

特許期間の有限性の下でのマクロ動学分析*

品川 俊介[†]・都築 栄司[‡]

Dynamic analysis of an endogenous growth model with finitely-lived patents

Shunsuke Shinagawa · Eiji Tsuzuki

Kanagawa University · Nanzan University

【要約】 This study provides a theoretical analysis on dynamics of an endogenous growth model under a finiteness of a patent length. In a growth model in continuous time with finitely-lived patents, the law of motions is expressed as a differential-difference equation system, which includes both advance and delay differential equations. We investigate the differential-difference equation system derived from the model, and clarify the impact of a finiteness of patent on the local stability. Our analysis shows that the balanced growth path is locally stable even if a patent length is finite.

【キーワード】 R&D 内生的成長 特許 局所的決定性 微分差分方程式

1 序論

利潤動機に基づく民間経済主体の R&D（研究開発）活動は、持続的な経済成長の重要な源泉の 1 つであると考えられている。理論面からは「R&D に基づく内生的経済成長モデル (R&D-based endogenous growth model)」によってそのメカニズムが解明されてきた。基本モデルとして、Romer (1990); Grossman and Helpman (1991); Rivera-Batiz and Romer (1991); Aghion and Howitt (1992) が挙げられる。このメカニズムが機能するためには、通常、民間経済主体が市場において R&D から利潤を得るための独占力が必要である¹。そこに制度的な面から根拠を与えるのが、本稿のテーマである特許である。

このため、特許政策が経済成長や経済厚生に対してどのような影響を与えるかについて、R&D に基づ

* 本研究は JSPS 科研費 JP18K12750 の助成を受けている。

† 神奈川大学経済学部 E-mail: shinagawa@kanagawa-u.ac.jp

‡ 南山大学経済学部 E-mail: tsuzuki@nanzan-u.ac.jp

1 例外として、Boldrin and Levine (2002) や Wälde (2005) などは、特許や独占に基づかないインセンティブによって民間企業が R&D を行うメカニズムを提示し、それに基づく内生的成長モデルを構築している。

く内生的経済成長モデルを用いた研究が活発に行われてきた。代表的な研究としては、Helpman (1993); Li (2001); Kwan and Lai (2003); Iwaisako and Futagami (2003); O'Donoghue and Zweimuller (2004); Furukawa (2007b); Futagami and Iwaisako (2007) などが挙げられる²。本研究ではこの中から、Iwaisako and Futagami (2003) によって提示されたモデルを取り上げ、彼らによって提示された有限な特許期間を持つ R&D に基づく内生的成長モデルの動学について解析的な分析を行う。Romer (1990); Rivera-Batiz and Romer (1991) に代表される、水平的なイノベーションを扱う variety-expansion モデルにおいては、多くの場合、永続的に有効な特許 (infinitely-lived patent) が仮定される³。Iwaisako and Futagami (2003) は、これらをベースとするモデルに、政策的に変更可能な特許期間 (patent length) の有限性を導入し、特許政策が経済成長や社会的厚生に与える影響について理論的に分析した研究である。

Iwaisako and Futagami (2003) の主要な貢献は、社会的厚生を最大化する特許期間は無限ではなく有限となることを示したことである。これは、内生的成長モデルでは長期の経済成長率が特許期間に依存するためである。Judd (1985) による同様の外生的成長モデルでは、無限の特許期間が最適であることが示されていた。内生的成長モデルにおいて特許期間を引き延ばすことには厚生に対する2つの効果がある。1つは特許期間の延長が R&D の収益性を高め、経済成長率を押し上げる成長促進効果である。これは厚生に対する正の効果となる。2つめは、市場における独占の歪みが大きくなることによる厚生に対する負の効果 (静学的非効率性効果) である。これら2つの効果の限界値がちょうど釣り合うところで、社会的厚生は最大になるのである⁴。

こうした Iwaisako and Futagami (2003) の議論は、均斉成長経路上で特許政策が成長率にどのような影響を与えるかについて考察したものであるが、成長経路の安定性 (決定性) には触れていない。もし均斉成長経路が安定であれば、彼らの議論は大きな意味を持つが、もし不安定であるならば、そうした考察自体が意味を失ってしまう。しかし、Iwaisako and Futagami (2003) のような、特許期間の有限性を考慮した連続時間の内生的成長モデルの動学分析はほとんど行われていない。これは、動学体系が連続時間と離散時間の混合である微分差分方程式体系 (differential-difference equation system) となり、数学的な分析が複雑になるためであると考えられる⁵。本稿では、Iwaisako and Futagami (2003) のオリジナル・モデルから導出される微分差分方程式体系を分析し、その動学的性質を明らかにすることを目的とする。この結果、特許期間によらず均斉成長経路は局所的に決定であることが示される。

有限の特許期間を持つ離散時間の variety-expansion モデルの動学分析を行った研究としては De-neckere and Judd (1992); Matsuyama (1999); Furukawa (2007a); Shinagawa (2013) などが挙げ

-
- 2 部分均衡モデルを用いた初期の理論的研究は Nordhaus (1969, Chap.5) まで遡ることができる。
 - 3 この仮定により、市場において独占的な財 (特許によって保護された財) と競争的な財 (特許期間が経過し保護されていない財) が混在する状況が排除され、また R&D より発生する利潤についての取り扱いが簡単になるため、分析が容易になる。
 - 4 Iwaisako and Futagami (2003) ではさらに、模倣企業による違法な生産活動に対する罰金の大きさと解釈することができる特許範囲 (patent breadth) を導入したケースについても同様の分析を行っている。特許範囲の存在を考慮したとしても、上述した彼らの基本的な結論は頑健である。
 - 5 微分差分方程式の経済学への応用例としては、政策ラグの分析 (Asada and Yoshida, 2000; Yoshida and Asada, 2007; De Cesare and Sportelli, 2005; Tsuzuki, 2014) や、ヴィンテージ資本モデル (Boucekkine *et al.*, 2004, 2005)、資本の time to build (投資の懐妊期間) モデル (Matsumoto and Szidarovszky, 2011, 2013; Guerrini and Sodini, 2013) などがある。

られる。しかし、それらは離散時間モデルの1期間を特許期間と仮定したものであり、特許期間を政策的に変更するような状況は想定されていない。例外として、Futagami and Iwaisako (2007) は、Iwaisako and Futagami (2003) 同様、特許期間を政策的に変更可能な状況を想定して分析を行っている。離散時間モデルの場合は、有限の特許期間を想定しても、微分差分混合方程式体系に直面するという問題はないが、高次の差分方程式体系を分析しなければならない。本稿の分析は、Futagami and Iwaisako (2007) による動学分析の連続時間版と位置づけることができる。

また、連続時間モデルの中で、特許による保護期間の有限性を離散的な項としてではなく、模倣などによって確率的に市場環境が独占から競争へと移り変わると想定することによって表現したモデルとして、Helpman (1993); Kwan and Lai (2003); Furukawa (2007b); Barro and Sala-i-Martin (2004, Chap.6) がある。このような想定の下では、動学体系が微分差分方程式体系とならないため、動学分析は比較的容易である⁶。

本稿の構成は次の通りである。第2節では、Iwaisako and Futagami (2003) のモデルを提示する。第3節では、動学分析を行い、均斉成長経路の局所的決定性を明らかにする。第4節では結論を述べる。

2 モデル

特許政策が成長経路の局所的決定性にどのような影響を与えるかを分析するために、Iwaisako and Futagami (2003) に従い、R&Dに基づく内生的成長モデルを提示する。

経済は最終財生産企業、中間財生産企業、および家計によって構成される。家計は最終財生産企業に非弾力的に一定量の労働を供給する。中間財生産企業は最終財を用いて非耐久的な中間財を生産する。最終財生産企業は各種中間財を合成した合成的中間財 (composite of intermediate goods) と労働を用いて完全競争の下で最終財を生産する。新しいタイプの中間財は家計による R&D 投資によって発明される。R&D 投資は最終財を用いて行われる。R&D によって発明された中間財には特許が付与されるが、その有効期間は有限である。よって、特許が有効な中間財については、特許を保有する企業が独占的に財を生産し、特許の切れた中間財については、特許を保有していた企業と模倣企業とが競争的に生産活動を行う。

2.1 最終財生産企業

家計より非弾力的に供給される労働を L 、 t 時点において最終財生産に投入される合成的中間財を $D(t)$ と表す。最終財生産企業は次のような収穫一定技術の下で最終財 $Y(t)$ を生産する。

$$Y(t) = AL^{1-\alpha}D(t)^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

ここで $A > 0$ は一定の全要素生産性である。中間財の合成は以下のような CES 関数に従って行われるものとする。

$$D(t) = \left[\int_0^{N(t)} X_j(t)^\alpha dj \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

ここで $N(t)$ は t 時点における中間財のパラエティ数である。これは、 t 時点までに $N(t)$ 種類の中間財

6 本稿同様、内生的成長モデルから導出される微分差分方程式体系を扱った研究としては Boucekine *et al.* (2005) が挙げられる。彼らは、AK 型の内生的成長モデルに資本ヴェンテージを導入することで微分差分方程式体系を導き、動学分析を行っている。

が発明されていることを意味する。 $X_j(t)$ は中間財 $j \in [0, N]$ の投入量である。各中間財の間の代替の弾力性は $1/(1-\alpha) > 1$ によって表される。

最終財をニュメレールとする。このとき、最終財生産企業の利潤最大化条件は以下のように表される。

$$\begin{aligned}(1-\alpha)AL^{-\alpha}D(t)^\alpha &= w(t), \\ \alpha AL^{1-\alpha}X_j(t)^{\alpha-1} &= P_j(t)\end{aligned}\tag{2}$$

ここで $w(t)$ は賃金率、 $P_j(t)$ は中間財 j の価格である。

2.2 中間財生産企業

各種中間財を 1 単位生産するためには 1 単位の最終財が必要であるとする。このとき中間財 j を生産する企業の利潤は $\Pi_j(t) = (P_j(t) - 1)X_j(t)$ と表される。特許で保護された中間財を生産する企業は、逆需要関数 (2) の下で、利潤 $\Pi_j(t)$ を最大化するように、価格と生産量を決定する。特許で保護された中間財の価格を P^M 、産出水準を X^M 、利潤を $\bar{\Pi}$ とすると、

$$\begin{aligned}P^M &= \frac{1}{\alpha}, \\ X^M &= (\alpha^2 AL^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ \bar{\Pi} &= \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) X^M\end{aligned}\tag{3}$$

となる。これらは、時間を通じて一定となる。

一方、特許の有効期限の切れた中間財を生産する企業は、完全競争市場において生産活動を行い、その利潤はゼロになる。特許で保護されていない中間財の価格を P^C 、産出水準を X^C とすると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}P^C &= 1, \\ X^C &= (\alpha AL^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}\end{aligned}\tag{4}$$

2.3 家計

無限期にわたって生涯効用を最大化する家計を考える。各家計は毎時点労働 1 単位を非弾力的に供給する。家計の数は L である。各家計の生涯効用を次のように表す。

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t} \log c(t) dt$$

ここで $c(t)$ は時点 t における家計当たりの最終財の消費量、 $\rho > 0$ は主観的割引率である。

家計は貯蓄を R&D 投資に向け、結果として特許で保護された中間財を生産する企業の所有権 (株式) を取得する。 $\eta (> 0)$ 単位の最終財を投資することによって、1 単位の新しいタイプの中間財が発明される。中間財生産企業の所有権を持つ家計は、特許が有効な間は利潤 $\bar{\Pi}$ を得る。有限の特許期間の長さを $T (> 0)$ で表す。一家計の R&D への投資量を $s(t)$ 、特許で保護された中間財生産企業の株式保有数を $z(t)$ とすると、家計の異時点間の予算制約式を次のように表すことができる。

$$s(t) = z(t)\bar{\Pi} + w(t) - c(t)$$

時点 t における株式保有数 $z(t)$ は時点 t における R&D 投資によって増加し、時点 t で無効となる特許（すなわち、時点 $t-T$ に生み出された特許）の数だけ減少する。したがって、 $\dot{z}(t) = (s(t)/\eta) - (s(t-T)/\eta)$ が成り立つ。

次に、 $s(t)$ の水準を決定する条件について考える。 $s(t)$ が満たすべき条件は、R&D 投資の限界費用が R&D 投資の限界便益に等しくなることである。R&D 投資の限界費用は消費を 1 単位犠牲にすることによってもたらされる効用の限界損失 $(1/c(t))e^{-\rho t}$ である。一方、消費を 1 単位犠牲にして R&D 投資を行うと、 $N(t)$ が $1/\eta$ だけ増加する。よって、家計は $\bar{\Pi}/\eta$ だけ多く利潤を得ることができる。この利潤は特許が有効である限り得ることができるので、R&D 投資の限界便益は、 $(\bar{\Pi}/\eta) \int_t^{t+T} e^{-\rho u} \frac{1}{c(u)} du$ となる。よって、R&D に正の投資がなされる時、次の条件が成立する。

$$e^{-\rho t} \frac{1}{c(t)} = \frac{\bar{\Pi}}{\eta} \int_t^{t+T} e^{-\rho u} \frac{1}{c(u)} du$$

この式を時間 t で微分すると、次の式を得る。

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\bar{\Pi}}{\eta} \left(1 - e^{-\rho T} \frac{c(t)}{c(t+T)} \right) - \rho \quad (5)$$

2.4 財市場均衡

本節では、財市場の清算条件から、中間財のバラエティ $N(t)$ の動学方程式を導く。財市場の清算条件は $Y(t) = c(t)L + \int_0^{N(t)} X_j dj + \eta \dot{N}(t)$ である。競争市場で生産される中間財の種類数を N^C 、独占力を持つ企業によって生産される中間財の種類数を N^M とすると、 $N^C(t) = N(t-T)$ 、 $N^M(t) = N(t) - N(t-T)$ が成り立つ。生産関数 (1) は、 $Y(t) = AL^{1-\alpha} [N^C(t)(X^C)^\alpha + N^M(t)(X^M)^\alpha]$ と書き換えられる。よって、財市場の均衡条件式は

$$\begin{aligned} \eta \dot{N}(t) = & AL^{1-\alpha} \left[N(t-T)(X^C)^\alpha + \{N(t) - N(t-T)\}(X^M)^\alpha \right] \\ & - \left[N(t-T)X^C + \{N(t) - N(t-T)\}X^M \right] - c(t)L \end{aligned}$$

と書き換えられる。この式に (3) と (4) を代入すると、 $N(t)$ の動学方程式が得られる。

$$\dot{N}(t) = \frac{1}{\eta} [q_M N(t) + (q_C - q_M)N(t-T) - c(t)L] \quad (6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} q_C &\equiv \alpha^{-1} \bar{\Pi} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} L \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha), \\ q_M &\equiv \left(\frac{1+\alpha}{\alpha} \right) \bar{\Pi} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} L \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha^2) \end{aligned}$$

である。 q_C と q_M はそれぞれ競争的企業と独占企業の付加価値を表している。 $0 < \alpha < 1$ に対して $q_C > q_M$ が成り立つ。

モデルの動学は (5) と (6) によって特徴づけられる。(5) は $c(t)$ の時間微分がその将来の値 $c(t+T)$ に依存する方程式 (advance differential equation) となっている。これは、家計の R&D 投資の決定が T 期後までの限界効用に依存することによる。一方、(6) は $N(t)$ の時間微分がその過去の値 $N(t-T)$ に依存する方程式 (delay differential equation) である。これは、財市場の清算条件が、 T 時点前の中

間財のパラエティに依存することから導かれている。以下では、 c と N が一定率で成長する状態を均斉成長経路 (balanced growth path, BGP) と定義する。本稿の目的は、この微分方程式体系の完全な動学分析を行い、BGP の局所的決定性を明らかにすることである。

3 動学

(5) と (6) によって構成される動学体系は分解可能である。すなわち、(5) は c 以外の変数を含まず、それ自体で完結している。一方、(6) によって記述される N の動学は (5) から決まる c の影響を受ける。したがって、我々はまず (5) について分析を行い、次にその結果を所与として (6) の分析を行う。

3.1 消費 c の動学

3.1.1 均斉成長経路

$g(t) \equiv \dot{c}(t)/c(t)$ と表すと、(5) は次のように書き換えられる。

$$g(t) = \frac{\bar{\Pi}}{\eta} \left[1 - e^{-(\rho T + \int_t^{t+T} g(\tau) d\tau)} \right] - \rho \quad (7)$$

任意の t について、 $g(t) = \bar{g}$ が成り立つとすると、次の式を得る。

$$F(\bar{g}, T) \equiv \bar{g} + \rho - \frac{\bar{\Pi}}{\eta} \left[1 - e^{-(\bar{g} + \rho)T} \right] = 0 \quad (8)$$

T の値を所与としたときの BGP における $c(t)$ の均斉成長率を $g^*(T)$ と表す。所与の T について (8) が \bar{g} の非負解を持つとき、それが均斉成長率 $g^*(T)$ となる。 $\bar{\Pi}/\eta \leq \rho$ のとき、(8) は任意の T について正の解を持ち得ない。以下の分析では、このケースを排除するため、パラメータに以下の制約を課す⁷。

仮定 1 $\bar{\Pi}/\eta > \rho$

任意の T について $F(-\rho, T) = 0$ が成立する。 $\lim_{\bar{g} \rightarrow \pm\infty} F(\bar{g}, T) = \infty$ 、 $\partial F(-\rho, T)/\partial \bar{g} = 1 - (T\bar{\Pi}/\eta)$ 、 $\partial^2 F(\bar{g}, T)/\partial \bar{g}^2 = \bar{\Pi}e^{-(\rho+\bar{g})T}T^2/\eta > 0$ であるため、 $T \neq \eta/\bar{\Pi}$ であれば、 $F(\bar{g}, T) = 0$ は $\bar{g} = -\rho$ の他に一意の解を持つ。 $T > \underline{T} \equiv \frac{1}{\rho} \log \left(\frac{\bar{\Pi}}{\bar{\Pi} - \rho\eta} \right)$ であれば、その解は正であり、均斉成長率 $g^*(T)$ となる。以下では、均斉成長率 $g^*(T)$ が正となるケースについて分析を行うため、考察の対象を $T > \underline{T}$ に限定する⁸。

ここで、特許期間 T と均斉成長率 $g^*(T)$ の関係について論じておく。 $F(\bar{g}, T)$ の \bar{g} についての偏導関数を $\bar{g} = g^*(T)$ で評価すると、 $\partial F(g^*(T), T)/\partial \bar{g} = 1 - a(T)$ を得る。ただし、

$$a(T) \equiv \frac{\bar{\Pi}}{\eta} e^{-(\rho+g^*(T))T} T > 0$$

である。 $F(g^*(T), T) = 0$ を満たす $g^*(T) > -\rho$ が存在するには、 $\partial F(g^*, T)/\partial \bar{g} > 0$ となるケースしかあり得ない。さらに、 $\bar{g} > -\rho$ について、 $\partial F(\bar{g}, T)/\partial T = -\bar{\Pi}(\bar{g} + \rho)e^{-(\bar{g} + \rho)T}/\eta < 0$ であることを用い

7 $T \rightarrow \infty$ のとき、 $g^*(T) = (\bar{\Pi}/\eta) - \rho$ である。仮定 1 は T を十分大きくすれば、正の均斉成長率が達成可能であることを意味する。

8 ロピタルの定理より、 $\rho \rightarrow 0$ のとき、 $\underline{T} = \eta/\bar{\Pi}$ である。また $d\underline{T}/d\rho > 0$ であることから、 $\rho > 0$ について $\underline{T} > \eta/\bar{\Pi}$ である。

ると、 $T > \underline{T} > \eta/\bar{\Pi}$ について、

$$(g^*)'(T) = -\frac{\partial F(g^*(T), T)/\partial T}{\partial F(g^*(T), T)/\partial \bar{g}} = \frac{\bar{\Pi}(\bar{g} + \rho)e^{-(\bar{g} + \rho)T}/\eta}{1 - a(T)} > 0$$

が示される。この結果は、特許期間が長いほど均斉成長率が高くなるという、特許の成長促進効果を表している。

3.1.2 特性方程式の導出

(7) の両辺を時間 t で微分すると、次の式を得る。

$$\dot{g}(t) = \frac{\bar{\Pi}}{\eta} e^{-(\rho T + \int_t^{t+T} g(\tau) d\tau)} [g(t+T) - g(t)] \quad (9)$$

この式を $g^*(T)$ の近傍でテイラー展開すると、

$$\dot{\hat{g}}(t) = \frac{\bar{\Pi}}{\eta} e^{-(\rho + g^*(T))T} [\hat{g}(t+T) - \hat{g}(t)] \quad (10)$$

となる。ただし、 $\hat{g}(t) \equiv g(t) - g^*(T)$ である。この微分方程式の解として指数関数 $\hat{g}(t) = \bar{C}_1 e^{\mu t}$ (\bar{C}_1 は任意定数、 μ は固有値) を仮定し、(10) に代入すると、

$$\Delta_1(\mu) \equiv \mu + \frac{\bar{\Pi}}{\eta} e^{-(\rho + g^*(T))T} - \frac{\bar{\Pi}}{\eta} e^{-(\rho + g^*(T))T} e^{\mu T} = 0 \quad (11)$$

を得る。この式は微分方程式 (9) の特性方程式である。この特性方程式は、 $e^{\mu T}$ を含むため無限の個数の解 (固有値) を持つ。

3.1.3 $\Delta_1(\mu) = 0$ の根

変数 $g(t)$ はジャンプ変数である。よって、均斉成長経路 $g^*(T)$ は、(11) のすべての根の実部が非負 (非収束解、non-convergent solution) であるときにのみ局所的に決定となる。

ここで、次のような新しい関数を定義する。

$$\Psi(\mu T) \equiv T \Delta_1(\mu) = \mu T + a(T) - a(T) e^{\mu T} \quad (12)$$

$T > 0$ なので、(12) の根の符号は $\Delta_1(\mu) = 0$ の根の符号と必ず一致する。よって、以下では、 $\Delta_1(\mu) = 0$ の代わりに $\Psi(\mu T) = 0$ の根の符号について検討する。

$\Psi(\mu T) = 0$ の根を $\mu T = \sigma \pm i\kappa$ (σ は実部、 $\kappa \geq 0$ は虚部、 i は虚数単位) と表す。 $\mu T = \sigma \pm i\kappa$ を (12) に代入すると、次の式を得る。

$$\Psi(\sigma \pm i\kappa) = \sigma \pm i\kappa + a(T) - a(T) e^{\sigma \pm i\kappa} = 0$$

さらに、Euler の公式 ($\forall x \in \mathbb{R}, e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$) を適用すると、

$$\sigma \pm i\kappa + a(T) - a(T) e^{\sigma} (\cos \kappa \pm i \sin \kappa) = 0$$

を得る。この等式が成り立つためには、左辺の実数部分と虚数部分は共にゼロでなければならない。すなわち、以下の式が成立する。

$$\sigma + a(T) - a(T)e^\sigma \cos \kappa = 0, \quad (13)$$

$$\kappa - a(T)e^\sigma \sin \kappa = 0 \quad (14)$$

3.1.4 実根

方程式 $\Psi(\mu T) = 0$ は解として実根と複素根を持ち得る。まず、 $\kappa = 0$ と仮定して、実根の符号から検討する。(14) は、 $\kappa = 0$ のとき、 σ の値にかかわらず必ず成り立つ。 $\kappa = 0$ を (13) に代入すると、次の式を得る。

$$\psi(\sigma) \equiv \sigma + a(T) - a(T)e^\sigma = 0 \quad (15)$$

$\Psi(\mu T) = 0$ の実根は (15) の実根として与えられる。 $\psi(0) = 0$ 、 $\psi''(\sigma) = -a(T)e^\sigma < 0$ 、 $\lim_{\pm\infty} \psi(\sigma) = -\infty$ なので、 $\psi'(0) = 1 - a(T) \neq 0$ であれば、この方程式は 2 つの実根を持つ⁹。 $\psi'(0) = 1 - a(T) < 0$ ならば、(15) は $\sigma = 0$ と負の実根を 1 つ持つ。 $\psi'(0) = 1 - a(T) > 0$ ならば、(15) は $\sigma = 0$ と正の実根を 1 つ持つ。すでに議論したように、 $\partial F(g^*(T), T)/\partial g = 1 - a(T) > 0$ が成り立つので、後者のケースが必ず成立する。 $\sigma = 0$ は非収束根である。したがって、 T の値によらず、実数の収束根は現れない。

3.1.5 複素根

この小節では、 $\kappa > 0$ と仮定し、方程式 $\Psi(\mu T) = 0$ の複素根の実部の符号を調べる。 $\Psi(\mu T) = 0$ は無限の個数の解を持つため、 κ と σ の組み合わせが無限に存在するが、以下ではそのすべてについて $\sigma > 0$ が成り立つことを示す。

(14) より、 $\kappa > 0$ のとき、 $\sin \kappa > 0$ であることがわかる。よって、 κ のとり得る値は $2h\pi < \kappa < (1+2h)\pi$ 、 $\pi = 3.14159\dots$ 、 $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ である。 $\sin \kappa \neq 0$ であることから、(14) は次のように書き換えることができる。

$$e^\sigma = \frac{\kappa}{\sin \kappa} \frac{1}{a(T)} \quad (16)$$

これまでの議論より、 $1/a(T) > 1$ であることがわかっている。また、 $\kappa \in (2h\pi, (1+2h)\pi)$ について、 $\kappa/\sin \kappa > 1$ が成立することが確かめられる。このため、(16) の右辺は必ず 1 より大きくなり、この等式を満たすためには、 $\sigma > 0$ でなければならない。すなわち、 $\Psi(\sigma \pm i\kappa) = 0$ のすべての複素根の実部は正である。

3.1.6 決定性

以上の分析より、 $T > \underline{T}$ に対して、 $\Psi(\mu T) = 0$ は、非負の実根と実部が正の複素根のみを持つことが確認された。このことは、特性方程式 $\Delta_1(\mu) = 0$ についても同様のことが成り立つことを意味している。よって、我々は次の命題を得る。

命題 1 有限の $T > \underline{T}$ に対して、特性方程式 $\Delta_1(\mu) = 0$ の特性根の実部は正ないしゼロである。よって、 $g^*(T)$ は局所的に決定である。

$g(t)$ はジャンプ変数であるから、すべての $t \geq 0$ に対して $g(t) = g^*(T)$ が成り立つ。消費の初期水準

⁹ $\psi'(0) = 0$ のとき、 $\sigma = 0$ が重根となる。

$c(0)$ が決まれば、成長率 $g^*(T)$ に従って消費経路が決まる。よって、次に考察すべきは、 $c(0)$ の決定についてである。次小節では、 $N(t)$ の動学経路が安定となるような $c(0)$ の選択が一意に存在するかどうか、について考察する。

3.2 中間財のパラエティ N の動学

3.2.1 均斉成長経路

時点 $t \geq 0$ の消費は $c(t) = c(0)e^{g^*(T)t}$ と表される。BGP 上で一定となる変数を $\nu(t) = N(t)/c(t)$ と定義する。(6) より次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\nu}(t)}{\nu(t)} &= \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} - \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \\ &= \frac{1}{\eta} \left[q_M + (q_C - q_M) \frac{\nu(t-T)}{\nu(t)} e^{-g^*(T)T} - \frac{1}{\nu(t)} L \right] - g^*(T)\end{aligned}$$

これより、 ν の動学方程式が次のように得られる。

$$\dot{\nu}(t) = \frac{1}{\eta} \left[(q_M - \eta g^*(T)) \nu(t) + (q_C - q_M) e^{-g^*(T)T} \nu(t-T) - L \right] \quad (17)$$

$\nu(t)$ の定常値は次のように求められる。

$$\nu^*(T) = \frac{L}{q_M - \eta g^*(T) + (q_C - q_M) e^{-g^*(T)T}}$$

$q_M > \bar{\Pi}$ であるので、 $q_M - \eta g^*(T) > \bar{\Pi} - \eta g^*(T)$ が成立する。さらに、 $F(g^*(T), T) = 0$ より、 $\bar{\Pi} - \eta g^*(T) = \bar{\Pi} e^{-(\rho+g^*(T))T} + \eta\rho > 0$ が成り立つ。以上から、 $q_M - \eta g^*(T) > 0$ が成立する。 $q_C - q_M > 0$ であることはすでにわかっているので、 $\nu^*(T) > 0$ となることが示される。

3.2.2 特性方程式の導出

$\hat{\nu}(t) \equiv \nu(t) - \nu^*(T)$ とおくと、(17) は次のように書き換えられる。

$$\dot{\hat{\nu}}(t) = \frac{1}{\eta} \left[(q_M - \eta g^*(T)) \hat{\nu}(t) + (q_C - q_M) e^{-g^*(T)T} \hat{\nu}(t-T) \right]$$

(17) の解として指数関数 $\hat{\nu}(t) = \bar{C}_2 e^{\lambda t}$ (\bar{C}_2 は任意定数、 λ は固有値) を仮定し、代入して整理すると、次の特性方程式が得られる。

$$\Delta_2(\lambda) \equiv \lambda - \frac{1}{\eta} (q_M - \eta g^*(T)) - \frac{1}{\eta} (q_C - q_M) e^{-g^*(T)T} e^{-\lambda T} = 0 \quad (18)$$

この特性方程式は、 $e^{-\lambda T}$ を含むため、やはり無限の個数の解 (固有値) を持つ。

3.2.3 $\Delta_2(\lambda) = 0$ の根

$N(t)$ はストック変数であるが $c(t)$ はジャンプ変数であるため、 $\nu(t) \equiv N(t)/c(t)$ はジャンプ変数である。しかし $\nu(t)$ の過去 $t - T \leq t < 0$ の値は現時点 0 では所与なので、経済主体によって現時点で選択可能であるのは $\nu(0)$ (すなわち $c(0)$) のみである。したがって、(18) の根のうち正の実部を持つ根の数が 1 である場合にのみ、BGP は局所的に決定となる。

ここで、次のような新しい関数を定義する。

$$\Phi(\lambda T) \equiv T\Delta_2(\lambda) = \lambda T - b_1(T) - b_2(T)e^{-\lambda T} \quad (19)$$

ただし

$$b_1(T) \equiv \frac{1}{\eta}(q_M - \eta g^*(T))T > 0, \quad (20)$$

$$b_2(T) \equiv \frac{1}{\eta}(q_C - q_M)e^{-g^*(T)T}T > 0 \quad (21)$$

である。やはり、 $T > 0$ なので、 $\Phi(\lambda T) = 0$ の根の符号は、 $\Delta_2(\lambda) = 0$ のそれと一致する。

$\Phi(\lambda T) = 0$ の根を $\lambda T = \gamma \pm i\omega$ (γ は実部、 $\omega \geq 0$ は虚部) と表す。このとき、3.1.3 節と同様の手順により、(19) から次の 2 本の式が得られる。

$$\gamma - b_1(T) - b_2(T)e^{-\gamma} \cos \omega = 0, \quad (22)$$

$$\omega + b_2(T)e^{-\gamma} \sin \omega = 0 \quad (23)$$

3.2.4 実根

まず $\omega = 0$ と仮定して、 $\Phi(\lambda T) = 0$ の実根の符号を調べる。 $\omega = 0$ を (22) に代入すると、次の式を得る。

$$\phi(\gamma) \equiv \gamma - b_1(T) - b_2(T)e^{-\gamma} = 0 \quad (24)$$

(24) の実根は、 $\Phi(\lambda T) = 0$ の実根となる。任意の γ について、 $\phi'(\gamma) = 1 + b_2(T)e^{-\gamma} > 0$ であり、 $\phi(0) = -b_1(T) - b_2(T) < 0$ 、 $\phi(b_1(T) + b_2(T)) = b_2(T)[1 - e^{-(b_1(T) + b_2(T))}] > 0$ であるので、 $\phi(\gamma) = 0$ は、一意の正の実根を持つ。

3.2.5 複素根

以下では、 $\omega > 0$ として、 $\Phi(\lambda T) = 0$ の複素根について分析する。局所的決定性のために必要な発散根の数は 1 であるから、すべての複素根の実部が負であればそれが達成される。

(23) より、 $\omega > 0$ ならば $\sin \omega < 0$ でなければならない。よって、 $(1 + 2h)\pi < \omega < 2(1 + h)\pi$ 、 $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ である。(23) を書き換えることで次の式が得られる。

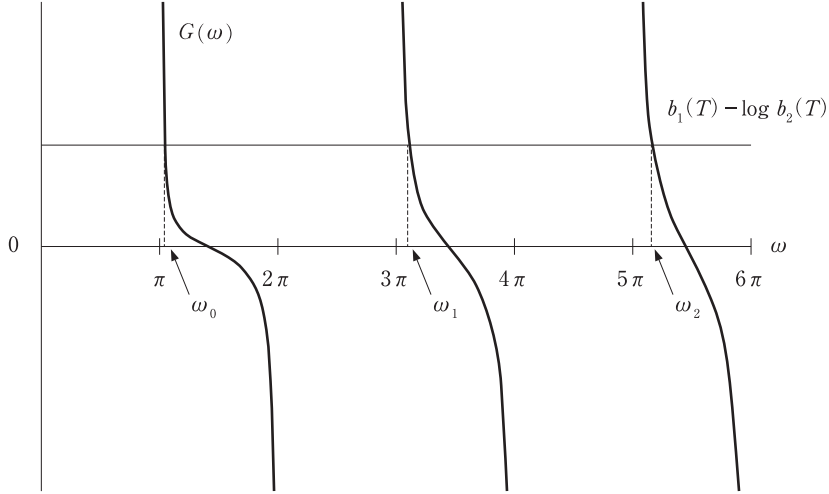
$$\gamma = \log b_2(T) + \log \left(-\frac{\sin \omega}{\omega} \right) \quad (25)$$

(25) を (23) とともに、(22) に代入すると、次の式を得る。

$$G(\omega) = b_1(T) - \log b_2(T) \quad \text{where } G(\omega) \equiv \log \left(-\frac{\sin \omega}{\omega} \right) + \frac{\omega}{\tan \omega} \quad (26)$$

図 1 は横軸に ω をとった平面に (26) を描いたものである。左辺の関数 $G(\omega)$ は ω 以外の他の変数に依存しないため、それだけからグラフの形が決まる。これは、 $((1 + 2h)\pi, 2(1 + h)\pi)$ の各区間において右下がりの曲線として描かれる。一方、(26) の右辺 $b_1(T) - \log b_2(T)$ は ω に依存しないため水平線として描かれる。両曲線の交点が方程式 (26) の解となる。これは、 $((1 + 2h)\pi, 2(1 + h)\pi)$ の各区間に 1

図 1 複素根の虚部 ω_h



つずつ、無限個の解を持つ。これらを、 ω_h , $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ と表すことにする。これらが、 $\Phi(\lambda T) = 0$ の無限に存在する複素根の虚部となる。さらに、それぞれの虚部 ω_h に対応する実部を γ_h と表すことにする。以下では T を所与として、次の補題を証明する¹⁰。

補題 1 次の条件が満たされるとき、そしてそのときのみ、 $\gamma_k < 0$ が成立する。

$$b_2(T) < b_{2,k}^*(b_1(T)) \equiv \frac{\omega_k^*(b_1(T))}{\sin \omega_k^*(b_1(T))} \quad (27)$$

ここで、 $\omega_k^*(b_1(T))$ は、方程式 $\xi(\omega) \equiv b_1(T) - (\omega/\tan \omega)$ の区間 $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ における一意の解である。

証明. まず、 $\gamma_k = 0$ が成立し、ある複素根が純虚根となる条件について考える。(25) と (26) より次の式が得られる。

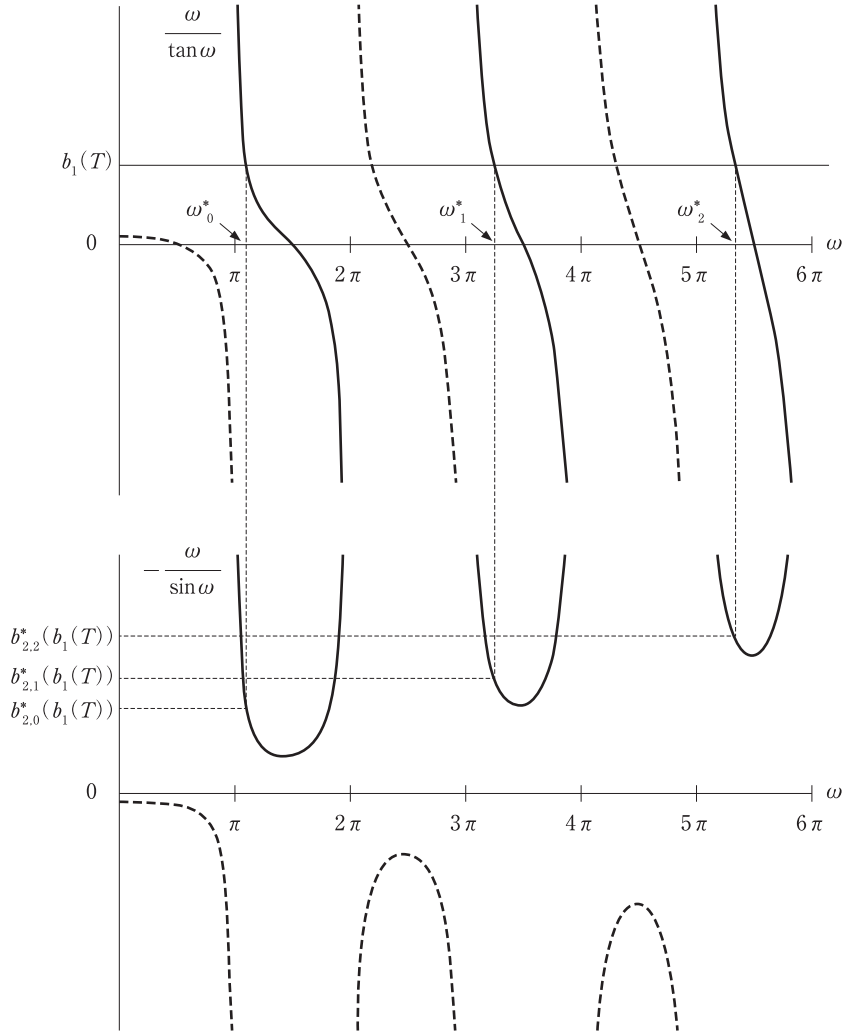
$$\gamma_k = b_1(T) - \frac{\omega_k}{\tan \omega_k} \quad (28)$$

よって、 $\gamma_k = 0$ のとき $\xi(\omega_k) = 0$ が成立する。 $\omega_k/\tan \omega_k$ は、パラメータに依存せず、 ω_k の値のみによって決定される。このグラフが、図 2 の上の図に描かれている。 ω_k は、 $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ に属することがわかっているので、グラフはこの区間については実線で、これ以外の区間については破線で描かれている。 $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ に属する $\xi(\omega) = 0$ の解を $\omega_k^*(b_1(T))$ と定義しているのので、図 2 の上の図に描かれているように、 $\omega/\tan \omega$ のグラフの実線部分と、 $b_1(T)$ で水平な直線との交点が、各 $\omega_k^*(b_1(T))$ となる。この図から明らかなように、 $\omega_k^*(b_1(T))$ は各区間 $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ において一意に決定される¹¹。

10 Hayes (1950) も同様の方程式の解の特徴について考察している。しかし Hayes の定理は、複素根と実根を含むすべての根の実部が負であるための必要十分条件を与えたものである。このため、ジャンプ変数を含む動学体系の決定性について論じる際には、直接応用できない。

11 $\tan \omega > 0$ となるのは、 $((2k+1)\pi, (2k+\frac{3}{2})\pi)$ の区間であるので、 $b_1(T) > 0$ であることを考慮すると $\omega_k^*(b_1(T)) < (2k+\frac{3}{2})\pi$ が成立することがわかる。

図2 $b_{2,k}^*(b_1(T))$ の決定



$\gamma_k = 0$ のとき、(23) より次の式が得られる。

$$b_2(T) = -\frac{\omega_k}{\sin \omega_k} \quad (29)$$

(29) の右辺も、パラメータに依存せず ω_k の値にのみによって決定される。このグラフは図2の下の図のようになる。各 $\omega_k \in ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ について、(29) を満たす $b_2(T)$ の値は一意に決まる。 $\omega_k = \omega_k^*(b_1(T))$ を、(29) に代入すると、 $b_2(T) = b_{2,k}^*(b_1(T))$ を得る。所与の $b_1(T)$ に対して、この式が成立するならば、 $\gamma_k = 0$ が成立する。図2には、所与の $b_1(T)$ に対して、2つのグラフを介して各 $b_{2,k}^*(b_1(T))$ が一意に得られることが示されている。

続いて、 $b_{2,k}^*(b_1(T))$ が、 γ_k の符号を決定する $b_2(T)$ の閾値となることを示す。 $b_2(T) \neq 0$ であるので、(26) より、次の式が得られる。

$$\frac{d\omega_k}{db_2(T)} = -\frac{1}{b_2(T)G'(\omega)} \quad (30)$$

各区間 $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ において、 $G'(\omega) = \frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\tan^2 \omega} - \omega < 0$ であるので、(30) は正となる。これより、 $b_2(T) < b_{2,k}^*(b_1(T))$ のとき、 $\omega_k < \omega_k^*(b_1(T))$ となる。図 2 の上の図に示されているように、 $\omega/\tan \omega$ は各区間 $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ において ω の減少関数である。このため、(28) より次のことが言える。

$$\gamma_k = b_1(T) - \frac{\omega_k}{\tan \omega_k} < b_1(T) - \frac{\omega_k^*(b_1(T))}{\tan \omega_k^*(b_1(T))} = 0$$

つまり、 $b_2(T) < b_{2,k}^*(b_1(T))$ のとき、 $\gamma_k < 0$ が成立する。同様の方法で、 $b_2(T) > b_{2,k}^*(b_1(T))$ のとき、 $\gamma_k > 0$ が成立することを示すことができる。 $b_2(T) = b_{2,k}^*(b_1(T))$ のとき、 $\gamma_k = 0$ となることはすでに述べた通りであるので、 $b_2(T) < b_{2,k}^*(b_1(T))$ が、 $\gamma_k < 0$ となるための必要十分条件である。□

補題 1 より、すべての複素根の実部が負になるための必要十分条件も導出することができる。

系 1 $b_2(T) < b_{2,0}^*(b_1(T))$ が成立するとき、そしてそのときのみ、特性方程式 $\Phi(\lambda T) = 0$ のすべての複素根の実部は負となる。

証明. $\xi(\omega_k^*(b_1(T))) = 0$ を用いて、(27) を書き換えると、 $b_{2,k}^*(b_1(T))$ についての次の式を得る。

$$b_{2,k}^*(b_1(T)) = b_1(T) \sqrt{1 + \frac{\omega_k^*(b_1(T))}{b_1(T)}} \quad (31)$$

任意の $k < h$ について、 $\omega_k^*(b_1(T)) < \omega_h^*(b_1(T))$ であるので、(31) より、 $b_{2,k}^*(b_1(T)) < b_{2,h}^*(b_1(T))$ が成立する。よって、 $b_2(T) < b_{2,0}^*(b_1(T))$ が成立するのであれば、すべての $k \geq 1$ について、 $b_2(T) < b_{2,k}^*(b_1(T))$ が成立する。このことは、すべての γ_k が負であることを意味する。一方、ある $k \geq 0$ について $\gamma_k \geq 0$ であるとすると、 $b_2 \geq b_{2,k}^*(b_1(T)) \geq b_{2,0}^*(b_1(T))$ であるので、 $b_2(T) < b_{2,0}^*(b_1(T))$ は満たされない。□

最後に、本稿のモデルにおいて、系 1 の条件が満たされることを確認する。(20)、(21) を用いて次のような関数を定義する。

$$\Lambda(T) \equiv \frac{b_2(T) - b_1(T)}{T} = g^*(T) - \frac{1}{\eta} q_M + \frac{1}{\eta} (q_C - q_M) e^{-g^*(T)T}$$

以下では、 $\Lambda(T)$ の符号を示すことで、 $b_1(T)$ と $b_2(T)$ の大小関係を明らかにする。このために、次のような新しい関数を定義する。

$$F_0(T) \equiv g^*(T) - \frac{\bar{\Pi}}{\eta} + \frac{\bar{\Pi}}{\eta} e^{-g^*(T)T}$$

これは、 $F(g^*(T), T)$ に $\rho = 0$ を代入したものと等しい。 $\partial F(g^*(T), T)/\partial \rho = \partial F(g^*(T), T)/\partial \bar{g} = 1 - a(T) > 0$ であるので、任意の $\rho > 0$ について $F_0(T) < F(g^*(T), T) = 0$ が成立する。

$F_0(T)$ と $\Lambda(T)$ の差をとると次の関係を得る。

$$F_0(T) - \Lambda(T) = \frac{1}{\eta} (q_M - \bar{\Pi}) + \frac{1}{\eta} [\bar{\Pi} - (q_C - q_M)] e^{-g^*(T)T}$$

$e^{-g^*(T)T} = 0$ (つまり $T \rightarrow \infty$) のとき、 $F_0(T) - \Lambda(T) = \frac{1}{\eta} (q_M - \bar{\Pi})$ である。 $q_M > \bar{\Pi}$ であ

ることを考慮すると、これは明らかに正である。また、 $e^{-g^*(T)T} = 1$ (つまり $T \rightarrow \underline{T}$) のとき、 $F_0(T) - \Lambda(T) = \frac{1}{\eta}(2q_M - q_C) = \frac{\bar{\Pi}}{\eta} \left(2\frac{1+\alpha}{\alpha} - \alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} \right) > 0$ である¹²。 $F_0(T) - \Lambda(T)$ は $e^{-g^*(T)T}$ について単調であることは明らかなので、すべての $e^{-g^*(T)T} \in (0, 1)$ について、 $F_0(T) - \Lambda(T) > 0$ 、すなわち、 $\Lambda(T) < F_0(g^*(T)) < 0$ である¹³。任意の $T \in (\underline{T}, \infty)$ について、 $\Lambda(T) < 0$ ということは、任意の $T > \underline{T}$ について $b_2(T) < b_1(T)$ が成立する。

さらに、(31) より、 $b_1(T) < b_{2,0}^*(b_1(T))$ であることは明らかである。このことから、任意の $T > \underline{T}$ について、系 1 の条件が満たされることが確認できる。つまり、 $\Phi(\lambda T) = 0$ のすべての複素根の実部は負である。

3.2.6 決定性

これまでの議論をまとめると、 $\Phi(\lambda T) = 0$ は、1つの正の実根と、無限個の負の実部の複素根を持つ。特性方程式 $\Delta_2(\lambda) = 0$ についても同様のことが成り立つので、我々は次の命題を得る。

命題 2 有限の $T > \underline{T}$ に対して、特性方程式 $\Delta_2(\lambda) = 0$ は正の実部を持つ根を 1 つだけ持つ。よって、 $\nu^*(T)$ は有限の $T > \underline{T}$ に対して局所的に決定である。

命題 1 と命題 2 は、特許期間の長さによらず BGP は局所的に決定である、ということを示している。また、収束根に複素根を含むため、経済は振動しながら BGP に収束していく。この結果は、離散時間の動学モデルを用いて、特許期間が BGP の安定性に与える影響について分析した Futagami and Iwaisako (2007) の結果と整合的である。

同様の分析によって、この結論は、Iwaisako and Futagami (2003, 2013) で分析されているような、政府が、模倣企業に対する罰金の大きさとして特許範囲をコントロールし、独占企業が模倣企業を排除するため limit pricing を行うケースにおいても成立することが確認できる。つまり、特許期間も特許範囲も、経済の安定性に影響を与えることはない。

4 結論

本稿では、Iwaisako and Futagami (2003) によって提示された有限な特許期間を持つ R&D モデルの局所的な動学分析を行った。モデルより導出される微分差分方程式体系の無限個の固有値について検討を行った結果、その均斉成長経路 (BGP) は特許期間の長さによらず、局所的に決定であることが示された。

R&D に基づく内生的成長理論においては、R&D にインセンティブを与えるための特許制度が重要であることはよく知られている。しかし、内生的成長理論の一時の隆盛の下でも、その重要性に比して、特許期間についての分析、とくに特許期間が経済の動学的性質に与える影響について十分に検討されてきた

12 符号は α のみに依存するので数値的に確認することが可能である。

13 $\alpha < 0.5$ のとき、 $1 - \left(\alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{1+\alpha}{\alpha} \right) < 0$ なので、 $F_0(T) - \Lambda(T)$ は $e^{-g^*(T)T}$ について単調減少である。よって、 $e^{-g^*(T)T} = 1$ について $F_0(T) - \Lambda(g^*) > 0$ ならば、任意の $e^{-g^*(T)T} < 1$ について $F_0(T) - \Lambda(T) > 0$ である。反対に $\alpha > 0.5$ のときは、 $F_0(T) - \Lambda(T)$ は $e^{-g^*(T)T}$ について単調増加である。よって、 $e^{-g^*(T)T} = 0$ について $F_0(T) - \Lambda(T) > 0$ ならば、任意の $e^{-g^*(T)T} > 0$ について $F_0(T) - \Lambda(T) > 0$ である。

とは言い難い。これは、モデルより必然的に導出される微分差分方程式体系の扱いづらさがその一因となっていると考えられる。本稿では、微分差分方程式体系の安定性を判定するための分析手法を用いて、内生的成長理論の初期のモデルに基づいた既存の有限期間の特許モデルについて動学分析を行った。本稿の分析手法を、後発の理論モデルにも適用していくことが可能となれば、より一層の研究の発展が期待できる。

●参考文献

- Aghion, P. and P. Howitt (1992), “A model of growth through creative destruction,” *Econometrica* 60(2), pp. 323–351.
- Asada, T. and H. Yoshida (2000), “Stability, instability and complex behavior in macrodynamic models with policy lag,” *Discrete Dynamics in Nature and Society* 5(4), pp. 281–295.
- Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin (2004), *Economic Growth*, Second edition, Cambridge: MIT Press.
- Boldrin, M. and D. K. Levine (2002), “Factor saving innovation,” *Journal of Economic Theory*, 105(1), pp. 18–41.
- Boucekkine, R., D. de la Croix, and O. Licandro (2004), “Modelling vintage structures with DDEs: Principles and applications,” *Mathematical Population Studies* 11(3-4), pp.151–179.
- Boucekkine, R., O. Licandro, L. A. Puch, and F. del Rio (2005), “Vintage capital and the dynamics of the AK model,” *Journal of Economic Theory* 120(1), pp. 39–72.
- De Cesare, L. and M. Sportelli (2005), “A dynamic IS-LM model with delayed taxation revenues,” *Chaos, Solitons and Fractals* 25(1), pp. 233–244.
- Deneckere, R. and K. L. Judd (1992), “Cyclical and chaotic behavior in a dynamic equilibrium model, with implications for fiscal policy,” *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, ed. by J. Benhabib, chap. 14, pp. 308–329, Princeton: Princeton University Press.
- Furukawa, Y. (2007a), “Endogenous growth cycles,” *Journal of Economics* 91(1), pp. 69–96.
- Furukawa, Y. (2007b), “The protection of intellectual property rights and endogenous growth: Is stronger always better?” *Journal of Economic Dynamics and Control* 31(11), pp. 3644–3670.
- Futagami, K. and T. Iwaisako (2007), “Dynamic analysis of patent policy in an endogenous growth model,” *Journal of Economic Theory* 132(1), pp. 306–334.
- Grossman, G. M. and E. Helpman (1991), “Quality ladders in the theory of growth,” *Review of Economic Studies* 58(1), pp. 43–61.
- Guerrini, L. and M. Sodini (2013), “Dynamic properties of the Solow model with increasing or decreasing population and time-to-build technology,” *Abstract and Applied Analysis* Vol. 2013, Article ID 280925, 7 pages.
- Hayes, N. D. (1950), “Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation,” *Journal of the London Mathematical Society* 1(3), pp. 226–232.
- Helpman, E. (1993), “Innovation, imitation, and intellectual property rights,” *Econometrica* 61(6), pp. 1247–1280.
- Iwaisako, T. and K. Futagami (2003), “Patent policy in an endogenous growth model,” *Journal of Economics* 78(3), pp. 239–258.
- Iwaisako, T. and K. Futagami (2013), “Patent protection, capital accumulation, and economic growth,” *Economic Theory* 52, pp. 631–668.
- Judd, K. L. (1985), “On the performance of patents,” *Econometrica* 53(3), pp. 567–586.
- Kwan, Y. K. and E. L.-C. Lai (2003), “Intellectual property rights protection and endogenous economic growth,” *Journal of Economic Dynamics and Control* 27(5), pp. 853–873.

- Li, C.-W. (2001), "On the policy implications of endogenous technological progress," *Economic Journal* 111, pp. C164–C179.
- Matsumoto, A. and F. Szidarovszky (2011), "Delay differential neoclassical growth model," *Journal of Economic Behavior and Organization* 78(3), pp.272–289.
- Matsumoto, A. and F. Szidarovszky (2013), "Asymptotic behavior of a delay differential neoclassical growth model," *Sustainability* 5(2), pp.440–455.
- Matsuyama, K. (1999), "Growing through cycles," *Econometrica* 67(2), pp. 335–347.
- Nordhaus, W. D. (1969), *Invention, Growth, and Welfare: Theoretical Treatment of Technical Change*, Cambridge: MIT Press.
- O'Donoghue, T. and J. Zweimuller (2004), "Patents in a model of endogenous growth," *Journal of Economic Growth* 9(1), pp. 81–123.
- Rivera-Batiz, L. A. and P. M. Romer (1991), "Economic integration and endogenous growth," *Quarterly Journal of Economics* 106(2), pp. 531–555.
- Romer, P. M. (1990), "Endogenous technological change," *Journal of Political Economy* 98(5), pp. S71–S102.
- Shinagawa, S. (2013), "Endogenous fluctuations with procyclical R&D," *Economic Modelling* 30(1), pp. 274–280.
- Tsuzuki, E. (2014), "A New Keynesian model with delay: monetary policy lag and determinacy of equilibrium," *Economic Analysis and Policy* 44(3), pp. 279–291.
- Wälde, K. (2005), "Endogenous growth cycles," *International Economic Review* 46(3), pp. 867–894.
- Yoshida, H. and T. Asada (2007), "Dynamic analysis of policy lag in a Keynes–Goodwin model: stability, instability, cycles and chaos," *Journal of Economic Behavior and Organization* 62(3), pp. 441–469.