$$

である。 ω について解くと、次の解を得る。

$$\omega_+ = \sqrt{\Omega_+}, \quad \omega_{+2} = -\sqrt{\Omega_+}, \quad \omega_- = \sqrt{\Omega_-}, \quad \omega_{-2} = -\sqrt{\Omega_-} \quad (23)$$

ただし、

$$\Omega_+ \equiv \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}}{2}, \quad \Omega_- \equiv \frac{-\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}}{2}$$

である。ただし、この分析で意味を持つのは ω が正の実数であるときだけである。 ω_{+2} と ω_{-2} は正の実数とはなり得ない。さらに、仮定 1 の下では、 $\gamma_2 < 0$ が成り立つ。したがって、 $\Omega_+ > 0$ 、 $\Omega_- < 0$ である。よって、 ω_- は実数とはなり得ず、(23) の中で ω_+ のみが正の実数となる。

ω_+ を (21) に代入し τ について解くと、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \tau_h &\equiv \frac{1}{\omega_+} \cos^{-1} \left[\frac{(A_1 D_2 \rho + A_2 D_2 y^* - A_1 D_1 y^*) \omega^2 + \{A_2 D_2 + D_1(\rho - A_1)\} A_2 y^{*2}}{(A_1 D_2 - D_1 y^*)^2 \omega^2 + \{A_2 D_2 + D_1(\rho - A_1)\}^2 y^{*2}} \right] \\ &\quad + \frac{2\pi h}{\omega_+}, \quad h = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

τ が τ_h 、 $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ を通過するたびに共役複素根の実部の符号が変化する。このような点は stability crossing point と呼ばれる。

stability crossing point における符号の変化の方向を調べる。もし $\frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega_+} > 0$ ならば、 τ の増大によって複素根の実部は負から正へと変化する。逆に $\frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega_+} < 0$ ならば、それは正から負へと変化する。前者は定常状態の不安定化、後者は安定化と言い換えることもできる。

(18) より次の補題を証明することができる。

補題 1 $\tau^1 = \tau^2 = \tau > 0$ のとき、任意の $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega_+} > 0$ が成り立つ。

証明. 補論 A.2 を参照。

補題 1 により、すべての stability crossing point において虚根の実部は負から正へと変化する。虚根は常に共役であるから、 τ が τ_h 、 $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ を通過する毎に、正の実部を持つ根が 2 個ずつ増加する。

仮定 1 の下で、 $\operatorname{tr} J_0 < 0 \iff D_2 > \frac{\rho + D_1 y^*}{A_1}$ が満たされるとき、 $\tau = 0$ の近傍には正の実部を持つ根は存在しない¹⁴。このため、定常状態は局所的に不決定である。以下では、この不決定性がラグの存在により解消され得ることを示したい。そこで次の仮定を課す。

仮定 2 $D_2 > \frac{\rho + D_1 y^*}{A_1}$

14 ここでの議論は、Matsumoto and Szidarovszky (2013a) Section 2 のそれに基づいている。

τ を増加させていって、 τ_h が現れるたびに、正の実部を持つ根が2個ずつ増えていくので、仮定2の下では、領域 $\tau \in (\tau_{h-1}, \tau_h)$ 、 $h = 1, 2, 3, \dots$ には $2h$ 個の正の実部を持つ根が存在することになる。特に、 $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ については、正の実部を持つ根が2つ存在するので、定常状態は局所的に決定となる。 $\tau > \tau_1$ については、正の実部を持つ根が少なくとも4つ以上存在することになるので、定常状態は不安定となる。以上の結果は、以下の命題にまとめることができる。

命題1 仮定1と仮定2の下で、 $\tau^1 = \tau^2 = \tau > 0$ のとき、 $0 < \tau < \tau_0$ について定常状態は局所的に不決定、 $\tau_0 < \tau < \tau_1$ について決定、 $\tau > \tau_1$ について不安定である。

ラグが存在しないケースにおいて、MIPFモデルの場合は、インフレーターゲティングが十分アクティブに行われている[(15)が満たされている]場合であっても、(16)が満たされない場合、定常状態の局所的決定性が得られない。補題1は、このようなケースにおいて、政策ラグの存在により、定常状態が局所的に決定となることがあるということを示している。ただし、ラグが小さい場合は、不決定性は解消され得ない。また、ラグが大きすぎる場合は、定常状態は不安定となってしまう。

本小節の議論は、 $D_1 = 0$ としても成立する¹⁵。このケースは、金融政策当局がインフレ率のみを目標として金融政策を行うケースにあたる。このケースはTsuzuki (2015)によって検討されており、命題1の結果はTsuzuki (2015)の結果と整合的である。したがって、インフレーターゲティングと産出ターゲティングの間でラグの大きさが同じであれば、政策ラグが安定性に与える影響は、産出ターゲティングによって質的な影響を受けないと言える¹⁶。

4.2 インフレ・産出ターゲティングにおいて片方にのみ遅れが存在するケース

本小節では、インフレーターゲティングと産出ターゲティングの両方が実施されるが、いずれか一方にのみラグがある状況を検討する。ここでは、インフレーターゲティングのみに反応ラグが存在することを仮定する¹⁷。このように、金融政策当局の認知に変数間で偏りがある場合に、政策ラグが均衡の決定性に与える効果にどのような影響があるかについて考える。

(17)に $\tau^2 = \tau > 0$ 、 $\tau^1 = 0$ を代入すると、次のように特性方程式が得られる。

$$\Delta_2(\lambda) = \lambda^2 - (\rho + D_1 y^*)\lambda + \{D_1(\rho - A_1) - A_2\}y^* + D_2(A_1\lambda + A_2 y^*)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (24)$$

この方程式は $e^{-\lambda\tau}$ を含むため、やはり無限個の解を持つ。前小節と同様に、根が0または純虚数($i\omega$ 、 $\omega > 0$ は正の実数)となる条件について見ていく。

実根の符号の変化 $D \neq \bar{D}_2$ のとき $\Delta_2(0) = \{A_2(D_2 - 1) + D_1(\rho - A_1)\}y^* \neq 0$ であり、 $\lambda = 0$ は根とはなり得ない。また $D_2 = \bar{D}_2$ のときは、 $\lambda = 0$ が根となるが、これは τ に依存しないため、正の実根の数が変化することはない。よって、この分析でも、正の実根が既に1つある状態から、ラグの変化によって定常状態が決定になることはあり得ない。このため、ここでも仮定1の下で議論をすすめる。

15 $D_1 = 0$ のとき、命題1の条件は、 $D_2 > \max\{1, \rho/A_1\}$ となる。

16 インフレーターゲティングが行われず、産出ターゲティングのみが行われる場合($D_1 > 0, D_2 = 0$)は命題1の条件が満たされることはないため、同様の議論を展開することはできない。

17 目標変数の間におけるラグの大きさの違いは、認知ラグによって生じていると考えられる。本稿では、産出ターゲティングのラグよりもインフレーターゲティングのラグの方が大きいケースを扱う。逆のケースは解析的な分析が複雑になるため今後の課題としたい。

虚根の実部の符号の変化 $\lambda = \pm i\omega$ を (17) に代入し、オイラーの公式を用いると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\Delta_2(\pm i\omega) &= -\omega^2 \mp (\rho + D_1 y^*)i\omega + \{D_1(\rho - A_1) - A_2\}y^* + D_2(\pm iA_1\omega + A_2 y^*)e^{\mp i\tau\omega} \\ &= -\omega^2 + \{D_1(\rho - A_1) - A_2\}y^* + A_1 D_2 \omega \sin \tau\omega + A_2 D_2 y^* \cos \tau\omega \\ &\quad + i[\mp(\rho + D_1 y^*)\omega \pm A_1 D_2 \omega \cos \tau\omega \mp A_2 D_2 y^* \sin \tau\omega] = 0\end{aligned}$$

この式の実部と虚部について次の 2 本の式を得る。

$$\omega^2 - \{D_1(\rho - A_1) - A_2\}y^* = A_1 D_2 \omega \sin \tau\omega + A_2 D_2 y^* \cos \tau\omega \quad (25)$$

$$-(\rho + D_1 y^*)\omega = A_2 D_2 y^* \sin \tau\omega - A_1 D_2 \omega \cos \tau\omega \quad (26)$$

(25) と (26) を $\cos \tau\omega$ と $\sin \tau\omega$ を未知変数とする連立方程式とみなし、 $\cos \tau\omega$ について解くと、

$$\cos \tau\omega = \frac{\{A_1(\rho + D_1 y^*) + A_2 y^*\}\omega^2 - \{D_1(\rho - A_1) - A_2\}A_2 y^{*2}}{A_1^2 D_2 \omega^2 + A_2^2 D_2 y^{*2}} \quad (27)$$

を得る。ここで、 $2\pi h < \tau\omega < 2\pi(1+h)$ 、 $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ である。

(25) と (26) の 2 乗の和から次のような ω の 4 次方程式が得られる。

$$\omega^4 + \tilde{\gamma}_1 \omega^2 + \tilde{\gamma}_2 = 0 \quad (28)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1 &\equiv -[2\{D_1(\rho - A_1) - A_2\}y^* + (A_1 D_2)^2 - (\rho + D_1 y^*)^2] \\ \tilde{\gamma}_2 &\equiv [\{D_1(\rho - A_1) - A_2\}^2 - (A_2 D_2)^2]y^{*2}\end{aligned}$$

である。 ω について解くと、次の解を得る。

$$\tilde{\omega}_+ = \sqrt{\tilde{\Omega}_+}, \quad \tilde{\omega}_{+2} = -\sqrt{\tilde{\Omega}_+}, \quad \tilde{\omega}_- = \sqrt{\tilde{\Omega}_+}, \quad \tilde{\omega}_{-2} = -\sqrt{\tilde{\Omega}_+} \quad (29)$$

ここで

$$\tilde{\Omega}_+ = \frac{-\tilde{\gamma}_1 + \sqrt{\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2}}{2}, \quad \tilde{\Omega}_- = \frac{-\tilde{\gamma}_1 - \sqrt{\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2}}{2}$$

である。ただし、本稿の分析で意味を持つのは ω が正の実数であるときだけである。 $\tilde{\omega}_{+2}$ と $\tilde{\omega}_{-2}$ はこの条件を満たさない。

(28) の定数項である $\tilde{\gamma}_2$ が非正であれば、 $\tilde{\Omega}_- \leq 0$ かつ $\tilde{\Omega}_+ > 0$ であり、 $\tilde{\omega}_+$ のみが唯一の正の実数解となる。仮定 1 ($D_2 > \bar{D}_2$) の下で、この条件は次のように書ける¹⁸。

$$\tilde{\gamma}_2 \leq 0 \iff D_2 \geq \frac{D_1(\rho - A_1)}{A_2} - 1 = -\bar{D}_2$$

一方、 $D_2 < -\bar{D}_2$ のケースでは、(重根を除き) 正の実数解が一意に存在することはない¹⁹。 $\tilde{\gamma}_1 < 0$

18 $\bar{D}_2 > 0$ であればこの条件は任意の $D_2 \geq 0$ について満たされる。この条件が必要となるのは $\bar{D}_2 < 0$ のときである。このとき、仮定 1 は自動的に満たされる。

19 この不等式が成り立つためには、 $\rho > A_1$ でなければならない。これは、ラグがない場合に産出ターゲットが有効になるケースである (3.2 節)。

かつ $\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2 > 0$ が成立するとき、 $\tilde{\Omega}_+$ と $\tilde{\Omega}_-$ がともに正となるため、 $\tilde{\omega}_+$ と $\tilde{\omega}_-$ がともに正の実数となる。 $\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2 < 0$ のときは、 $\tilde{\Omega}_+$ と $\tilde{\Omega}_-$ が虚数となるため、(29) は実数解を持たない。 $\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2 > 0$ かつ $\tilde{\gamma}_1 > 0$ のときは、 $\tilde{\Omega}_+$ と $\tilde{\Omega}_-$ はともに負になるため、やはり実数解は得られない。

$\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2$ を書き換えると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2 &= 4\{D_1(\rho - A_1) - A_2\}y^*\{(A_1D_2)^2 - (\rho + D_1y^*)^2\} \\ &\quad + \{(A_1D_2)^2 - (\rho + D_1y^*)^2\}^2 + 4(A_2D_2y^*)^2 \end{aligned}$$

よって、 $D_2 < -\bar{D}_2$ と仮定 2 が満たされていれば、 $\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2 > 0$ が成立する。同様に、 $D_2 < -\bar{D}_2$ と仮定 2 が満たされていれば、 $\tilde{\gamma}_1 < 0$ も成立する。つまり、 $D_2 < -\bar{D}_2$ と仮定 2 が同時に満たされてることが、方程式 (29) が正の実数解を複数持つ十分条件となる²⁰。以下、仮定 1 と仮定 2 を前提として議論をすすめる。

実数かつ正の $\tilde{\omega}_+$ を (27) に代入すると、次のように stability crossing point が求められる。

$$\tau_h^+ \equiv \frac{1}{\tilde{\omega}_+} \cos^{-1} \left[\frac{\{A_1(\rho + D_1y^*) + A_2y^*\}\tilde{\omega}_+^2 - \{D_1(\rho - A_1) - A_2\}A_2y^{*2}}{A_1^2D_2\tilde{\omega}_+^2 + A_2^2D_2y^{*2}} \right] + \frac{2\pi h}{\tilde{\omega}_+} \quad (30)$$

さらに、 $D_2 < -\bar{D}_2$ のとき、 $\tilde{\omega}_-$ も正の実数となるので、これに対応する stability crossing point が次のように定義できる。

$$\tau_h^- \equiv \frac{1}{\tilde{\omega}_-} \cos^{-1} \left[\frac{\{A_1(\rho + D_1y^*) + A_2y^*\}\tilde{\omega}_-^2 - \{D_1(\rho - A_1) - A_2\}A_2y^{*2}}{A_1^2D_2\tilde{\omega}_-^2 + A_2^2D_2y^{*2}} \right] + \frac{2\pi h}{\tilde{\omega}_-} \quad (31)$$

ただし、 $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ である。

τ が τ_h^+ や τ_h^- を通過するとき、複素根の実部の符号が変化する。変化の方向は、4.1 節と同様の方法によって示すことができる。すなわち、もし $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d\tau} \right|_{\lambda=i\tilde{\omega}_\pm} > 0$ ならば、 τ の増大によって複素根の実部は負から正へと変化する（不安定化）。逆にもし $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d\tau} \right|_{\lambda=i\tilde{\omega}_\pm} < 0$ ならば、それは正から負へと変化する（安定化）。

(24) より次の補題を証明することができる。

補題 2 $\tau^2 = \tau > 0$ 、 $\tau^1 = 0$ のとき、任意の $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d\tau} \right|_{\lambda=i\tilde{\omega}_+} > 0$ および $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d\tau} \right|_{\lambda=i\tilde{\omega}_-} < 0$ が成り立つ。

証明. 補論 A.3 を参照。

補題 2 により、 τ が τ_h^+ を横切るとき 1 組の共役複素根の実部が負から正へと転じ、不安定化が生じる。一方、 τ が τ_h^- を横切るとき、1 組の共役複素根の実部が正から負へと転じ、定常状態の安定化が生じる。

$D_2 > -\bar{D}_2$ のとき、stability crossing point は τ_h^+ のみであるから τ の増加により、必ず不安定化が生じる。よって、前小節の議論と同じ議論が成立し、次のような命題を得ることができる。

命題 2 仮定 1、仮定 2 の下で、パラメータの組が $D_2 > -\bar{D}_2$ を満たすとする。 $\tau^2 = \tau > 0$ 、 $\tau^1 = 0$ のとき、 $0 < \tau < \tau_0^+$ について定常状態は局所的に不決定、 $\tau_0^+ < \tau < \tau_1^+$ について決定、 $\tau > \tau_1^+$ に

²⁰ 効用関数において消費と貨幣が加法的に分離可能であるような標準的な MIUF モデル ($A_1 \rightarrow 0$ のケースに相当) ではこのケースは現れない。

ついて不安定である。

一方、 $D_2 < -\bar{D}_2$ のとき、不安定化の生じる stability crossing point と安定化が生じる stability crossing point が併存する。(30) および (31) より、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_h^\pm}{d\tilde{\omega}_\pm} &= \frac{-1}{\tilde{\omega}_\pm^2} \cos^{-1} \left[\frac{\{A_1(\rho + D_1 y^*) + A_2 y^*\} \tilde{\omega}_\pm^2 - \{D_1(\rho - A_1) - A_2\} A_2 y^{*2}}{A_1^2 D_2 \tilde{\omega}_\pm^2 + A_2^2 D_2 y^{*2}} \right] \\ &+ \frac{1}{\tilde{\omega}_\pm} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\{A_1(\rho + D_1 y^*) + A_2 y^*\} \tilde{\omega}_\pm^2 - \{D_1(\rho - A_1) - A_2\} A_2 y^{*2}}{A_1^2 D_2 \tilde{\omega}_\pm^2 + A_2^2 D_2 y^{*2}} \right)^2}} \\ &\times \frac{2\{A_1(\rho + D_1 y^*) + A_2 y^*\} A_2 D_2 y^{*2} \tilde{\omega}_\pm^2 + 2A_1^2 D_2 \{D_1(\rho - A_1) - A_2\} A_2 y^{*2} \tilde{\omega}_\pm}{(A_1^2 D_2 \tilde{\omega}_\pm^2 + A_2^2 D_2 y^{*2})^2} \\ &+ \frac{-2\pi h}{\tilde{\omega}_\pm^2} \end{aligned}$$

これより、 $D_2 < -\bar{D}_2$ のとき、 $\frac{d\tau_h^\pm}{d\tilde{\omega}_\pm} < 0$ が成立することがわかる。 $\tilde{\omega}_+ > \tilde{\omega}_-$ であるから、 $\tau_h^+ < \tau_h^-$ 、 $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ が成り立つ。よって、 τ を 0 から増加させたとき、最初に現れる stability crossing point は τ_0^+ である。仮定 2 の下では、 $\tau = 0$ の近傍で定常状態は不決定なので、 τ の増加により、定常状態は必ず一度、局所的に決定となる。

しかし、その次に現れる stability crossing point は、 τ_0^- と τ_1^+ のいずれの場合もあり得る。 $\tilde{\omega}_+ > \tilde{\omega}_-$ なので、(30) と (31) が示すように、 h の増大に対しては、 τ_h^+ の方が τ_h^- よりその増加分は小さい。したがって、 τ_h^+ と τ_h^- が交互に現れずと安定と不安定を繰り返すわけではなく、 τ_h^+ の方が頻繁に現れる。つまり不安定化の方が頻繁に生じる。言い換えると、 τ の増大に伴い、平均的に正の実部を持つ根の数が増えていくのである。 τ が小さい領域において起こり得る代表的な 3 つのパターンを図 1 に示す。

最上段に示された $\tau_0^- < \tau_1^+$ のケースでは、 τ の増大によって、不安定化—安定化—不安定化—

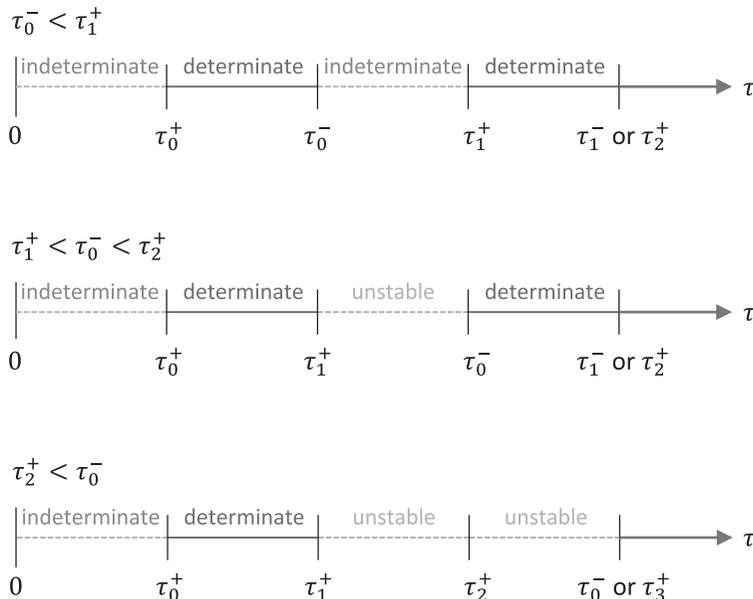


図 1: τ が小さい領域において起こり得る安定性の変化

が順に生じる。このため、 $\tau = 0$ の近傍で不決定であった定常状態の決定性が、決定—不決定—決定—と変化する。決定領域は2つに分断されて存在する。ただし、さらに右方にも決定領域が存在する可能性はある。

中段に示された $\tau_1^+ < \tau_0^- < \tau_2^+$ のケースでは、 τ の増大に伴って、不安定化—不安定化—安定化—が順に生じる。このため、不決定—決定—不安定—決定と定常状態の決定性が変化する。このケースでも、決定領域が2箇所存在するが、決定領域に挟まれた領域の動学的性質については異なっている。すなわち、上段のケースでは不決定であるが、中段のケースでは不安定である。最下段に示された $\tau_0^- > \tau_2^+$ のケースは、命題1や命題2と同様のケースである。すなわち、ラグの増大により、一度得られた決定性（安定性）が失われ不安定化した後に、再び安定化することはない。

以上の結果は、次のような命題としてまとめられる。

命題3 パラメータの組が仮定1、仮定2、 $D_2 < -\bar{D}_2$ を満たすとする。 $\tau^2 = \tau > 0$ 、 $\tau^1 = 0$ のとき、 $\tau_0^- < \tau_2^+$ が成り立つならば、均衡が決定となる τ の領域が複数存在する。

インフレーターゲティングのみのケース ($D_1 = 0$) では、 $D_2 < -\bar{D}_2$ という命題の条件が満たされることはないため、命題3で主張されているような、決定性を失った定常状態がラグの増大によって決定性を取り戻すといった事象は生じ得ない。命題3は、目標変数の間で政策ラグの大きさに偏りがある場合、新たなターゲットを導入することで、政策ラグが定常状態に与える影響が質的に変化し得るということを示している。特に、たとえラグの数が1であったとしても、ラグのある目標変数に加えて、ラグを伴わない目標変数がある場合には、ラグの増大による安定化が生じ得る、ということが示された。

5. 結論

本稿では、金融政策ラグを考慮したMIPFモデルを展開し、金融政策ラグが定常状態の決定性（安定性）に与える影響について考察した。特に、政策ラグが存在しなければ均衡が不決定であるような状況をまず想定し、そこにラグを導入した場合、安定性がどう変化するかをみた。

本論では、金融政策当局の目標変数として、最も標準的と思われる産出とインフレ率を採用した。産出とインフレ率の変動に対する政策当局の反応に同じ大きさのラグを仮定した場合、政策ラグの増大により、均衡の決定性が、不決定—決定—不安定と変化する。つまり、政策ラグが存在しない場合に不決定であった均衡が、適度な大きさの政策ラグの存在により決定となり得ることが示された。これは、ラグの増大には正の実部を持つ固有値の数を増加させる効果がある、ということの不決定性の解消に利用したものとして理解される。

本研究ではさらに、2つの目標変数のいずれか一方にラグが存在する場合を検討した。その結果、ラグの増大によって、一度決定性を失った均衡が、さらにラグを増大させていくことで再び決定性を取り戻すといった、政策ラグと決定性の間に複雑な関係が得られることが示された。このことは、ラグの増大によって正の実部を持つ固有値の数が増加するだけでなく、逆に負の実部を持つ固有値の数が増加することもあり得るということを意味している。つまり、数学的な意味での不安定化だけでなく、安定化も起こり得るのである。このことは、経済学的には、不決定性だけでなく、不安定性をも政策ラグによって解消できる可能性がある、ということを示唆している。

本論では考察の対象をラグの数が1であるケースに限定したが、インフレーターゲティングと産出ターゲットでラグの長さが異なるケースについて分析することはより現実的かつ自然である。この場

合、ラグの数は2となり、動学体系は「2つの遅れを持つ微分方程式系」として表されることになる。このようなケースの分析はまだ十分に行われておらず、今後の研究課題としたい。

A. 補論

A.1 家計-企業ユニットの動学的最適化

ハミルトン関数を次のように設定することができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(c_j, \pi_j, a_j, p_j, \mu_1, \mu_2) &\equiv \log c_j - \frac{\eta}{2}(\pi_j - \pi^*) + \mu_1 \left[\frac{p_j}{p} y_j + r a_j - c_j - R m_j \right] + \mu_2 \pi_j p_j \\ &= \log c_j - \frac{\eta}{2}(\pi_j - \pi^*) \\ &\quad + \mu_1 \left[\frac{p_j}{p} \left(\frac{p_j}{p} \right)^{-\phi} y + r a_j - c_j - \frac{R}{\zeta} \left\{ \left(\frac{p_j}{p} \right)^{-\phi} y \right\}^{\frac{1}{\beta}} \right] + \mu_2 \pi_j p_j\end{aligned}$$

ここで μ_1 と μ_2 はそれぞれ状態変数 a_j と p_j の共役変数である。

最適性のための1階の条件は

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_j} = \frac{1}{c_j} - \mu_1 = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j} = -\eta(\pi_j - \pi^*) + \mu_2 p_j = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{\mu}_1 = \rho \mu_1 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_j} = \rho \mu_1 - r \mu_1 \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{\mu}_2 = \rho \mu_2 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \rho \mu_2 - \mu_1 \left[(1 - \phi) \frac{y_j}{p} + \frac{\phi}{\beta \zeta} y_j^{\frac{1}{\beta} - 1} R \frac{y_j}{p_j} \right] - \mu_2 \pi_j \quad (\text{A.4})$$

によって与えられる。

(A.1) と (A.3) よりオイラー方程式 (7) が得られる。一方、(A.2) より以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \frac{\eta(\pi_j - \pi^*)}{p_j}, \\ \dot{\mu}_2 &= \frac{\eta \dot{\pi}_j}{p_j} - \frac{\eta(\pi_j - \pi^*)}{p_j} \pi_j\end{aligned}$$

これらと (A.1) を (A.4) に代入すると

$$\frac{\eta \dot{\pi}_j}{p_j} - \frac{\eta(\pi_j - \pi^*)}{p_j} \pi_j = \frac{\rho \eta(\pi_j - \pi^*)}{p_j} - \frac{1}{c_j} \left[(1 - \phi) \frac{y_j}{p} + \frac{\phi}{\beta \zeta} \frac{y_j^{\frac{1}{\beta}}}{p_j} R \right] - \frac{\eta(\pi_j - \pi^*)}{p_j} \pi_j$$

を得る。これより、NKPC(8) が得られる。

A.2 補題1の証明

以下では計算の便宜上、 $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d \tau} \right|_{\lambda=i\omega_+}$ に代えて $\operatorname{Re} \left(\left. \frac{d \lambda}{d \tau} \right|_{\lambda=i\omega_+} \right)^{-1}$ の符号を見ることにする。 λ が τ の関数であることに注意して、(18) の両辺を τ で微分すると、次の式を得る。

$$\left\{ 2\lambda - \rho + (A_1 D_2 - D_1 y^*) e^{-\lambda \tau} - [(A_1 D_2 - D_1 y^*) \lambda + \{A_2 D_2 + D_1(\rho - A_1)\} y^*] \tau e^{-\lambda \tau} \right\} \frac{d \lambda}{d \tau}$$

$$= [(A_1D_2 - D_1y^*)\lambda + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*]\lambda e^{-\lambda\tau}$$

よって、

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{(2\lambda - \rho)e^{\lambda\tau} + A_1D_2 - D_1y^*}{[(A_1D_2 - D_1y^*)\lambda + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*]\lambda} - \frac{\tau}{\lambda}$$

が成り立つ。(18)を変形すると、

$$e^{\lambda\tau} = \frac{(A_1D_2 - D_1y^*)\lambda + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*}{-\lambda^2 + \rho\lambda + A_2y^*}$$

を得る。これを代入すると、次の式を得る。

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda - \rho}{(-\lambda^2 + \rho\lambda + A_2y^*)\lambda} + \frac{A_1D_2 - D_1y^*}{[(A_1D_2 - D_1y^*)\lambda + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*]\lambda} - \frac{\tau}{\lambda}$$

これを $\lambda = i\omega_+$ で評価する。

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\lambda=i\omega_+} = \frac{2i\omega_+ - \rho}{(\omega_+^2 + i\rho\omega_+ + A_2y^*)i\omega_+} + \frac{A_1D_2 - D_1y^*}{[i(A_1D_2 - D_1y^*)\omega_+ + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*]i\omega_+} - \frac{\tau_h}{i\omega_+}$$

右辺の実部が正ならば不安定化、負ならば安定化である。右辺第3項 $-\frac{\tau_h}{i\omega_+}$ は明らかに虚数であるため無視できる。右辺第1項と第2項の実部を求めるために、

$$\frac{2i\omega_+ - \rho}{(\omega_+^2 + i\rho\omega_+ + A_2y^*)i\omega_+} = z_1 + iq_1 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{A_1D_2 - D_1y^*}{[i(A_1D_2 - D_1y^*)\omega_+ + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*]i\omega_+} = z_2 + iq_2 \quad (\text{A.6})$$

と置き、 $z_1 + z_2$ の符号を調べる。

(A.5) と (A.6) はそれぞれ次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} -q_1\omega_+^3 - \rho z_1\omega_+^2 - A_2y^*q_1\omega_+ + \rho + i[z_1\omega_+^3 - q_1\rho\omega_+^2 + A_2y^*z_1\omega_+ - 2\omega_+] &= 0 \\ (A_1D_2 - D_1y^*)z_2\omega_+^2 + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*q_2\omega_+ + (A_1D_2 - D_1y^*) \\ + i[(A_1D_2 - D_1y^*)q_2\omega_+^2 - \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*z_2\omega_+] &= 0 \end{aligned}$$

これらの式の実部と虚部はともにゼロでなければならない。すなわち、

$$\begin{cases} q_1\omega_+^3 + \rho z_1\omega_+^2 + A_2y^*q_1\omega_+ - \rho = 0 \\ z_1\omega_+^3 - q_1\rho\omega_+^2 + A_2y^*z_1\omega_+ - 2\omega_+ = 0 \\ (A_1D_2 - D_1y^*)z_2\omega_+^2 + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*q_2\omega_+ + (A_1D_2 - D_1y^*) = 0 \\ (A_1D_2 - D_1y^*)q_2\omega_+^2 - \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}y^*z_2\omega_+ = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。 z_1 と q_1 、および z_1 と q_2 を未知変数とするこれら2組の連立方程式を解くと、 z_1 と z_2 が次のように得られる。

$$z_1 = \frac{\rho^2 + 2(\omega_+^2 + A_2y^*)}{\rho^2\omega_+^2 + (\omega_+^2 + A_2y^*)^2}$$

$$z_2 = -\frac{(A_1D_2 - D_1y^*)^2}{(A_1D_2 - D_1y^*)^2\omega_+^2 + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}^2y^{*2}}$$

したがって、次の式が成り立つ。

$$z_1 + z_2 = \frac{Z}{\{\rho^2\omega_+^2 + (\omega_+^2 + A_2y^*)^2\}[(A_1D_2 - D_1y^*)^2\omega_+^2 + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}^2y^{*2}]} \quad (\text{A.7})$$

ここで Z は次のように定義される。

$$Z \equiv \{\rho^2 + 2(\omega_+^2 + A_2y^*)\}(A_1D_2 - D_1y^*)^2\omega_+^2 + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}^2y^{*2} \\ - \{\rho^2\omega_+^2 + (\omega_+^2 + A_2y^*)^2\}(A_1D_2 - D_1y^*)^2$$

(A.7) の分母は常に正なので分子 Z の符号だけを見ればよい。 Z は次のように展開される。

$$Z = (A_1D_2 - D_1y^*)^2\omega_+^4 + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}^2y^{*2}(2\omega_+^2 + 2A_2y^* + \rho^2) \\ - (A_1D_2 - D_1y^*)^2A_2^2y^{*2}$$

(23) から得られる関係 $2\omega_+^2 + 2A_2y^* + \rho^2 = (A_1D_2 - D_1y^*)^2 + \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}$ を使うと、次のように書き換えられる。

$$Z = (A_1D_2 - D_1y^*)^2(\omega_+^4 - \gamma_2) + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}^2y^{*2}\sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}$$

さらに (22) から得られる関係 $-\gamma_2 = \omega_+^4 + \gamma_1\omega_+^2$ を用いると、

$$Z = (A_1D_2 - D_1y^*)^2(2\omega_+^4 + \gamma_1\omega_+^2) + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}^2y^{*2}\sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}$$

となる。最後に、(23) から得られる関係 $2\omega_+^4 + \gamma_1\omega_+^2 = \omega_+^2\sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}$ を代入すれば次の式が得られる。

$$Z = \left[(A_1D_2 - D_1y^*)^2\omega_+^2 + \{A_2D_2 + D_1(\rho - A_1)\}^2y^{*2} \right] \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2} > 0$$

この式は h によらず成り立つ。以上より、補題 1 が示される。

A.3 補題 2 の証明

ここでも、計算の便宜上、 $\left. \frac{d\text{Re}\lambda}{d\tau} \right|_{\lambda=i\tilde{\omega}_{\pm}}$ に代えて $\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\lambda=i\tilde{\omega}_{\pm}}$ の符号を見る。

(24) の両辺を τ で微分すると、

$$\{2\lambda - (\rho + D_1y^*) + A_1D_2e^{-\lambda\tau} - (A_1D_2\lambda + A_2D_2y^*)\tau e^{-\lambda\tau}\} \frac{d\lambda}{d\tau} = (A_1D_2 + A_2D_2y^*)\lambda e^{-\lambda\tau}$$

を得る。よって、

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{\{2\lambda - (\rho + D_1y^*)\}e^{\lambda\tau} + A_1D_2}{\lambda(A_1D_2\lambda + A_2D_2y^*)} - \frac{\tau}{\lambda}$$

(24) から得られる $e^{\lambda\tau} = \frac{A_1D_2\lambda + A_2D_2y^*}{-\lambda^2 + (\rho + D_1y^*)\lambda + \{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}y^*}$ を代入すると

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda - (\rho + D_1y^*)}{\lambda[-\lambda^2 + (\rho + D_1y^*)\lambda + \{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}y^*]} + \frac{A_1D_2}{\lambda(A_1D_2\lambda + A_2D_2y^*)} - \frac{\tau}{\lambda}$$

これを $\lambda = i\tilde{\omega}_{\pm}$ で評価する。

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\lambda=i\tilde{\omega}_{\pm}} = \frac{2i\tilde{\omega}_{\pm} - (\rho + D_1y^*)}{i\tilde{\omega}_{\pm}[\tilde{\omega}_{\pm}^2 + i\tilde{\omega}_{\pm}(\rho + D_1y^*) + \{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}y^*]} + \frac{A_1D_2}{i\tilde{\omega}_{\pm}(iA_1D_2\tilde{\omega}_{\pm} + A_2D_2y^*)} - \frac{\tau_h^{\pm}}{i\tilde{\omega}_{\pm}}$$

右辺第3項 $-\frac{\tau_h^{\pm}}{i\tilde{\omega}_{\pm}}$ は明らかに虚数であるため無視できる。右辺第1項と第2項の実部を求めるために、

$$\frac{2i\tilde{\omega}_{\pm} - (\rho + D_1y^*)}{i\tilde{\omega}_{\pm}[\tilde{\omega}_{\pm}^2 + i\tilde{\omega}_{\pm}(\rho + D_1y^*) + \{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}y^*]} = z_1 + iq_1$$

$$\frac{A_1D_2}{i\tilde{\omega}_{\pm}(iA_1D_2\tilde{\omega}_{\pm} + A_2D_2y^*)} = z_2 + iq_2$$

と置き、 $z_1 + z_2$ の符号を調べる。

z_1 と z_2 は以下のように求められる。

$$z_1 = \frac{(\rho + D_1y^*)^2 + 2[\tilde{\omega}_{\pm}^2 + \{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}y^*]}{(\rho + D_1y^*)^2\tilde{\omega}_{\pm}^2 + [\tilde{\omega}_{\pm}^2 + \{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}y^*]^2}$$

$$z_2 = -\frac{A_1^2}{A_1^2\tilde{\omega}_{\pm}^2 + A_2^2y^{*2}}$$

よって、

$$z_1 + z_2 = \frac{\tilde{Z}}{[(\rho + D_1y^*)^2\tilde{\omega}_{\pm}^2 + [\tilde{\omega}_{\pm}^2 + \{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}y^*]^2](A_1^2\tilde{\omega}_{\pm}^2 + A_2^2y^{*2})} \quad (\text{A.8})$$

ただし

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &\equiv (\rho + D_1y^*)^2(A_1^2\tilde{\omega}_{\pm}^2 + A_2^2y^{*2}) + 2[\tilde{\omega}_{\pm}^2 + \{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}y^*](A_1^2\tilde{\omega}_{\pm}^2 + A_2^2y^{*2}) \\ &\quad - A_1^2(\rho + D_1y^*)^2\tilde{\omega}_{\pm}^2 - A_1^2[\tilde{\omega}_{\pm}^2 + \{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}y^*]^2 \\ &= (\rho + D_1y^*)^2A_2^2y^{*2} - A_1^2\{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}^2y^{*2} + A_1^2\tilde{\omega}_{\pm}^4 + 2A_2^2y^{*2}\tilde{\omega}_{\pm}^2 \\ &\quad + 2\{A_2 - D_1(\rho - A_1)\}A_2^2y^{*3} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

(A.8) の分母は常に正なので分子 \tilde{Z} の符号だけを見ればよい。(28) より、 $-A_1^2\{D_1(\rho - A_1) - A_2\}^2y^{*2} = A_1^2\tilde{\omega}_{\pm}^4 + A_1^2\tilde{\gamma}_1\tilde{\omega}_{\pm}^2 - A_1^2(A_2D_2y^*)^2$ という関係が得られる。この式を用いると、(A.9) は次のように書き換えられる。

$$\tilde{Z} = (A_1^2\tilde{\omega}_{\pm}^2 + A_2^2y^{*2})(2\tilde{\omega}_{\pm}^2 + \tilde{\gamma}_1)$$

さらに (29) から得られる関係 $2\tilde{\omega}_{\pm}^2 + \tilde{\gamma}_1 = \pm\sqrt{\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2}$ を用いると、

$$\tilde{Z} = \pm(A_1^2\tilde{\omega}_{\pm}^2 + A_2^2y^{*2})\sqrt{\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2}$$

となる。したがって、

$$\text{sign} \left[\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right]_{\lambda=i\tilde{\omega}_+} = \text{sign} \left[(A_1^2\tilde{\omega}_+^2 + A_2^2y^{*2})\sqrt{\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2} \right] > 0$$

$$\text{sign} \left[\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right]_{\lambda=i\tilde{\omega}_-} = \text{sign} \left[-(A_1^2\tilde{\omega}_-^2 + A_2^2y^{*2})\sqrt{\tilde{\gamma}_1^2 - 4\tilde{\gamma}_2} \right] < 0$$

を得る。これらの式は h によらず成り立つ。ゆえに補題 2 が得られる。

●参考文献

- Asada, Toichiro, and Hiroyuki Yoshida (2001). “Stability, instability and complex behavior in macrodynamic models with policy lag,” *Discrete Dynamics in Nature and Society* 5(4), pp.281–295.
- Benhabib, Jess, Stephanie Schmitt-Grohé, and Martín Uribe (2001). “The perils of Taylor rules,” *Journal of Economic Theory* 96, pp.40–69.
- Benhabib, Jess, Stephanie Schmitt-Grohé, and Martín Uribe (2003). “Backward-looking interest-rate rules, interest-rate smoothing, and macroeconomic instability,” *Journal of Money, Credit and Banking* 35(6), pp.1379–1412.
- Beretta, Edoardo, and Yang Kuang (2002). “Geometric stability switch criteria in delay differential systems with delay dependent parameters,” *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 33(5), pp.1144–1165.
- Bullard, James, and Kaushik Mitra (2002). “Learning about monetary policy rules,” *Journal of Monetary Economics* 49(6), pp.1105–1129.
- Carlstrom, Charles T., and Timothy S. Fuerst (2003). “Comment on “Backward-looking interest-rate rules, interest-rate smoothing, and macroeconomic instability” by Jess Benhabib,” *Journal of Money, Credit and Banking* 35, pp.1413–1423.
- Cooke, Kenneth L., and Zvi Grossman (1982). “Discrete delay, distributed delay and stability switches,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 86(2), pp.592–627.
- De Cesare, Luigi, and Mario Sportelli (2005). “A dynamic IS-LM model with delayed taxation revenues,” *Chaos, Solitons and Fractals* 25(1), pp.233–244.
- Friedman, Milton (1948). “A monetary and fiscal framework for economic stability,” *American Economic Review* 38(3), pp.245–264.
- Gu, Keqin, and Mohammad Naghnaeian (2011). “Stability crossing set for systems with three delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control* 56(1), pp.11–26.
- Gu, Keqin, Silviu-Iulian Niculescu, and Jie Chen (2005). “On stability crossing curves for general systems with two delays,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 311(1), pp.231–253.
- Guerrini, Luca, and Mauro Sodini (2013). “Dynamic properties of the Solow model with increasing or decreasing population and time-to-build technology,” *Abstract and Applied Analysis* Volume 2013, Article ID 280925, 7 pages.
- Lin, Xihui, and Hao Wang (2012). “Stability analysis of delay differential equations with two discrete delays,” *Canadian Applied Mathematics Quarterly* 20(4), pp.519–533.
- Matsumoto, Akio, and Ferenc Szidarovszky (2012). “An elementary study of a class of dynamic systems with two time delays,” *Cubo (Temuco)* 14(3), pp.103–113.
- Matsumoto, Akio, and Ferenc Szidarovszky (2013a). “An elementary study of a class of dynamic systems with single time delay,” *Cubo (Temuco)* 15(3), pp.1–8.
- Matsumoto, Akio, and Ferenc Szidarovszky (2013b). “Dynamics in delay IS-LM model with tax collections,” IERC Discussion Paper No.208, Chuo University, 25 pages.
- Rotemberg, Julio J. (1982). “Sticky prices in the United States,” *Journal of Political Economy* 90(6), pp.1187–1211.
- Shinagawa, Shunsuke, and Tomohiro Inoue (2016). “R&D-based growth model with nominal wage stickiness,” *Theoretical Economics Letters* 6(5), pp.854–867.
- Tsuzuki, Eiji (2014). “A New Keynesian model with delay: Monetary policy lag and determinacy of equilibrium,” *Economic Analysis and Policy* 44(3), pp.279–291.
- Tsuzuki, Eiji (2015). “Determinacy of equilibrium in a New Keynesian model with monetary policy lag,” *International Journal of Economic Behavior and Organization*, Special Issue: Recent Developments of Economic Theory and Its Applications 3(2-1), pp.15–22.
- Tsuzuki, Eiji (2016). “Fiscal policy lag and equilibrium determinacy in a continuous-time New Keyne-

- sian model,” *International Review of Economics* 63(3), pp.215–232.
- Tsuzuki, Eiji, and Shunsuke Shinagawa (2015). “Dynamic analysis of fiscal policy lag in the New Keynesian model with exogenous growth,” Keynes Society Japan Working Paper No.3, Keynes Society Japan, 30 pages.
- Tsuzuki, Eiji, Shunsuke Shinagawa, and Tomohiro Inoue (2015). “Equilibrium determinacy in a continuous time New Keynesian model with monetary and fiscal policy lags,” WINPEC Working Paper Series No.E1503, Waseda University, 24 pages.
- Tsuzuki, Eiji, Futoshi Kurokawa, and Shunsuke Shinagawa (2016). “Numerical analysis of three time delays in monetary policy: the case of a sticky-price model,” IERCU Discussion Paper, No.261, Chuo University, 32 pages.
- Yoshida, Hiroyuki, and Toichiro Asada (2007). “Dynamic analysis of policy lag in a Keynes–Goodwin model: stability, instability, cycles and chaos,” *Journal of Economic Behavior and Organization* 62(3), pp.441–469.