＜論　　説＞

# リスクプレミアムと不確実性プレミアムの トレード＝オフ

玉　井　義　浩

## 1　序

非自発的失業を生み出す要因として，名目賃金の下方硬直性ではなく，実質賃金そのものの調整を困難とするメカニズムが，暗黙の契約理論，効率賃金仮説など，いわゆる「新しいケインズ経済学」と呼ばれる一連の研究によって指摘されてきた。こうした実質賃金の硬直性は，Akerlof and Yellen（1985）や Ball and Romer（1990）によって，メニューコストなど，名目価格を硬直的にするメカニズムと結合した場合に極めて強固な名目価格の硬直性と貨幣の非中立性を生む要因になるものとして重視されている。

実質賃金の硬直性の理論的根拠のうち，暗黙の契約理論で指摘されたのは，硬直的な実質賃金のもつ，労働者の所得安定という一種の保険の機能である（Azariadis（1975））。この研究はその後，Grossman and Hart（1981），Azariadis and Stiglitz（1983）などによって労使間の非対称情報の下での分析に発展した。

これらの研究は，企業業績の正確な評価が経営者側の私的情報であるという，勤労者側の不完全情報から硬直的な実質賃金を導き出している。すなわち，過度に企業業績に連動した賃金は，企業側が業績を偽って低めに公表するというモラルハザードの原因となるために均衡とはならず，外生的なショックに対する調整は賃金ではなく雇用量で行なわれる，というものである。

しかし，勤労者側ではなく企業側が情報劣位にあり，勤労者側にモラルハザードが生じうる場合に硬直的な実質賃金を労使間のリスクシェアリングの枠組みから導出するのは困難である。経営側をプリンシパル，勤労者側をエージェントとし，勤労者側の就業態度が観察不能なプリンシパル・エージェント問題では，通常，勤労者のモラルハザードを防ぎ，高い努力を促すために，成果にきめ細かく連動した，いわば「成果主義賃金」ともいうべき賃金体系が最適となる。

しかし，この結論は，勤労者の努力と成果の間の確率的な関係が単調尤度比条件を満たしていて，しかもその確率分布については経営者にも勤労者にも異論がない，という仮定に依拠している。例えば，勤労者の側が，努力と成果の間の確率的な関係について一部疑念を抱くという，ナイト流の不確実性に直面し，その選好順序が，Gilboa and Schmeidler（1989）によって公理が与えられたような，複数の確率分布に基づく Maximin の期待効用（MMEU）で表現されるとい

う，「不確実性回避的」なものである場合，成果に細かく連動した賃金が最適となる保証はない。

本稿は，ナイト流不確実性をプリンシパル・エージェント問題に応用し，勤労者の努力水準が観察不能な非対称情報の枠組みの下でも，勤労者がナイト流不確実性に直面している場合は，複数の低位の成果については賃金を固定するという，完全情報下における暗黙の契約理論が元来想定していた賃金体系に近い契約が均衡となりうることを示した上で，その要因を分析したものである。

ナイト流不確実性のプリンシパル・エージェント問題（PA 問題）への応用については，少数ながら先行研究が存在する。例えば Ghirardato（1994）は Schmeidler（1989）によって公理が与えられた，Choquet 積分による期待効用（CEU）によるナイト流不確実性の表現に基づき，成果に負の連動をするような報酬スキームが均衡となる可能性を指摘する。Mukerji（2003）は政府調達契約の分析を行ない，発注側（プリンシパル）より受注側（エージェント）の方がより不確実性回避的な選好をもつ場合，成果の増加に対する報酬の変化率は，受注側の不確実性回避の度合いが大きいほど小さくなることを指摘している。Karni（2009）は PA 問題についての公理を与えた上で，エージェントの効用が複数の確率分布についての MMEU で表現される場合の PA 問題を，成果が 2 つの異なる値を取る場合について分析している。

一方，Lopomo, Rigotti and Shannon（2011）は，エージェントが不確実性回避的で，成果がより多くの複数の有限個の値をとるより一般的なケースを Bewley（1986）の，選好が完備性をもたないような枠組みで分析し，最適解として，成果が 2 つのグループに分けられ，それぞれのグループに属する成果に関しては賃金支払額が固定されるという賃金スキームが得られることが示される。

上記に対し，玉井（2004a, b）は，成果が取りうる値の集合は Lopomo 他（2011）と同様，複数の要素からなる有限集合であり，エージェントの側がナイト流不確実性に直面するような PA 問題を分析しているが，Lopomo 他（2011）とは異なり，固定給は相対的に低位の成果についてのみ支払われ，高位の成果については成果に応じた変動給が支払われるような固定給・成果給混合型の賃金スキームが解となりうることを示した。Lopomo 他（2011）との最大の違いは，ナイト流不確実性の定式化の違いにある。玉井（2004a, b）においては，Lopomo 他とは異なり，選好は完備性をあくまで備えているが，Nishimura and Ozaki（2006）によって公理が与えられた，$\varepsilon$-contamination と呼ばれる確率分布の集合に基づく MMEU による選好表現を用い，上記の結論を得ている。

玉井（2011）は玉井（2004a, b）のような結論がなぜ得られるのかを，逆効用関数が 1 次と 2 次の例について明らかにしたものである。勤労者（エージェント）が $\varepsilon$-contamination の意味でのナイト流不確実性に直面する場合，プリンシパルの賃金支払額の期待値に，エージェント側のリスク回避的な選好に起因する厚生悪化を補償するコスト（従来型の PA 問題における「リスク

プレミアム」）の他に，不確実性回避的な選好に起因する厚生悪化を補償するためのコスト（不確実性プレミアム）が含まれる。そのため，エージェントがリスク中立的であるが不確実性回避的な選好をもっている場合，最適契約が，「成果がとりうる最高位以外のものであった場合の全てについて報酬が固定給となる」という性質のものになる。エージェントが不確実性回避的であるとともにリスク回避的でもある場合は，部分的固定給が支払われる対象となる成果の範囲はリスク中立的であるケースより縮小するが，その範囲を決めているのは，リスクプレミアム最小化と不確実性プレミアム最小化のトレード・オフである。

本稿は，エージェントの効用関数が玉井（2011）で扱われた例よりも一般的な場合についても，最適契約における固定給の範囲が不確実性プレミアム最小化とリスクプレミアム最小化のトレード・オフによって決まることを明らかにした上で，不確実性プレミアムとリスクプレミアムが乗法分離型となる，対数効用関数のケースについて，1．エージェントのモラルハザードを防ぎつつ，固定給の対象となる成果をより高位の成果まで拡大するように報酬を設計する事は，プリンシパルにとって，不確実性プレミアムの節約に寧ろ貢献するが，リスクプレミアムの増加を伴うこと，エージェントの直面するナイト流不確実性の深刻度（パラメーター $\varepsilon$ の大きさ）が上昇すると，最適な固定給の範囲が拡大すること，を明らかにしたものである。

本稿が明らかにする不確実性プレミアムの存在を考えた場合，ナイト流不確実性を含む PA 問題において Karni (2009) のように成果の取りうる値を 2 種類に限定することは不十分であり，ナイト流不確実性が均衡に与える固有の効果を捉えるには，少なくとも成果の取りうる値は 3 種必要であることがわかる。選好が複数の確率分布の束からなる MMEU で表現されるような，不確実性回避的なエージェントにとって，努力のインセンティヴを引出すための賃金スキームが含む賃金の実現値の変動がもたらす厚生損失は，受け取る賃金の実現値の分散（期待値に対する上下両方向の乖離）よりも，寧ろ，最小の実現値が期待値から下方にどれだけ乖離するか，によって発生する。ところが，賃金の期待値が同じで分散が異なる 2 つの賃金スキームがあった場合，成果が 2 種類の値しか取らない場合，分散がより大きな賃金スキームは賃金の最小値も小さくなるため，リスク回避的なエージェントも不確実性回避的なエージェントも，より分散の小さな賃金スキームをより好むという点では変わらない。

しかし，もし成果の取りうる値（賃金の取りうる値）が 3 種以上であれば，期待値と分散が同じ，2 つの異なる賃金スキームが，従来型の PA 問題のエージェントにとっては無差別だが不確実性回避的なエージェントにとっては無差別ではない，ということが生じうる。例えば状態 1, 2, 3 に対応した賃金支払い額（$w_1, w_2, w_3$）について，報酬スキーム A（$w_1^A < w_2^A < w_3^A$）と B（$w_1^B < w_2^B < w_3^B$）がともに期待値，分散を同じくし，リスク回避的なだけのエージェントは両者を無差別と感じたとしても，不確実性回避的なエージェントは，最下位の支払額 $w_1$ がより大きく中位の支払額 $w_2$ のより小さなスキームをより強く好む，ということが生じうる。

このような選好をもつエージェントを相手にする場合，プリンシパルは，エージェントのモラ

ルハザードを防ぎ努力のインセンティヴを与えるために高位の成果についての報酬を高める必要がある一方，平均的な報酬と最低賃金の乖離がもたらすエージェントの厚生損失にも留意する必要がある。その場合，成果連動型の契約が含むインセンティヴ強化の機能を，より高位の成果に集約した方が不確実性プレミアムの節約に寄与する。

論文の以下の構成は次のとおりである。まず第2節で，玉井（2011）でも議論された基本モデルと基本命題を解説する。第3節では，不確実性プレミアム最小化とリスクプレミアム最小化のトレード・オフを，エージェントの効用関数がより一般的なケースについて分析する。第4節では，不確実性プレミアムとリスクプレミアムが乗法分離型となるケースについて，エージェントの直面するナイト流不確実性の深刻度（$\varepsilon$）の大きさ等と固定給の範囲の大きさについての比較静学を示し，第5節で結論を示す。

## 2　リスク中立的なプリンシパルと不確実性回避的なエージェント間のプリンシパル＝エージェント問題

### 2.1　基本モデル

本節では玉井（2011）で分析された，ナイト流不確実性を含むプリンシパル・エージェント問題（以下PA問題）と基本命題を概説する。分析の対象は単一のプリンシパルとエージェント間のインセンティヴ契約であり，エージェントが努力を遂行し，その結果として得られる成果に対してプリンシパルが事前の取り決めに従って報酬を払う状況を考える。成果の値 $x$ はスカラー値であり，実現しうる $x$ の集合は有限集合 $X \equiv \{x_1, x_2, ..., x_n\}$（ただし $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$）とし，$n \geq 3$ とする。プリンシパルは報酬（賃金）契約をエージェントに対して提案し，エージェントがそれを受容し契約を締結するか否かを決定する。契約を締結したエージェントの職務遂行の結果，ある1つの成果の値 $x_i \in X$ が実現する。職務遂行の際，エージェントは，ある努力水準 $a$ を選択する。成果 $x_i$ は観察可能で客観的に立証可能である一方，エージェントが行なう努力水準 $a$ の選択はエージェントの私的情報であるため，賃金を努力水準に関連付けることは不可能で，賃金は成果 $x_i$ にのみ条件付けることができる。$w_i$ は，成果 $x_i$ に対して支払われる賃金を表すものとする。

エージェント側が選択することのできる努力水準の種類は2種類 $\{a_0, a_1\}$ である。$a_j$ の努力を行なうことは，エージェントにとって効用の単位で $c(a_j)$ の厚生損失（努力のコスト）を意味する。$c(a_0) < c(a_1)$ とし，$a_1$ がより大きな労苦を伴う努力を表す。

#### 2.1.1　努力と成果の確率的関係

どの成果がどの確率で実現するかは，エージェントの努力水準に依存する。記号 $p_i(a_j)$ $(i \in$

$\{1, ..., n\}$，$j \in \{0, 1\}$）で努力水準 $a_j$ $(j=1, 2)$ をエージェントが選択したときの成果 $x_i$ の出る確率を表すことにする（$\sum_{i=1}^{n} p_i(a_j)=1$ が成立する）。この確率分布について，以下を仮定する。

**仮定 1.** $p_i(a_j)>0 \quad \forall_i \in \{1, ..., n\}, \ j \in \{0, 1\}$.

**仮定 2.（単調尤度比条件：Monotone Likelihood Ratio Condition :（MLRC））**

尤度比 $\pi_i \equiv \dfrac{p_i(a_1)-p_i(a_0)}{p_i(a_1)}$ $(i=1, ..., n)$ が $i$ の単調増加列（$\pi_1<\pi_2<\cdots<\pi_n$）である。

仮定 2 は，$\dfrac{p_i(a_1)}{p_i(a_0)}$ が $i$ の増加列になることと同値であり，より高い水準の（エージェントにとってより効用コストの高い）努力をエージェントが選択すれば，高い値の成果がより高確率で実現するようになることを意味する。

### 2.1.2　プリンシパルの選好

プリンシパルはリスク中立的であり，更に，上記の確率分布について確固たる信念をもっている（何らのナイト流不確実性に直面していない）ものとする。つまり，エージェントが努力水準 $a_j$ を選択することを所与とした場合のプリンシパルの選好順序はプリンシパルの取り分の期待値 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-w_i)p_i(a_j)$ によって表現される。

### 2.1.3　エージェントの選好

一方，エージェントはリスク中立的またはリスク回避的であり，同時に不確実性回避的な選好をもっているものとする。つまり，エージェントの側は自身の努力 $a_j$ と成果の間の確率的な関係が，$(1-\varepsilon)\times 100\%$ の度合いで $(p_1(a_j), p_2(a_j), ..., p_n(a_j))(\equiv \mathbf{p}(a_j))$ であると確信しているものの，$\varepsilon\times 100\%$ の度合いで，この確信が全く誤りで，自分が確率について完全に無知であり，最悪のシナリオを想定しなければならないことを考慮する。このモデルの文脈に沿って言えば，$a_1$ を $a_0$ の代わりに選んだとしても高い $x_i$ の実現確率の上昇に寄与しないばかりか確率の低下に寄与することすらあるかもしれない，とエージェントは考える。エージェントの選好順序は，単一の確率分布に基づく期待効用ではなく，$\mathbf{p}(a_j)$ についての“$\varepsilon$-contamination”と呼ばれる複数の確率分布の束についての，maximin の期待効用（Maximin Expected Utility : 以下 MMEU）によって表現される。

$\mathbf{p}(a_j)$ についての“$\varepsilon$-contamination”とは以下のように定義される。

$$\mathbf{p}^{\varepsilon}(a_j) \equiv \{(1-\varepsilon)\ \mathbf{p}(a_j)+\varepsilon\mathbf{q} | \mathbf{q} \in Q\}$$

ここで，$Q$ は $X$ 上のあらゆる確率分布の集合であり，$\varepsilon$ が大きいほど，エージェントの直面するナイト流不確実性がより深刻であることを意味する。

$u(w_i)$ を，賃金 $w_i$ に対応するエージェントの効用インデックスとする。$u'>0$ かつ，$u''\leq 0$ とし，つまりエージェントがリスク中立的またはリスク回避的の，いずれのケースも検討するこ

とにする。

エージェントが $a_j$ を選んだ場合の $\mathbf{p}^{\varepsilon}(a_j)$ についての MMEU は，

$$\sum_{\min \mathbf{p} \in \mathbf{p}^{\varepsilon}(a_j)} [u(w_i) - c(a_j)] p_i(a_j) = E^{\varepsilon}[u(w_i)|a_j] - c(a_j) \tag{1}$$

であり，期待値の線形性から，努力のコスト $c(a_j)$ を控除する前のグロスの MMEU である $E^{\varepsilon}[u(w_i)|a_j]$ について，

$$E^{\varepsilon}[u(w_i)|a_j] \equiv (1-\varepsilon) \sum_{i \in I} u(w_i) p_i(a_j) + \varepsilon u(\min(w_i)) \tag{2}$$

が成立する（上記のような MMEU で表されるような選好順序が満たす公理については，Nishimura and Ozaki（2006）を参照）。

## 2. 2　最適契約

プリンシパルとエージェントの選好順序は，$\varepsilon$ の値も含め，プリンシパル，エージェント双方にとって既知の情報であると仮定する。$I$ を，添字の集合 $I \equiv \{1, 2, ..., n\}$ とする。プリンシパルにとっての最適化問題は，以下のように定義される。

$$\max_{a,\, \mathrm{w}} \sum_{i \in I} (x_i - w_i) p_i(a)$$

$$s.t. \tag{3}$$

参加合理性(IR)：　$E^{\varepsilon}[u(w)|a] - c(a) \geq \underline{u}$

誘因整合性(IC)：　$E^{\varepsilon}[u(w)|a] - c(a) \geq E^{\varepsilon}[u(w)|a'] - c(a') \quad \forall a' \neq a$

ただし $\underline{u}$ はエージェントが契約外にもっている機会から得られる効用である。

プリンシパルの利得が成果の期待値 $E(x|a)$ と賃金コストの期待値 $E(w|a)$ とに加法分離となっているため，Grossman and Hart（1983）に倣って問題を2段階に分けることができる。すなわち，第1段階で，プリンシパルが，エージェントに $a_j$ を実行させることを所与とした場合に賃金コストの期待値 $E(w|a)$ を最小化するインセンティヴスキーム $\mathbf{w} \equiv (w_1, w_2, ..., w_n)$ を考え，第2段階で，$a_0$, $a_1$ のどちらを実行させるのがプリンシパルにとって得策か，を考える，という形に問題を分割できる。以下では専ら第1段階の期待賃金コスト最小化問題に議論を特化する。

## 2. 3　期待賃金コスト最小化問題

### 2. 3. 1　問題

エージェントの効用インデックスの単調性から，効用インデックス関数 $u$ の逆関数 $w(u_i) \equiv$

$u^{-1}(u_i)$を用いて「エージェントに$u_i$の効用を実現する賃金」を表し，更に尤度比$\pi_i \equiv \frac{p_i(a_1)-p_i(a_0)}{p_i(a_1)}$を用いて，$a_j\,(j=0,1)$をエージェントに実行させることを所与としたプリンシパルにとっての期待賃金コスト最小化問題を，以下のように表すことができる。

$$\min_{(u_1,\ldots,u_n)} \sum_{i\in I} w(u_i)\,p_i(a_j)$$

$$s.t. \tag{4}$$

$$(\mathrm{IR}):\quad (1-\varepsilon)\sum_{i\in I} u_i p_i(a_j) + \varepsilon \min\{u_1,\ldots,u_n\} - c(a_j) \geq \underline{u}$$

$$(\mathrm{IC}):\quad \sum_{i\in I} u_i \pi_i p_i(a_1) \begin{cases} \geq \dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon} & a_1\text{を実行させる場合} \\ \leq \dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon} & a_0\text{を実行させる場合} \end{cases}$$

ただし$\Delta c \equiv c(a_1)-c(a_0)$である。この定式化の利点は，制約条件の全てが線形となることにある。言うまでもなく，$u''<0$と$w''>0$が，$u''=0$と$w''=0$が対応する。

なお，あらゆる$\Delta c\,(>0)$の値について(4)の問題の制約条件を満たす$\mathbf{u}$の集合が空でない，という事を保証するため，効用関数について以下の仮定をおく。

**仮定 3.** $u(w)$の定義域（または$w(u)$の値域）について，$w\in(\underline{w},\infty)$であり（$\underline{w}=-\infty$を含む），$\lim_{w\downarrow \underline{w}} u(w)=-\infty$である。

上記の問題(4)の最適解$\mathbf{u}^* \equiv (u_1^*,\ldots,u_n^*)$について，標準的な（ナイト流の不確実性のない）PA問題と同様の，以下の基本的事項が成立する。

**補題 1.** 仮定 1, 2 および 3 の下，(4)の最適解において，IR 制約は有効である。

**証明.** もしそうでないと仮定すると，プリンシパルにとってより低コストの契約$\mathbf{w}' \equiv (w(u_1'), w(u_2'),\ldots,w(u_n'))$すなわち$u_i'=u_i^*-\Delta\ \ \forall i$（ただし$\Delta>0$）が，IR, IC の両制約を満たす（$\Delta\sum_{i\in I}\pi_i p(a_1)=0$が，確率分布の性質から成立するので，$\sum_{i\in I} u_i^*\pi_i p_i(a_1)=\sum_{i\in I}(u_i^*-\Delta)\pi_i p_i(a_1)$）。これは$u^*$の最適性と矛盾する。　証明終

### 2.3.2　問題の別表現と不確実性プレミアム

補題 1 より，$\mathbf{u}$のうち IR 制約を等式で満たすものに注意を集中してよいことがわかる。そのような$\mathbf{u}$の集合を$\underline{\mathbf{IR}}$とおく。

一方，エージェントの効用の実現値$u_i$が，当該契約における最低賃金しかもらえない場合の効用$\min(\mathbf{u})$をどれだけ上回っているか，を$v_i \equiv u_i - \min(\mathbf{u})$で表すことにし，$v_i$からなるベクトル$\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}_+^n\backslash\mathbb{R}_{++}^n$と最低賃金しかもらえない場合の効用の和として$\mathbf{u}$を捉え直すと，$\mathbf{u}$（$=\min(\mathbf{u})*1^n+\mathbf{v}$）($1^n$は$(1,\ldots,1)$という$n$次元ベクトル）が$\underline{\mathbf{IR}}$の要素であることと，$\min(\mathbf{u})=-(1-\varepsilon)E(\mathbf{v}|a_j)+c(a_j)+\underline{u}$が成立することとは同値であり（ここで，$E(\mathbf{v}|a_j)\equiv\sum_{i\in I}u_i p_i(a_j)-\min(\mathbf{u})$である），かつ$\underline{\mathbf{IR}}$に含まれるベクトルは全て$\mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^n\backslash\mathbb{R}_{++}^n$と 1 対 1 に対応する[1]。

そこで，(4)の問題は，以下と同値になる。

$$\min_{a_j,\, v_i} \quad \sum_{i\in I} w\left[-(1-\varepsilon)E(\mathbf{v}|a_j)+c(a_j)+\underline{u}+v_i\right]p_i(a_j) \quad (j=0,1)$$

$$s.t. \tag{5}$$

非負制約　$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}$

誘因整合性(IC)制約　$\sum_{i\in I} u_i\pi_i p_i(a_1)\begin{cases}\geq \dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon} & a_1\text{を実行させる場合}\\ \leq \dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon} & a_0\text{を実行させる場合}\end{cases}$

IC（Incentive Compatibility）制約の左辺$\sum_{i\in I} u_i\pi_i p_i(a_1)$を，契約$\mathbf{v}$が含むインセンティヴ強度と呼ぶことにし，記号$I$で表す。

この定式化におけるプリンシパルの目的関数を，純然たる固定給（$\mathbf{v}=\mathbf{0}$）の周りでテイラー展開すると，

$$E(w)\equiv\sum_{i\in I} w(u_i)p_i(a_j)$$

$$=w(\underline{u}+c)+w'(\underline{u}+c)*\varepsilon E(\mathbf{v}|a_j) \tag{6}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i\in I} w''(\underline{u}+c+\theta_i(v_i-(1-\varepsilon)E(\mathbf{v})))\left[v_i-E(\mathbf{v})+\varepsilon E(\mathbf{v}|a_j)\right]^2\ p_i(a_j)$$

のように表すことができる。

この(6)から，従来型のPA問題と，本稿におけるナイト流不確実性を含んだPA問題の共通点と相違点を把握できる。まず共通事項として挙げられるのは，

1．仮にエージェントの努力水準が観察可能でモラルハザードが問題とならない場合は，(6)右辺の第2項以降がゼロとなる完全な固定給$\mathbf{v}=\mathbf{0}$が最適であること，

2．低水準の努力$a_0$は固定給によって実現可能であるので，$a_0$を実行させる問題においてIC制約は有効な制約ではない

の2点である。

一方，努力水準がエージェントの私的情報となる場合に高い水準の$a_1$を選ばせるには，IC制約を満たす何らかの形の変動給のインセンティヴスキームが必要となり，(6)の右辺の確実性等価$w(\underline{u}+c)$に上乗せしたプレミアムの負担がプリンシパルに発生することが不可避となる。これらのうち，第3項の2次項は，従来型のPA問題にも存在する，いわゆる「リスクプレミア

1　$\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}$であるので，$\mathbf{v}$と$1^n$は1次独立であるから，一般にスカラー$\kappa$とベクトル$\mathbf{v}$を用いた$\mathbf{u}=\kappa 1^n+\mathbf{v}$という変換において$\mathbf{u}\neq\mathbf{u}'$と“$\mathbf{v}\neq\mathbf{v}'$または$\kappa\neq\kappa'$”とは同値となる。

ム」に相当する。一方，第 2 項（1 次項）が，従来型の PA 問題では生じない，本稿のナイト流不確実性を含んだ PA 問題に固有の項である[2]。

この 1 次の項は，効用の期待値 $E(\mathbf{u}|a_j)$ から，最悪のケースにおける効用の実現値 $\min(\mathbf{u})$ がどれだけ乖離しているかを表した $E(\mathbf{v}|a_j)$ に比例する。このことは，エージェントがナイト流不確実性を回避したいという選好をもっており，最悪のシナリオの更なる悪化を重視する場合，変動給には賃金の変動による効用の悪化に加え，「賃金の最小値」の更なる悪化に起因する効用の悪化が加わることを意味し，プリンシパルの側には，その効用悪化を補償するための負担が生じることを意味する。そこで，以下，第 2 項（1 次の項）を「不確実性プレミアム」と呼ぶことにし，これと第 3 項（2 次の項）を加えたもの「総プレミアム」と呼ぶことにする。

以下では，これらのプレミアムの生じる問題，つまり，$a_1$ を選択させる際の費用最小化問題に議論を特化し，記号の簡略のため $a_1$ は可能な場合は省略し，$p_i, c, E(\mathbf{v})$ がそれぞれ $p_i(a_1)$, $c(a_1)$, $E(\mathbf{v}|a_1)$ を意味するものとする。

### 2. 3. 3　最適解

以下，$a_1$ を実行させることを所与としたプリンシパルの期待賃金コスト $E(w)$ の最小化問題の最適解を，まずエージェントがリスク中立的である場合について述べ，次いでエージェントがリスク回避的である場合の解を示す（いずれの場合も，エージェントは不確実性回避的とする）。まず，次の補題に言及しておく。

**補題 2.** $\varepsilon > 0$ かつ $u'' \leq 0$ とする。$a_1$ を非対称情報の下でエージェントに実行させることを所与とした問題(5)の最適解において，IC 制約は有効である。

**証明.** 仮に $\mathbf{v}^*$ が(5)の最適解であり，かつ $\sum_{i \in I} u_i^* \pi_i p_i > \dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon}$ であるとする。すると，十分に 0 に近いスカラー $\Delta(>0)$ について，$\mathbf{v}' \equiv (1-\Delta)\mathbf{v}^*$ もまた IC 制約を満たす。一方，テイラーの公式より

$$\sum_{i \in I} w[-(1-\varepsilon)E(\mathbf{v}') + c(a_1) + \underline{u} + v_i']p_i = \sum_{i \in I} w[-(1-\varepsilon)E(\mathbf{v}^*) + c(a_1) + \underline{u} + v_i^*]p_i$$

---

2　読者の中には，1 次の項は従来型の標準的な PA 問題においてもプリンシパルとエージェントの主観的確率分布が異なれば消え去ることはなく，1 次の項の存在はナイト流不確実性に固有のものではない，と考える向きもあるかもしれない。例えば，エージェントの成果の分布についての主観的な確率分布が

$$\text{Prob.}(x = x_i\,|a_j) = \begin{cases} (1-\varepsilon)\,p_i\,(a_j) & \text{if} \quad i = 2, \ldots, n \\ (1-\varepsilon)\,p_1(a_j) + \varepsilon & \text{if} \quad i = 1 \end{cases},$$

のようなものであり，この単一の確率分布に基づいてエージェントが利得を評価する場合，$w' * \varepsilon(E(\mathbf{u}|a_j) - u_1)$ というような 1 次の項が出現する。しかし，この場合，$n \geq 3$ であるのでプリンシパルは，エージェントの努力のインセンティヴを損ねることなく，この項をいくらでも小さく（場合によっては負にも）できる。例えば $\sum_{i \neq 1} u_i \pi_i p_i$ をできるだけ大きくとってインセンティヴを確保すれば，$(E(\mathbf{u}|a_j) - u_1)$ をいくらでも小さくできる。従って，本稿における 1 次の項 $w' * E(\mathbf{v}|a_j) = w' * \varepsilon(E(\mathbf{u}|a_j) - \min(\mathbf{u}))$ は $w' * \varepsilon(E(\mathbf{u}|a_j) - u_1)$ と根本から性質を異にしているのである（min $\mathbf{u}$ と $u_1$ の違いに注意）。

$$-\Delta\left\{Cov[w'(u_i^*),\, v_i^*]+\varepsilon E(\mathbf{v}^*)\sum_{i\in I}w'(u_i^*)p_i\right\}+\frac{1}{2}\,o(\Delta^2) \tag{7}$$

が成立する。ここで，$u_i^*\equiv-(1-\varepsilon)E(\mathbf{v}^*)+c(a_1)+\underline{u}+v_i^*$であり，$Cov(w'(u_i^*), v_i^*)$は$w'(u_i^*)$と$v_i^*$の共分散を意味し，$w''\geq 0$よりその符号は非負である。$\Delta$が十分に0に近いので(7)は，$w''\geq 0$かつ$\varepsilon>0$である限り$\mathbf{v}'$が$\mathbf{v}^*$に比べてプリンシパルにとっての強い意味での支配戦略となることを意味する。これは矛盾である。　証明終

**最適解1．エージェントがリスク中立的だが不確実性回避的な場合**：よく知られているとおり，ナイト流不確実性を含まない標準的なPA問題においては，もしプリンシパル，エージェント双方がリスク中立的である場合，成果に連動した賃金の変動そのものはエージェントにとって何らの厚生損失を生まないため，プリンシパルは，エージェントの努力水準が観察不能であったとしてもエージェントが高水準の努力$a_1$を自発的に選択するような無数の様々なインセンティヴスキームを自在に設計でき，最適解は一意には定まらない。

ところが，以下の命題1が示すとおり，エージェントがリスク中立的であったとしても，ごくわずかなナイト流不確実性に直面しただけで（$\varepsilon$がごくわずかであっても正になっただけで）様相はまるで一変する。最適解は一意に定まり，「最高位の成果$x_n$が出現した場合を除くあらゆる成果について賃金は固定され，エージェントに$a_1$の提供を促すインセンティヴは，最高位の成果$x_n$が出現した場合の追加の報酬によって専ら与えられる」という性質のものとなる。

**命題1．** $n\geq 3$とする。エージェントがリスク中立的である，つまり$u''=0$の場合，それぞれの$\varepsilon\in(0,1)$について，$a_j=a_1$を所与とした問題(5)の最適解は一意に定まり，

$$u_1=u_2=\cdots=u_{n-1}=u_{min}<u_n\quad \text{ただし}\begin{cases}u_{min}\equiv-\dfrac{\Delta c}{\pi_n}+c(a_1)+\underline{u}\\[2ex] u_n\ \ \equiv u_{min}+\dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon}\dfrac{1}{\pi_n p_n}.\end{cases}$$

というものになる。

**証明．** $u''=0$つまり$w''=0$であるので，(6)と補題2から，問題(5)が不確実性プレミアムの最小化，つまり，$E(\mathbf{v})$の最小化を等式のIC制約の下で$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}$について行なう，という問題に帰着する。

$\mathbf{v}^*$を$v_i^*=\cdots v_{n-1}^*=0$，$v_n^*=\dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon}\dfrac{1}{\pi_n p_n}$というインセンティヴスキームとする。明らかに$\mathbf{v}^*$はIC制約を等式で満たす。単調尤度比条件（MLRC）と，尤度比の期待値がゼロである（$E(\pi_i)\equiv\sum_{i\in I}\pi_i p_i=\sum_{i\in I}p_i(a_1)-\sum_{i\in I}p_i(a_0)=0$）という事実から，$\pi_n>0$が成立し，$\mathbf{v}^*\in\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}$である。IC制約を等式で満たす$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}$で$v_1=\cdots=v_{n-1}=0$となるものは$\mathbf{v}^*$に限ら

れ，それ以外の$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}$でIC制約を等式で満たすものは，全て，$v_1$，...，$v_{n-1}$のいずれかが正となるようなものとなる。このこととMLRCより，$\mathbf{v}^*$と，それ以外の$\mathbf{v}$でIC制約を等式で満たすものとの間に，

$$E(\mathbf{v})-E(\mathbf{v}^*)=\frac{1}{\pi_n}\left(\pi_n\sum_{i\in I}v_i p_i-\sum_{i\in I}v_i\pi_i p_i\right)=\frac{1}{\pi_n}\sum_{i\in I}(\pi_n-\pi_i)v_i p_i>0 \tag{8}$$

が成り立つ。つまり，$\mathbf{v}^*$が不確実性プレミアムを最小化する契約である。　証明終

この命題1が示しているのは，リスク中立的な「純粋な不確実性回避者」としてのエージェント（$u''=0$かつ$\varepsilon>0$）に対し高水準の努力提供のインセンティヴを与える，プリンシパルにとっての最も安価な方法は，インセンティヴ付与のための「追加の賞与」を最高位の成果$x_n$が生じた場合にのみ支払うという賃金スキームである，ということである。(6)が示すとおり，不確実性回避的な選好をもつエージェントにとっては，変動給による厚生損失は実現する効用の期待値と最小値のギャップ$E(\mathbf{v})$に起因する。これを，契約のインセンティヴ強度$\mathcal{I}\equiv\sum_{i\in I}u_i\pi_i p_i$を維持しつつできるだけ小さくするには，固定給が支払われる対象となる成果の範囲を最高位の成果以外の全域にまで拡大することが最適となる。

**最適解2．エージェントが不確実性回避的であるとともにリスク回避的でもある場合**：もしエージェントが不確実性回避的である（$\varepsilon>0$）だけでなくリスク回避的である（$u''<0$つまり$w''>0$）場合，成果連動型の賃金スキームがエージェントにもたらす厚生損失は効用の期待値と実現値の最小値の乖離だけでなく，効用の実現値の期待値周りの変動によっても生じる。そこで，命題1のような賃金スキームは必ずしも最適ではなくなり，最適な賃金スキームは，従来型のPA問題の解と命題1との性質をあわせもつ，折衷的なものになる。以下の命題を得る。

**命題2．** $n\geq 3$とし，エージェントが不確実性回避的で$\varepsilon$が正であるとともに，危険回避的で$u''<0$，つまり$w''>0$も成立するとする。エージェントの努力水準が私的情報である場合，$a_1$を実行させることを所与とした問題(4)（(5)と同値）の最適解は，賃金支払い（あるいは，それによって実現するエージェントの効用）が成果について強増加となる（$u_1<u_2<\cdots<u_n$）か，賃金が$x_m$（$m\in\{2,...,n-1\}$）以下の成果について固定され，$x_m$を超える成果について成果について強増加となる（$u_1=\cdots=u_m<u_{m+1}<\cdots<u_n$）かのいずれかであり，パラメーター$\lambda(>0)$と$\mu(>0)$および$\underline{\pi}\in[\pi_1,\pi_{n-1}]$によって，以下のように特徴付けられる。

$$w'(u_i)=(1-\varepsilon)\lambda+\mu\pi_i\quad\forall i\geq m+1 \tag{9}$$

$$w'(u_{min})=(1-\varepsilon)\lambda+\mu\underline{\pi}\quad\forall j\leq m\ \text{and}\ \underline{\pi}\in[\pi_m,\pi_{m+1}) \tag{10}$$

$$\lambda=E[w'(\mathbf{u})]\equiv\sum_{i\in I}w'(u_i)p_i \tag{11}$$

ここで$u_{min}\equiv\min\{u_1,...,u_n\}$である。

**証明．** 補遺Aを参照。

## 3　不確実性プレミアムとリスクプレミアムのトレード＝オフ

### 3.1　不確実性プレミアム最小化とリスクプレミアム最小化の間のトレード＝オフ

以下の図1は，(9)，(10)，及び (11) によって特徴付けられる命題2の解を示したものである。

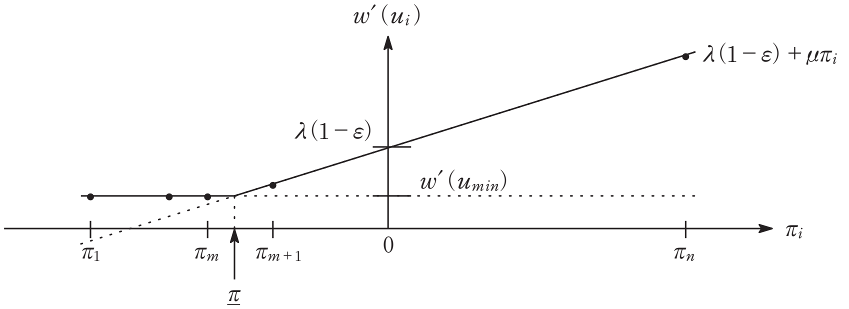

図1：不確実性回避的かつリスク回避的なエージェント向けの最適賃金スキーム

$\underline{\pi}$ の値が，固定給の対象となる成果の範囲を画する。問題は，このパラメーターの水準がどのような要因によって決まるか，であるが，これについて，命題2の系として以下を得る。

**系 1.** (9)と(10)によって特徴付けられる解について

$$\varepsilon E[w'(u)] - \mu \sum_{j=1}^{m} (\underline{\pi} - \pi_j) p_j = 0 \tag{12}$$

が成立する。

**証明.** (9)と(10)の期待値を取ると，

$$E[w'(u)] = (1-\varepsilon)E[w'(u)] + \mu \sum_{i=m+1}^{n} \pi_i p_i + \mu\underline{\pi}\sum_{j=1}^{m} p_j \ .$$

確率分布の一般的な性質から $\sum_{i \in I} \pi_i p_i \equiv 0$ が成り立つことより，$\sum_{i=m+1}^{n} \pi_i p_i = -\sum_{j=1}^{m} \pi_j p_j$ が成立する。これを上記の式に代入して移項することにより，(12)を得る。　証明終

この系の(12)から，エージェントが従来型の純粋なリスク回避者である場合は，(12)の左辺の $\varepsilon$ がゼロの特殊例であり，$\underline{\pi} = \pi_1$ が最適で固定給を含む契約が最適ではなくなる。

これに対し，エージェントが不確実性回避的でもある場合（$\varepsilon > 0$），(12)より $\underline{\pi} > \pi_1$ が最適であり，固定給部分を含んだ賃金スキームが最適解となりうる。

では，何が $\underline{\pi}$ の水準を決めるのか。これについては $\underline{\pi}$ を画している系1の(12)の左辺が，実は問題(5)の目的関数（プリンシパルの負担する賃金コストの期待値）の $E(\mathbf{v})$ についての微分の下限となっていることが，重要な手がかりを与える。すなわち，(5)より，$dE(w) = \sum_{i \in I} w'(u_i) p_i (dv_i - dE(\mathbf{v})) + \sum_{i \in I} w'(u_i) p_i \varepsilon dE(\mathbf{v})$ であるが，命題2の(9)と(10)から $w'(u_i) = w'(u_{min}) + \mu \times \max(\pi_i - \underline{\pi}, 0)$ と表すことができることから更に変形して

$$dE(w)=\sum_{i\in I}w'(u_{min})+\mu*\max(\pi_i-\underline{\pi},0))p_i(dv_i-dE(\mathbf{v}))+\sum_{i\in I}w'(u_i)p_i\varepsilon dE(\mathbf{v})$$

$$=\mu\sum_{i\le m}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i(dv_i-dE(\mathbf{v}))+E(w'(u))\varepsilon E(\mathbf{v})\ge-\mu\sum_{i\le m}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i dE(\mathbf{v})+E(w'(u))\varepsilon E(\mathbf{v})$$

ここで，最後から二番目の等号は，IC 制約から従い（$d\mathcal{I}=0$），最後の不等号は $i\le m$ なる $i$ について $v_i=0$ であり，想定される $v_i$ の変分が非負であることから従う。

つまり(12)の左辺は最適解付近での $E(\mathbf{v})$ の限界的変化がプリンシパルの目的関数（期待賃金コスト）に与える限界的影響の下限に一致し，第 1 項は $E(\mathbf{v})$ の増大が不確実性プレミアムの上昇を通じてもたらす期待賃金コストの限界的上昇，第 2 項は総プレミアムのうち不確実性プレミアム以外の要素が $E(\mathbf{v})$ の増大によって減少する効果を表している。

このことと，命題 1 と従来型の PA 問題の解との比較から以下のことが推察できる。

**推測 1）** 命題 2 によって特徴付けられる問題(4)((5)と同値）の解は，不確実性プレミアムとリスクプレミアムの間のトレード＝オフ関係の均衡によって決まる。

**推測 2）** IC 制約を等式で満たす契約相互において，$\underline{\pi}$ と $E(\mathbf{v})$ は負の相関関係にある。すなわち，固定給の対象となる成果の範囲を広げることは，不確実性プレミアムの節約に寄与する。

以下の命題 3 はこの推測が基本的には正しいということを示す。不確実性プレミアム最小化とリスクプレミアム最小化のトレード・オフを明らかにするため，問題(5)を 2 段階に分けて考えることにする。すなわち，第 1 段階）期待賃金コストを，$E(\mathbf{v})$ をある水準 $E(\mathbf{v})=\frac{\Delta c}{1-c}\frac{1}{\pi_n}(1+\alpha)$ $(\alpha\ge0)$ に保つことを所与として最小化する問題，第 2 段階）$\alpha$ について期待賃金コストを最小化する問題，の 2 段階である。

命題 1 より，達成可能な $E(\mathbf{v})$ の最小値は，$\underline{E(\mathbf{v})}\equiv\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}\frac{1}{\pi_n}$ である。そこで，上記の問題の定式化での $\alpha\left(\equiv\frac{E(\mathbf{v})}{\underline{E(\mathbf{v})}}-1\right)$ は，不確実性プレミアムが，その達成可能な最小値 $\underline{E(\mathbf{v})}$ よりも上方にどれだけ乖離しているかを，$\underline{E(\mathbf{v})}$ に対する相対的な比率として表したものである。

以下の命題 3 は第 2 段階の問題に $\alpha^*\in[0,\infty)$ なる最適解が存在し，また，第 1 段階の解について，少なくとも 0 と $\alpha^*$ を含む $\alpha$ の閉凸区間においてと $\underline{\pi}$ と $\alpha$ が逆相関する，つまり，固定給の範囲の拡大が不確実性プレミアムの節約につながることを示す。

**命題 3.** 問題(5)を以下の 2 段階に分ける。

**第 1 段階）$E(\mathbf{v})$ に比例する不確実性プレミアムを特定の値に設定することを所与とした，総プレミアムの最小化：**

$$\min_{v_i}\sum_{i\in I}w[v_i-E(\mathbf{v})+c(a_1)+\underline{u}+\varepsilon E(\mathbf{v})]p_i$$

$$s.t. \tag{13}$$

$$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}$$

$$\text{誘因整合性（IC）：}\quad \sum_{i\in I} v_i\pi_i \geq \frac{\Delta c}{1-\varepsilon}$$

$$E(\mathbf{v})\text{の到達目標（TEv）：}\quad E(\mathbf{v})=\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}\frac{1}{\pi_n}(1+\alpha)\quad(\alpha>0)$$

**第2段階）** 第1段階の解 $v_i^*(\alpha)$で評価した目的関数 $F(\alpha)\equiv E(w)|_{v_i=v_i^*(\alpha)}=\sum_{i\in I} w[v_i^*(\alpha)-E(\mathbf{v}^*)+c(a_1)+\underline{u}+\varepsilon E(\mathbf{v}^*)]p_i$の，$\alpha$についての最小化

すると，以下が成り立つ。

**3–1）** 第1段階の問題の解は，それぞれの $\alpha\in[0,\infty)$について，少なくとも1つのインセンティヴスキーム $\mathbf{v}^*(\alpha)\in\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}$で(13)の目的関数の最小値を与えるものが存在し，それは目標とする $\alpha$の水準に応じて以下の2つのタイプに分類される。

**タイプ1）** ある単一の $j\in I$について $v_j^*(\alpha)=0$で $j$を除く全ての $i\in I$について $v_j^*(\alpha)=\overline{v(\alpha)}\equiv\frac{1}{1-p_j}\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}\frac{1}{\pi_n}(1+\alpha)$で一定（$E[\pi_i\,|\,i\neq j]$ は尤度比の，$i\neq j$を所与とした条件付き期待値)。ただし，$\pi_j<0$の場合かつ $\alpha$が十分大きく $\alpha\geq\frac{\pi_n}{E(\pi_i\,|\,i\neq j)}-1$の場合に限る。

**タイプ2）** $I$の部分集合 $I_{min}(\mathbf{v}^*(\alpha))\equiv\{i\in I|\,v_i^*(\alpha)=0\}$に含まれる以外の全ての $i\in I$について $v_i$が単調増加で，$w'(u_{min}(\alpha)+v_i^*(\alpha))=w'(u_{min}(\alpha))+\mu(\alpha)(\pi_i-\underline{\pi}(\alpha))$。ただし，$u_{min}(\alpha)\equiv-\frac{\Delta c}{\pi_n}(1+\alpha)+c(a_1)+\underline{u}$であり，かつ，$\mu(\alpha)>0$と $\underline{\pi}(\alpha)\in(-\infty,\ \pi_{n-1}]$の値は各 $\alpha$について一意に定まる。

**3–2）** 第2段階の問題について，$F(\alpha)$の最小値を与える $\alpha^*\in[0,\infty)$ が一意に存在し，$\forall\alpha_1<\alpha^*$と $\forall\alpha_2>\alpha^*$について，$F'(\alpha_1)\leq 0\leq F'(\alpha_2)$である。

**3–3）** $\pi_1<\underline{\pi}(\alpha^*)\leq\pi_{n-1}$である。

**3–4）** 0を含む $\alpha$の閉凸区間が存在して，その区間に含まれる全ての $\alpha$および $\alpha^*$付近の $\alpha$について，第 1 段階の問題の最適解が以下の性質を満たす。

**3–4–a）** $\frac{\partial\pi(\alpha)}{\partial\alpha}\leq 0\quad\forall\varepsilon\in[0,1)$

**3–4–b）** $1\in I_{min}(\mathbf{v}(\alpha^*))$

**証明.** 3–3については命題2と系1から明らかである。その他については補遺Bを参照。

証明の詳細は補遺Bに述べるが，ここではスケッチのみ概説する。問題(13)の制約条件を満たす $\mathbf{v}$の集合が凸集合ではない（$\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}$に含まれる）ため，$\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}$を，$v_j=0$を所与とした $n$個の部分集合 $\mathbf{V}(j)\equiv\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\mathbb{R}^n_{++}|v_j=0\}$に分けて考え，第1段階の問題の制約条件に $v_j=0$という制約を付け加えた問題（これを問題 $(\alpha,j)$ と称することにする）を考える。問題 $(\alpha,1)$，$(\alpha,2)$，...，$(\alpha,n-1)$ には全ての $\alpha\in[0,\infty)$について，問題 $(\alpha,n)$ には $\pi_{n-1}>0$の場合に限って全ての $\alpha\in[\pi_n/\pi_{n-1}-1,\infty)$について最適解が存在し，それらは命題3–1で示したいずれかのタイプに区分される。問題 $(\alpha,j)$ の最適解で評価したプリンシパルの目的関数（期待賃金コスト）を $F(\alpha,j)$と表すと，$F(\alpha,j)\,(j=1,...,n)$ はそれぞれ2階条件を満たし，その最小値を与え

る $\alpha^*(j)\in[0,\infty)$ が一意に存在する（問題 $n$ については $\alpha^*(n)\in[\pi_n/\pi_{n-1}-1,\infty)$）。そして，3–4–a と同様，0（問題（$\alpha, n$）については $\pi_n/\pi_{n-1}-1$）を含む閉凸区間に含まれる $\alpha$ と $\alpha^*(j)$ 付近の $\alpha$ について，問題（$\alpha, j$）の最適解における $\underline{\pi}$ と $\alpha$ は負の相関関係にある。

$F(\alpha,1), \ldots, F(\alpha,n)$ の包絡線が $F(\alpha)$ であるが，これが 3–2 と同様の性質をもつことは，$F(\alpha, 1)$ とその他の $F(\alpha, j)$　$j\neq 1$ とを比べることで明らかになる。すなわち，$\alpha<\alpha^*(1)$ の場合は必ず $F(\alpha, j)\geq F(\alpha, 1)$ であり，$\alpha>\alpha^*(1)$ の場合は $F(\alpha, 1)$ と $F(\alpha, j)$ の大小関係が逆転することもありうるが，そのような $\alpha$ の領域では $F'(\alpha, j)>0$ であるので，3–2 が成立する。またこのことから当然，3–4–b も成立する。

## 3.2　固定給の対象となる成果の範囲の拡大と不確実性プレミアムの節約

命題 3–4–a より，少なくとも $\alpha=0$ を含む $\alpha$ の閉凸区間と最適解 $\alpha^*$ 付近の $\alpha$ に限れば $\underline{\pi(\alpha)}$ と $\alpha$ は逆相関する，つまり，IC 条件を損ねないようにしながら固定給の範囲を拡大し，契約がもつインセンティヴ付与の機能をより高い成果に集約することは，不確実性プレミアムの節減となる。

このような $\underline{\pi}$ と $\alpha$ の負の相関は，効用関数がある十分条件を満たすのであれば，問題$(\alpha, 1)$の解相互の関係については $\alpha$ の全領域にわたり成立することが保証される。以下の系 2 はそれを示す。

**系 2.**　問題$(\alpha, 1)$のタイプ 2 の解について

$$\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\frac{(\pi_i-\underline{\pi})\pi_i p_i}{w''(u_i)}\geq 0 \tag{14}$$

が成立するのなら，$\dfrac{\partial\underline{\pi}(\alpha, 1)}{\partial\alpha}<0$ が，全ての $\alpha\in[0,\infty)$ および全ての $\varepsilon\in[0, 1)$ について成立する。

**証明.**　補遺 C を参照。

(14)において $I_{min}$ は問題$(\alpha, 1)$の解において $v_i=0$ となるような $i$ の集合で，タイプ 2 の解については，その補集合の $i$ については $v_i$ が増加列となり，また，$\forall i\in I_{min}$，$\forall j\in I\setminus I_{min}$，$i<j$ である。従って，単調尤度比条件より，(14)の不等式は $\dfrac{(\pi_i-\pi)}{w''(u_i)}$ が $i$ の増加列であれば十分に成立する。タイプ 2 の解の 1 階条件から，これは $\dfrac{w'(u_i)-w'(u_{min})}{w''(u_i)}$ が $i$ の増加列となることと同値である。その条件は，効用関数 $u(w)$ が相対的危険回避度一定型 $u(w)\equiv\dfrac{1}{1-\gamma}w^{1-\gamma}$ で相対的危険回避度 $\gamma$ が $\gamma\in(0, 1]$ であれば十分に成立する。

## 4　最適な固定給の範囲

### 4.1　$\underline{\pi}$ の拡大と不確実性プレミアム

第3節の系1でみたとおり，最適な固定給の範囲を画するパラメーター $\underline{\pi}$ は $E(\mathbf{v})$ の上昇がもたらす不確実性プレミアムの限界的上昇と，リスクプレミアムの限界的減少のトレード・オフが拮抗するところに決定する。そして，最適な $E(\mathbf{v})$ の水準を含む領域で，不確実性プレミアムと固定給から変動給に移る $\pi$ の閾値 $\underline{\pi}$ は逆相関する。すなわち，$\underline{\pi}$ を拡大し，固定給が支払われるような成果の範囲を拡大することは，インセンティヴ付与のための報酬と成果の連動をより大きな成果が出た場合に集約することを通じ，$E(\mathbf{v})$ を押し下げ，不確実性プレミアムの節約に寄与する。

そこで，$\varepsilon$ が大きく，エージェントが直面するナイト流不確実性の深刻度が大きくなることは，不確実性プレミアム節約の限界便益が大きくなるという点で最適な $\underline{\pi}$ を押し上げる要因となる。

一方，$\varepsilon$ の拡大は，IC 制約をよりきつくする。つまり，エージェントの $\varepsilon$ が大きいと，報酬の増加部分がエージェントの MMEU に占める比重が小さくなるため，エージェントに高水準の努力を提供するインセンティヴを与えるためにより大きなインセンティヴ強度 $\underline{\mathcal{I}}$ が必要となる。このことは，プリンシパルが固定給の範囲を狭く取ろうとする（$\underline{\pi}$ を押し下げる）要因となる。

以上を，エージェントの効用関数 $u(w)$ が自然対数関数 $\ln(w)$ である場合について論じる。対数効用関数を用いる利点として，これが仮定3と系2の条件を満たすため，第1段階の最適化問題の解において $\underline{\pi}$ と $\alpha$（ないし $E(\mathbf{v})$）の負の相関関係が大域的に保証されることの他，プリンシパルの目的関数においてリスクプレミアムと不確実性プレミアムとが乗法分離可能となり，固定給の範囲決定における不確実性プレミアムとリスクプレミアムのトレード・オフがより鮮明になることがある。

すなわち，$u(w) \equiv \ln(w)$ の場合，$w(u) \equiv \exp(u)$ であり，(5)で定式化されるプリンシパルの目的関数（期待賃金コスト）は $\sum_{i\in I} w[v_i - E(\mathbf{v}) + c(a_1) + \underline{u} + \varepsilon E(\mathbf{v})]p_i = \exp(c(a_1) + \underline{u}) \sum_{i\in I} \exp(v_i - E(\mathbf{v}))p_i \ \exp[\varepsilon E(\mathbf{v})]$ となる。うち，リスクプレミアムに該当する $\sum_{i\in I} \exp(v_i - E(\mathbf{v}))p_i$ を $\rho(\mathbf{v})$ と，不確実性プレミアムに該当する $\exp[\varepsilon E(\mathbf{v})]$ を $\kappa(\mathbf{v})$ と表すことにする。関数形から明らかなとおり，$c(a_1)$ や $\underline{u}$ の水準とは独立に，目的関数の最小化は $\rho(\mathbf{v})$ と $\kappa(\mathbf{v})$ の積（あるいは $\ln(\rho)$ と $\ln(\kappa)$ の和）の最小化に帰着する。

更に問題を $E(\mathbf{v}) = \dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon}\dfrac{1}{\pi_n}(1+\alpha)$ を所与とした最小化問題（第1段階）と $\alpha$（または $E(\mathbf{v})$）についての最小化問題（第2段階）とに分割し，最適解周りの比較静学に議論を特化するため前節の議論より $v_1 = 0$ となる解にのみ着目すると，第1段階の問題の最適化は，前節と同様の議論により，各 $\alpha$ について一意に定まる $\mu, \underline{\pi}$ によって，

$$\exp(v_i^*(\alpha)) = 1 + \mu(\alpha)\max(\pi_i - \underline{\pi}(\alpha), 0) \tag{15}$$

と特徴付けることができる。

第２段階の問題は，この第１段階の最適解 $\mathbf{v}^*(\alpha)$ で評価した目的関数の対数値 $\ln(\rho(\mathbf{v}^*(\alpha))) + \ln(\kappa(\mathbf{v}^*(\alpha))) = \ln[\sum_{i\in I} \exp(v_i^*(\alpha))p_i] - E(\mathbf{v}^*(\alpha)) + \varepsilon E(\mathbf{v}^*(\alpha))$ の最小化問題に帰着する。その１階条件は，

$$\frac{d \ln \kappa}{dE(\mathbf{v})} + \frac{d \ln \rho}{dE(\mathbf{v})} = 0 \tag{16}$$

$$\text{ただし} \begin{cases} \dfrac{d \ln \kappa}{dE(\mathbf{v})} & = & \varepsilon \\ \dfrac{d \ln \rho}{dE(\mathbf{v})} & = & -\dfrac{\mu \sum_{i\le m}(\underline{\pi}(\alpha) - \pi_i)p_i}{\sum_{i\in I}\exp(v_i)p_i}(<0) \end{cases} \tag{17}$$

である。ここで，$m$ は $\pi_m \le \underline{\pi} < \pi_{m+1}$ を満たす数を意味する。

そこで，第２段階の最適化の１階条件を移項すると，$\dfrac{d \ln \kappa}{dE(\mathbf{v})} = \dfrac{-d \ln \rho}{dE(\mathbf{v})}$ を得る。左辺 $\dfrac{d \ln \kappa}{dE(\mathbf{v})}$ は $E(\mathbf{v})$ の上昇がもたらす不確実性プレミアムの対数値の限界的上昇を意味し，系２より $\dfrac{\partial \underline{\pi}}{\partial E(\mathbf{v})} < 0$ だから，これは $\underline{\pi}$ の限界的拡大がもたらす不確実性プレミアムの限界的節約の便益（Marginal Benefit of saving the Uncertainty premium（MBU））をも意味する。

一方，右辺の $\dfrac{-d \ln \rho}{dE(\mathbf{v})}$ は $E(\mathbf{v})$ の上昇がもつリスクプレミアムの節約の便益（逆に $\underline{\pi}$ の拡大がもつリスクプレミアム増大の限界費用（Marginal Cost of Increasing Risk premium（MCR）））に相当する。

(17) より明らかなとおり，MBU は $\underline{\pi}$ に関わらず $\varepsilon$ で一定である。一方，MCR は $\underline{\pi} = \pi_1$ で値 0 をとり，その定義域全般（$-\infty$, $\pi_{n-1}$］にわたり，$\underline{\pi}$ について単調増加であり，$\underline{\pi} = \pi_m (m = 1, \ldots, n-1)$ で微分不能だが $\underline{\pi}$ について連続である。すなわち，以下の補題を得る。

**補題 3.** (15) で表されるような第１段階の，IC 制約を等式で満たす解の相互比較について，

**3–1）** $\underline{\pi}$ の拡大は不確実性プレミアムの節約を意味する。すなわち，$\dfrac{d\underline{\pi}}{d\alpha} < 0$ である。

**3–2）** $\underline{\pi}$ の拡大によるリスクプレミアム増大の限界費用 $\dfrac{-d \ln \rho}{dE(\mathbf{v})}$ は $\underline{\pi}$ について単調増加である。

**証明.** 補遺 D を参照。

## 4.2　誘引整合性制約と，リスクプレミアム増大の限界費用

固定給の範囲増大がもたらすリスクプレミアム増大の限界費用を表す図２の MCR 線は，誘因整合性制約（IC 制約）がきつくなり，エージェントに $a_1$ を実行させるために必要とされるイン

センティヴ量が大きくなるほど，上方にシフトする。以下の補題を得る。

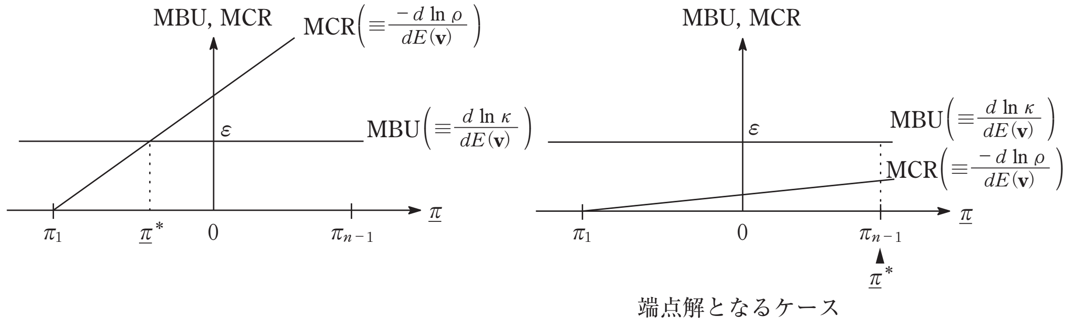


図2：不確実性プレミアム節約の限界便益とリスクプレミアム増大の限界費用

**補題 4.** $\dfrac{\partial}{\partial \mathcal{I}}\left(\dfrac{-d\ln\rho}{dE(\mathbf{v})}\right)>0$ である。

**証明.** 補遺 E を参照。

このことから，エージェントが $a_0$ を放棄して $a_1$ を選ぶ際の効用損失の負担 $\Delta c(\equiv c(a_1)-c(a_0))$ が十分小さく，契約に必要なインセンティヴ強度 $\mathcal{I}$ が小さくてすむ場合には，図2の右側のように MCR 線の位置が十分に下がり，$\underline{\pi}=\pi_{n-1}$ のような端点解（命題1と同様の）が最適となりうる。

## 4.3　$\varepsilon$ の増大と，固定給の対象となる成果の最適な範囲

本節冒頭で述べたとおり，エージェントがより深刻なナイト流不確実性に直面し，$\varepsilon$ の値が増大することは，(12)によって画される最適な $\underline{\pi}$ を大きくする方向にも小さくする方向にも作用する。

$\underline{\pi}$ の拡大には，IC 制約を通じて契約の $E(\mathbf{v})$ を下げる，不確実性プレミアムを節減する効果があるが，その限界便益は $\varepsilon$ の上昇によって高まる。これは固定給が支払われる成果の範囲を画する $\underline{\pi}$ の最適値を押し上げる方向に作用する（図3の A→B）。

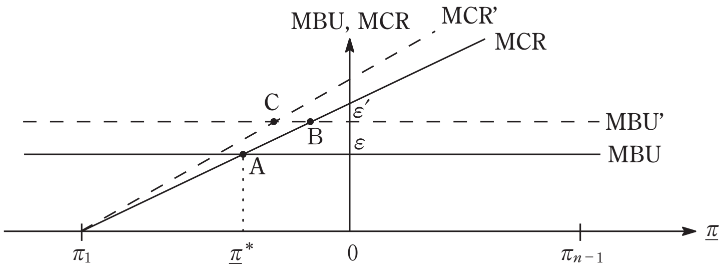

図 3：不確実性プレミアム節約の限界便益とリスクプレミアム増大の限界費用

一方，IC 制約から明らかなとおり，$\varepsilon$ が増大すると，変動給が実現した場合の効用がエージェントの MMEU に占める比重を低下させるため，エージェントに努力を促すために，より大きなインセンティヴ強度が必要となる。このことは，補題 4 でみたとおり，固定給の範囲の拡大がもつ，リスクプレミアム増大の限界費用を押し上げるため，最適な $\underline{\pi}$ を押し下げる要因となる（図 3 の B→C）。

どちらの効果がより強いか，については，元々の $\varepsilon$ の大きさに依存する。以下の命題を得る。

**命題 4.** エージェントの効用関数 $u(w)$ が $\ln(w)$ である場合，最適な $\underline{\pi}$ を画する条件 $\varepsilon$ と $\underline{\pi}$ について，

$$sgn\left[\frac{d\underline{\pi}}{d\varepsilon}\right]=$$

$$sgn\left[1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1}{E[\exp(v_i)]}\frac{Cov[\exp(v_i),\ v_i]+\varepsilon E[\exp(v_i)]E(\mathbf{v})}{Cov[\exp(v_i),-\exp(-v_i)]+\varepsilon E[\exp(v_i)]\left(1-E\left[\frac{1}{\exp(v_i)}\right]\right)}\right] \quad (18)$$

が成立する。

**証明.** 補遺 F を参照。

(18) より，$\varepsilon$ が極端に大きくない限り，ナイト流不確実性の深刻度 $\varepsilon$ の増大は固定給の対象となる成果の範囲の拡大要因となる。

## 5　結語

エージェントの側の選好が複数の確率分布からなる集合についての Maximin の期待効用で表現される場合，エージェントは，受け取り賃金の分散よりも，最低賃金しか受け取れなかった場合の経済厚生の，平均的な経済厚生からの下方乖離を極めて重視する。そのようなエージェントは，リスクプレミアムよりも寧ろ，経済厚生の下方乖離を和らげる「不確実性プレミアム」を要求する。そのようなエージェントを相手にする場合，プリンシパルは，エージェントの努力を促すインセンティヴを，最高位の成果に対して払う賃金の上乗せによって引き出し，それ以外の成

果については賃金を固定した方が寧ろ支払い賃金の期待値を節約できる。

しかし，このように固定給の範囲を最大限拡張することは，リスクプレミアムの増大要因となる。したがって，エージェントが不確実性回避的のみならずリスク回避的でもある場合は，最適な固定給の範囲は，その拡大がもつ不確実性プレミアムの節約の限界便益と，リスクプレミアム増大の限界費用の比較によって定まる。エージェントのナイト流不確実性の深刻度を表す $\varepsilon$ の値が大きい場合は，不確実性プレミアムの節約の限界便益が高まる。このことは，固定給の範囲の拡大要因となるが，$\varepsilon$ の増大はエージェントに高い努力を促すために必要なインセンティヴ強度を高め，IC 制約をきつくし，固定給の範囲の拡大がもたらすリスクプレミアム上昇の限界費用も同時に高める。これは固定給の範囲の縮小要因となる。$\varepsilon$ の値が極端に大きくない限り，前者の効果が後者を上回り，$\varepsilon$ の増大は固定給の範囲の拡大要因となる。

本稿ではナイト流不確実性に直面する主体がエージェントのみであり，また，エージェントの $\varepsilon$ の値が既知である場合について，エージェントにより高い努力水準を提供させる場合の最適化問題を分析した。エージェントのみならず，プリンシパルもナイト流の不確実性に直面する場合の分析や，$\varepsilon$ が私的情報であるケースの分析，最終的にどの水準の努力をエージェントに提供させるのが望ましいか，についての検討は今後の課題である。

**参考文献**


[1] Akerlof, George A. and Yellen, Janet L. 1985. A Near-Rational Model of the Business Cycle, With Wage and Price Inertia *Quarterly Journal of Economics* 100, pp. 823-838

[2] Azariadis, Costas, 1975. Implicit Contracts and Underemployment Equilibria. *Journal of Political Economy* 83, pp. 1183-1202.

[3] Azariadis, Costas, and Stiglitz, J.E., 1983. Implicit Contracts and Fixed Price Equilibria. *Quarterly Journal of Economics* 98, pp. 1-22.

[4] Ball, Laurence, and Romer, D., 1990. Real Rigidities and the Non-Neutrality of Money. *The Review of Economic Studies*, Vol. 57, pp. 183-203

[5] Bewley, Truman F. 1986. Knightian decision theory : Part I, *Technical report*, Cowles Foundation.

[6] Ghirardato, Paolo. 1994. Agency Theory with Uncertainty Aversion, mimeo (available from http://web.econ.unito.it/gma/xyz/ambiguity/agency pg.pdf)

[7] Gilboa, Izhak, and Schmeidler, D., 1989. Maxmin Expected Utility with Non-unique Prior, *Journal of Mathematical Economics* 18, pp. 141-153.

[8] Grossman, Sanford J. and Hart, Oliver D., 1981. Implicit Contracts, Moral Hazard, and Unemployment. *American Economic Review* 71, pp. 301-307.

[9] Grossman, Sanford J. and Hart, Oliver D., 1983. An Analysis of the Principal-Agent Problem. *Econometrica* 51, pp. 7-45.

[10] Karni, Edi, 2009. A Reformulation of the Maxmin Expected Utility Model with Application to Agency Theory. *Journal of Mathematical Economics* 45, pp. 97-112.

[11] Lopomo, Giuseppe, Rigotti, L. and Shannon, C., 2011. Knightian Uncertainty and Moral Hazard. *Journal of Economic Theory* 146, pp. 1148-1172.

［12］Mukerji, Sujoy 2003. Ambiguity Aversion and Cost-Plus Procurement Contracts, *Department of Economics Discussion Paper Series, 171* Oxford university
［13］Nishimura, Kiyohiko G., and Ozaki, Hiroyuki, 2006. An Axiomatic Approach to ε-contamination. *Economic Theory* 27, pp. 333-340.
［14］玉井義浩 2004a，ナイト流不確実性の下でのエージェンシー問題と労使間リスクシェアリング 『神奈川大学経済貿易研究所年報』第 30 号 45-59 頁.
［15］玉井義浩 2004b，基本給と歩合給の混合による賃金契約と，エージェントのナイト流不確実性『商経論叢』40 巻 2 号（神奈川大学）159-181 頁.
［16］玉井義浩 2011，ナイト流不確実性と実質賃金の硬直性『社会科学研究』63 巻 1 号（東京大学）51-71 頁.

## 補遺 A : 命題 2 の証明

問題(4)の全制約を満たす $\mathbf{u}$ の集合は下に有界な $\cap_{j=1}^{n}\mathbf{IR}_j$ の部分集合である。ただし，$\mathbf{IR}_j \equiv \{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n \mid (1-\varepsilon)\mathrm{E}(\mathbf{u}|a_1)+\varepsilon u_j \geq c+\underline{u}\}$ である。更に，$w'>0,\ p_i>0 \quad \forall i\in I$ であるので集合 $\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n | w(u_i)p_i \leq K\}$ は上に有界である。従って，$w$ の連続性と微分可能性から，解の存在が保証される。また，制約条件が Slater の制約規約を満たすので，$\mathbf{u}^*$ が問題(4)の局所最適解であるならそれはラグランジュ関数 $L:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$，$L(\mathbf{u},\ \boldsymbol{\lambda},\ \mu)\equiv\sum_{i\in I} w(u_i)p_i - \sum_{j\in I}\lambda_j\{(1-\varepsilon)\sum_{i\in I}u_ip_i+\varepsilon u_j-(\underline{u}+c(a_1))\}-\mu\left(\sum_{i\in I}u_i\pi_ip_i-\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}\right)$ の鞍点であり，以下の条件を満たす。

$$w'(u_i)p_i - \left[(1-\varepsilon)\left(\sum_{j\in I}\lambda_j\right)p_i+\lambda_i\varepsilon+u\pi_ip_i\right] \quad = \quad 0 \tag{19}$$

$$(1-\varepsilon)\sum_{i\in I}u_ip_i+\varepsilon u_j-(\underline{u}+c(a_1)) \quad \geq \quad 0 \tag{20}$$

$$\lambda_j\left\{(1-\varepsilon)\sum_{i\in I}u_ip_i+\varepsilon u_j-(\underline{u}+c(a_1))\right\} \quad = \quad 0 \tag{21}$$

$$\lambda_j \quad \geq \quad 0 \tag{22}$$

$$\sum_{i\in I}u_i\pi_ip_i-\frac{c(a_1)-c(a_0)}{1-\varepsilon} \quad \geq \quad 0 \tag{23}$$

$$\mu\left(\sum_{i\in I}u_i\pi_ip_i-\frac{c(a_1)-c(a_0)}{1-\varepsilon}\right) \quad = \quad 0 \tag{24}$$

$$\mu \quad \geq \quad 0 \tag{25}$$

(19)－(22)は

$$w'(u_i)=\begin{cases}(1-\varepsilon)\left(\sum_{j\in I_{min}}\lambda_j\right)+\dfrac{\lambda_j}{p_i}\varepsilon+\mu\pi_i & \forall i\in I_{min} \quad (u_i=\min(\mathbf{u}))\\ (1-\varepsilon)\left(\sum_{j\in I_{min}}\lambda_j\right)+\mu\pi_i & \forall i\in I_{min}^c\end{cases} \tag{26}$$

を含意する。ここで添字の集合 $I_{min}$ は $I$ の部分集合で，$I_{min}\equiv\{i\in I|u_i=\min(\mathbf{u})\}$ であり，$I_{min}^c$ はその補集合 $I\setminus I_{min}$ である。

補題2よりIC制約が最適解で有効であるから，$\mu>0$ である。(19)を $i\in I$ について加算し，$\sum_{i\in I}\pi_i p_i=0$ となる事実を考慮すると，

$$\lambda\equiv\sum_{i\in I}\lambda_j=E[w'(u)]\left(\equiv\sum_{i\in I}w'(u_i)p_i\right)\tag{27}$$

である。$w''>0$ の場合は(26)より全ての $i\in I_{min}^c$ と全ての $j\in I_{min}$ について

$$w'(u_i)-w'(u_j)=w'(u_i)-w'(u_{min})=\mu(\pi_i-\pi_j)-\frac{\lambda_j}{p_j}\varepsilon>0$$

が成り立つ（ただし，$u_{min}\equiv\min(\mathbf{u})$）。この不等式は $\mu(\pi_i-\pi_j)>\dfrac{\lambda_j}{p_j}\varepsilon$ と同値であり，(22)より $\lambda_j\geq0$ であるから，$i>j$ である。なぜなら，もしそうでないとすると，上記の不等式が $\mu>0$ と単調尤度比条件と矛盾するからである。以上より，(26)と(27)が(9)と(10)を含意する。

## 補遺 B：命題3の証明

問題(13)の制約条件を満たす $\mathbf{v}$ の集合が $\mathbb{R}_+^n\backslash\mathbb{R}_{++}^n$ に含まれ凸集合ではないので，$\mathbb{R}_+^n\backslash\mathbb{R}_{++}^n$ を $n$ 個の凸の部分空間 $\mathbf{V}(j)\equiv\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^n\backslash\mathbb{R}_{++}^n|v_j=0\}$，$j\in\{1,2,\ldots,n\}$ に分け，第1段階の問題(13)に $v_j=0$ という制約を付け加えた問題（これを問題 $(\alpha,j)$ と呼ぶ）を考え，次いで，問題 $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, ..., $(\alpha,n)$ の解のそれぞれにおいて評価したプリンシパルの目的関数の値を $F(\alpha,j)$ とおき，その性質を明らかにする。まず証明の論証ブロックの補題を列挙した後，各々の証明を付す。

**補題5.** 問題 $(\alpha,j)$ $(j\neq n)$ については全ての $\alpha\in[0,\infty)$ について，問題 $(\alpha,n)$ に対しては $\pi_{n-1}>0$ の場合に限り全ての $\alpha\in\left[\dfrac{\pi_n}{\pi_{n-1}}-1,\infty\right)$ について解 $\mathbf{v}^*(\alpha,j)=v_i^*(\alpha,j),\ldots,v_n^*(\alpha,j))$ が存在する（以下，問題 $(\alpha,j)$ に解が存在するような $\alpha$ の最小値を $\alpha_{min}(j)$ と表記することにする）。解は以下のタイプに区分される。

**タイプ1）** $\pi_j<0$ なる問題 $(\alpha,j)$ において $\alpha\geq\dfrac{\pi_n}{E(\pi_i|i\neq j)}-1$ が成立する場合：

$$v_i=\begin{cases}0 & i=j\text{ の場合}\\ \underline{v(\alpha,j)}\equiv\dfrac{1}{1-p_j}\dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon}\dfrac{1}{\pi_n}(1+\alpha) & i\neq j\text{ の場合}\end{cases}\tag{28}$$

**タイプ2）** $\pi_j\geq0$ または $\pi_j<0$ かつ $\alpha<\dfrac{\pi_n}{E(\pi_i|i\neq j)}-1$ の場合：

$$\begin{aligned}&i=j\text{ の場合}\quad w'(u_j)=w'(u_{min}(\alpha)),\\ &i\neq j\text{ の場合}\quad w'(u_i)=w'(u_{min}(\alpha))+\mu(\alpha,j)*\max[\pi_i-\underline{\pi}(\alpha,j),0]\end{aligned}\tag{29}$$

ただし，$u_{min} \equiv -\dfrac{\Delta c}{\pi_n}(1+\alpha)$である。また，$\mu(\alpha, j)>0$, $\underline{\pi}(\alpha, j) \in (-\infty, \pi_{n-1}]$(問題$(\alpha, n)$の場合は$\underline{\pi}(\alpha, n) \in (-\infty, \pi_{n-2}]$)は，各$\alpha, j$について一意に定まる。特に，$\underline{\pi}(0, j)=\pi_{n-1}$　$(j \neq n)$，$\underline{\pi}(0, n)=\pi_{n-2}$である。

**補題 6.**　目的関数$E(w)$を$\mathbf{v}=\mathbf{v}^*(\alpha, j)$で評価したものを$F(\alpha, j)$とおく。$\dfrac{\partial^2 F(\alpha, j)}{\partial \alpha^2}>0$で，各$j$について$F(\alpha, j)$を最小化する$\alpha=\alpha^*(j) \in [0, \infty)$が一意に存在する。

**補題 7.**　**7–1）**問題$(\alpha, j)$$(=1, ..., n)$を特徴付ける$\underline{\pi}(\alpha, j)$の解について，$\forall \alpha \in [\alpha_{min}(j), \overline{\alpha(j)}]$, $\underline{\pi}(\alpha, j) \in [\pi_1, \pi_{n-1}]$が成り立つような$\overline{\alpha}$のうち，最大のものを$\overline{\overline{\alpha(j)}}$とおく（最大値が存在しなければ$\overline{\overline{\alpha(j)}}=\infty$とする)。このとき，$\alpha^*(j) \in [\alpha_{min}(j), \overline{\overline{\alpha(j)}})$である。

**7–2）**問題のそれぞれについて，$(\alpha, j)$については$\alpha_{min}(j)$とそれより大きな$\alpha$を含む$\alpha$の閉凸区間が存在し，その区間に含まれる全ての$\alpha$と，$\alpha^*(j)$付近の$\alpha$について$\dfrac{\partial \underline{\pi}(\alpha, j)}{\partial \alpha}<0$である。

**補題 8.**　**8–1）**区間［$\alpha_{min}(j), \overline{\overline{\alpha(j)}}$］に含まれる全ての$\alpha$について$F(\alpha, 1) \leq F(\alpha, j)$である。

**8–2）**$\forall \alpha \in (\overline{\overline{\alpha(j)}}, \infty)$, $\partial F(\alpha, j)/\partial \alpha>0$である。

(13)の第1段階の問題の解は，問題$(\alpha, j)$$(j=1, ..., n)$の解のうち，$F(\alpha, j)$$(j=1, ..., n)$の最小値を与える問題の解であるから，補題5によって命題3–1）がまず証明される。命題3–2, 3, 4）は補題6，補題7–1, 2, 補題8に基づく以下の補題より導かれる。

**補題 9.**　$j=2, ...,\ n$の中から1つを選び，$F(\alpha, j)$と$F(\alpha, 1)$の2つの関数の包絡線$\underline{F}(\alpha, 1, j) \equiv \min[F(\alpha, 1), F(\alpha, j)]$を考える。全ての2, ..., $n$について，$\underline{F}(\alpha, 1, j)$は以下の性質を満たす。

**9–1）**ある$\alpha^*(1, j) \in [0, \infty)$が存在して，

$$\forall \alpha_1 \in [0, \alpha^*(1, j)),\ \forall \alpha_2 \in (\alpha^*(1, j), \infty),\ \left.\frac{\partial \underline{F}(\alpha, 1, j)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_1} \leq 0 \leq \left.\frac{\partial \underline{F}(\alpha, 1, j)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_2}$$

である。

**9–2）**0と$\alpha^*(1, j)$を含む$\alpha$の閉凸区間において，$\underline{F}(\alpha, 1, j)=F(\alpha, 1)$である。

$F(\alpha, j)$$(j=1, ..., n)$の包絡線$\min[F(\alpha, 1), ..., F(\alpha, n)]$が$F(\alpha)$であるが，それは，$\underline{F}(\alpha, 1, j)$$(j=2,\ ...,\ n)$の包絡線でもあるから，補題9–1から，命題3–2が従う。また，補題7–2と9–2から，命題3–3と3–4が従う。以下，上記の補題5から補題9までの証明を順次示す。

**補題 5 の証明**　問題(13)に$v_j=0$という制約を加えた問題$(\alpha, j)$の制約条件を満たす契約$\mathbf{v}$の集合は仮定1より凸の有界閉集合である。また，$w'>0$であり，エージェントがリスク回避的である場合，$w''>0$である。よって，問題$(\alpha, j)$には，制約条件を満たす$\mathbf{v}$の集合が空でない限り解が一意に存在する。

そして，$j \neq n$である限り，全ての$\alpha \in [0, \infty)$について問題$(\alpha, j)$の制約条件を満たす契約の集合は空ではない。例えば，$j \neq n$の場合，$0=v_1^*=v_2^*=\cdots=v_{n-1}^*<v_n^*=\dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon}\dfrac{1}{\pi_n p_n}(1+\alpha)$という契約はTEv制約を等式で満たし，$\mathbf{V}(j)$に含まれ，しかもインセンティヴ強度が$\dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon}(1+\alpha)$であり，全ての$\alpha \in [0, \infty)$について，IC制約を満たすから，問題$(\alpha, j)$の制約条件を満たす。

一方，$j=n$ の場合すなわち問題$(\alpha, n)$については，制約条件を満たす$\mathbf{v}$の集合が空でなくなるのは $\pi_{n-1}>0$ かつ $\alpha \geq \frac{\pi_n}{\pi_{n-1}}-1$ の場合に限られる。なぜなら，問題$(\alpha, n)$については $v_n=0$ であるので単調尤度比条件から $\pi_{n-1}\leq 0$ の場合はインセンティヴ強度が正とならず，$\pi_{n-1}>0$ の場合であっても，$v_n=0$ かつ TEv 制約を特定の $\alpha$ について等式で満たす契約が与えるインセンティヴ強度は，最大でも $0=v_1^{**}=\cdots=v_{n-2}^{**}<v_{n-1}^{**}=\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}\frac{1}{\pi_n p_n}(1+\alpha)$，$v_n^{**}=0$ という契約から得られる$\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}(1+\alpha)$に過ぎないからである（TEv 制約と $v_n=0$ を満たす $\mathbf{v}^{**}$以外の契約 $\mathbf{v}'$ が与えるインセンティヴ強度は，TEv 制約から $E(\mathbf{v}^*)=E(\mathbf{v}')$であることを考慮すると $\sum_{i=1}^{n-1} v_i'\pi_i p_i=\sum_{i=1}^{n-1} v_i^*\pi_i p_i-\sum_{i=1}^{n-2}(v_i'-v_i^{**})(\pi_{n-1}-\pi_n)\leq\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}(1+\alpha)$である。最後の不等号は，$v_1^{**}=\cdots=v_{n-2}^{**}=0$ と非負制約と単調尤度比条件から従う）。

問題$(\alpha, j)$ $(j=1, \ldots, n)$の解 $\mathbf{v}^*$は以下の2つのタイプに分類される。

**タイプ 1：問題$(\alpha, j)$の最善解**

$$u_i^*=\begin{cases}0 & i=j \text{ の場合}\\ \overline{v(\alpha, j)}\equiv\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}\frac{1}{\pi_n}(1+\alpha)\frac{1}{1-p_j}\ (\text{一定}) & \forall i\in I\setminus\{j\}\end{cases} \tag{30}$$

プリンシパルの目的関数 $E(w)$をこの解の周りで，TEv 制約を考慮しながらテイラー展開すると，$E(w)|_{\mathbf{v}\neq\mathbf{v}^*}=E(w)|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}^*}+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}w''[\overline{v(\alpha, j)}+\theta_i(v_i-\overline{v(\alpha, j)})]*(v_i-\overline{v(\alpha, j)})^2 p_i>E(w)|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}^*}(\theta_i\in[0, 1])$であるから，(30)のような解は，特定の $\alpha$ についての TEv 制約と $v_j=0$ を所与とした問題における最善解である。もし $\pi_j<0$ であるなら，(30)の解のインセンティヴ強度は正の $\frac{\Delta c}{1-\varepsilon}\frac{1}{\pi_n}(1+\alpha)\frac{\sum_{i\neq j}\pi_i p_i}{1-p_j}$ であり，十分に大きな $\alpha$ を所与とするなら（$\alpha\geq\pi_n\frac{1-p_j}{\sum_{i\neq j}\pi_i p_i}-1=\frac{\pi_n}{E(\pi_i|i\neq j)}-1$ であるなら）IC 制約を満たす量となる。よって，$\pi_j<0$ かつ $\alpha\geq\frac{\pi_n}{E(\pi_i|i\neq j)}-1$ の場合は(30)が問題$(\alpha, j)$の解であり，以下これを“問題$(\alpha, j)$の最善解”と呼び $\mathbf{v}^{FB}(\alpha, j)$と表す。

**タイプ 2：問題$(\alpha, j)$の次善解** $\pi_j\geq 0$ である場合は $E(\pi_i|i\neq j)\equiv\frac{\sum_{i\neq j}\pi_i p_i}{1-p_j}=\frac{-\pi_j p_j}{1-p_j}<0$ となり，$\mathbf{v}^{FB}(\alpha, j)$のインセンティヴ強度は負かゼロとなる。また，$\pi_j<0$ の場合であっても $\alpha<\frac{\pi_n}{E(\pi_i|i\neq j)}-1$ 場合は $\mathbf{v}^{FB}(\alpha, j)$のインセンティヴ量は IC 制約を満たすには不十分である。この場合，IC 制約が有効となり，問題$(\alpha, j)$の解は TEv 制約と IC 制約の2つの等式制約を含む期待賃金コスト $E(w)$の最小化問題の Kuhn＝Tucker 条件によって以下のように特徴付けられる。

$$i=j：\quad v_j^*(\alpha,j)=0,\quad (\text{問題}(\alpha,j)\text{の定義により})$$

$$i\neq j：\quad \begin{cases} v_i^*(\alpha,j)=0 & \text{かつ}\quad w'(u_i)=w'(u_{min}(\alpha))\geq\lambda+\mu\pi_i \\ v_i^*(\alpha,j)>0 & \text{かつ}\quad w'(u_i)=w'(u_{min}(\alpha)+v_i^*(\alpha,j))=\lambda+\mu\pi_i \end{cases} \tag{31}$$

$$\text{ただし}\ u_{min}(\alpha)\equiv-(1-\varepsilon)E(\mathbf{v})+c(a_1)+\underline{u}=-\frac{\Delta c}{\pi_n}(1+\alpha)+c(a_1)+\underline{u}$$

ここで $\lambda$ と $\mu$ はそれぞれ TEv 制約と IC 制約についてのラグランジュ乗数で，目的関数と制約条件の凸性より，それぞれ，$\alpha$ について一意に定まる。IC 制約が有効で $\mu>0$ である。

ここで $\underline{\pi}$ を，$w'(u_{min}(\alpha))=\lambda+\mu\underline{\pi}$ を満たす数値と定義すると，(31)を(29)のように組み替えることができる。　証明終

**補題 6 の証明**　問題$(\alpha,j)$の解が(28)の最善解（タイプ 1）である場合，$F(\alpha,j)=w(u_{min}(\alpha))p_j+w(u_{min}(\alpha)+\overline{v}(\alpha,j))(1-p_j)$であり，$u_{min}(\alpha)$と$\overline{v}(\alpha,j)$がいずれも $\alpha$ について線形であるから，補題 6 は関数 $w$ の凸性から直ちに従う。

解が(29)の次善のタイプ 2 である場合，$\alpha$ の微細な変化によって，最低賃金の対象となる成果の範囲となる添字の集合 $I_{min}(\alpha,j)\equiv\{i\in I|v_i^*(\alpha,j)=0\}$ が変化する場合がある。今，$m\in I$ を，$I_{min}(\alpha,j)$の中の，$j$ 以外の要素で最大のもの，とする。$w(\cdot)$の連続性より，$\mathbf{v}^*(\alpha,j)$，$\mu(\alpha,j)$，そして $\underline{\pi}(\alpha,j)$はいずれも $\alpha$ の連続関数となるため，もし $\underline{\pi}\neq\pi_n$ であるなら，$I_{min}(\alpha+d\alpha,j)=I_{min}(\alpha,j)$である。しかし，$\mu>0$ であるため，$\underline{\pi}=\pi_m$ かつ $\underline{\pi}$ が減少するような変化が生じた場合は，$I_{min}(\alpha,j)$から $m$ が脱落する。まとめると，

$$I_{min}(\alpha+d\alpha,j)=\begin{cases} I_{min}(\alpha,j) & \underline{\pi}=\pi_m\text{ で }d\underline{\pi}\geq0\text{ の場合または }\underline{\pi}\neq\pi_m \\ I_{min}(\alpha,j)\setminus\{\mathrm{m}\} & \underline{\pi}=\pi_m\text{ で }d\underline{\pi}<0\text{ の場合} \end{cases} \tag{32}$$

以上に注意して，(29)を微分し，移項整理すると，

$$dv_i=\begin{cases} 0 & \forall i\in I_{min}(\alpha+d\alpha,j) \\ \left(\dfrac{w''(u_{min})}{w''(u_i)}-1\right)du_{min}+\dfrac{\pi_i}{w''(u_i)}d\mu-\dfrac{1}{w''(u_i)}d(\mu\underline{\pi})\gtreqless0 & \forall i\in I\setminus I_{min}(\alpha+d\alpha,j) \end{cases} \tag{33}$$

となる($d(\mu\underline{\pi})=\mu d\underline{\pi}+\underline{\pi}d\mu$ である。また記法の簡便のため，以下，$I_{min}$ とは $I_{min}(\alpha+d\alpha,j)$を表すものとする)。

(33)全体に $p_i$ を乗じ，全ての $i\in I$ について和をとり，IR 制約より $du_{min}=-(1-\varepsilon)dE(\mathbf{v})$が成り立つことを考慮して移項整理すると，

$$E^{\varepsilon}\left[\frac{w''(u_{min})}{w''(u_i)}\right]dE(\mathbf{v})=\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\frac{\pi_i p_i}{w''(u_i)}d\mu-\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\frac{p_i}{w''(u_i)}d(\mu\underline{\pi}) \tag{34}$$

である。ここで，$E^{\varepsilon}\left[\dfrac{w''(u_{min})}{w''(u_i)}\right]\equiv\varepsilon+(1-\varepsilon)\sum_{i\in I_{min}}p_i+(1-\varepsilon)\sum_{i\in I_{min}}\dfrac{w''(u_{min})}{w''(u_i)}p_i$である。

また，(33)全体に$\pi_i p_i$を乗じ，全ての$i\in I$についての和をとり，タイプ2の解相互のIC制約より$d\mathcal{I}=0$であることを考慮して式を移項整理すると，

$$(1-\varepsilon)E\left[\frac{w''(u_{min})}{w''(u_i)}\right]dE(\mathbf{v})=\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\frac{\pi_i^2 p_i}{w''(u_i)}d\mu-\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\frac{\pi_i p_i}{w''(u_i)}d(\mu\underline{\pi}) \tag{35}$$

となる。ここで，$E\left[\dfrac{w''(u_{min})}{w''(u_i)}\right]\equiv\sum_{i\in I_{min}}\pi_i p_i+\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\dfrac{w''(u_{min})}{w''(u_i)}\pi_i p_i$である。

(34)と(35)を連立すると，

$$\frac{d\mu}{dE(\mathbf{v})}=\frac{1}{\Psi}\left[-B\left\{\varepsilon+(1-\varepsilon)\sum_{i\in I_{min}}p_i\right\}+A(1-\varepsilon)\sum_{i\in I_{min}}\pi_i p_i\right] \tag{36}$$

$$\frac{d(\mu\underline{\pi})}{dE(\mathbf{v})}=-(1-\varepsilon)w''(u_{min})+\frac{1}{\Psi}\left[-C\left\{\varepsilon+(1-\varepsilon)\sum_{i\in I_{min}}p_i\right\}+B(1-\varepsilon)\sum_{i\in I_{min}}\pi_i p_i\right] \tag{37}$$

ただし，$A\equiv\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\dfrac{p_i}{w''(u_i)}$，$B\equiv\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\dfrac{\pi_i p_i}{w''(u_i)}$，$C\equiv\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\dfrac{\pi_i^2 p_i}{w''(u_i)}$であり，更に$\Psi\equiv AC-B^2=\dfrac{1}{2}\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\sum_{k\in I\setminus I_{min}}\dfrac{(\pi_i-\pi_k)^2 p_i p_k}{w''(u_i)w''(u_k)}>0$である。

一方，プリンシパルの目的関数の全微分を，問題$(\alpha, j)$の最適解で評価すると，

$$dF(\alpha,j)=\sum_{i\in I_{min}}w'(u_{min})p_i du_{min}+\sum_{i\in I\setminus I_{min}}[w'(u_{min})+\mu(\pi_i-\underline{\pi})]p_i(du_{min}+dv_i) \tag{38}$$

IR制約とIC制約を考慮すると$du_{min}=-(1-\varepsilon)dE(\mathbf{v})$と$\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\pi_i p_i dv_i(=\sum_{i\in I}\pi_i p_i dv_i)=0$であり，確率分布の性質と尤度比の定義より$\sum_{i\in I}\pi_i p_i=0$であり，(33)より$\sum_{i\in I\setminus I_{min}}p_i dv_i=\sum_{i\in I}p_i dv_i=dE(\mathbf{v})$であることから，結局

$$\frac{dF}{dE(\mathbf{v})}=\varepsilon\left\{w'(u_{min})+\mu\sum_{i\in I\setminus I_{min}}(\pi_i-\underline{\pi})p_i\right\}-\mu\sum_{i\in I_{min}}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i \tag{39}$$

$E(\mathbf{v})$は$\alpha$と線形に正相関するので，補題6の証明のためには$\dfrac{d^2F(\alpha,j)}{dE(\mathbf{v})^2}>0$であることを示せば足りる。(39)より

$$\frac{d^2F}{dE(\mathbf{v})^2}=\varepsilon w''(u_{min})\frac{du_{min}}{dE(\mathbf{v})}+(1-\varepsilon)\sum_{i\in I_{min}}\pi_i p_i\frac{d\mu}{dE(\mathbf{v})}-\left\{\varepsilon+(1-\varepsilon)\sum_{i\in I_{min}}p_i\right\}\frac{d(\mu\underline{\pi})}{dE(\mathbf{v})} \tag{40}$$

であるが，これに(36)，(37)及び $\dfrac{du_{min}}{dE(\mathbf{v})}=-(1-\varepsilon)$ を代入し，因数分解すると，

$$\frac{d^2F}{dE(\mathbf{v})^2}=\left[(1-\varepsilon)^2\sum_{i\in I_{min}}p_i\right]w''(u_{min})$$

$$+\frac{1}{\Psi}\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\left\{\varepsilon\pi_i+(1-\varepsilon)\sum_{\kappa\in I_{min}}(\pi_i-\pi_\kappa)p_\kappa\right\}^2*\frac{p_i}{w''(u_i)} \tag{41}$$

を得るが，これは明らかに正であり，補題6が示された。　証明終

**補題7の証明**　少なくとも $\underline{\pi}(\alpha,j)$ の $\alpha$ の定義域の最小値 $\alpha_{min}(j)$ において，$\dfrac{\partial\pi}{\partial\alpha}<0$ である。なぜなら，$j\neq n$ の場合，$\alpha$ の定義域の最小値($\alpha=0$)は命題1より $E(\mathbf{v})$ が取りうる最小値を取っている場合に対応し，$\underline{\pi}(0,j)=\pi_{n-1}$ であるが，(8)より，$v_{n-1}$ の0からの限界的上昇（$\underline{\pi}$ の $\pi_{n-1}$ からの限界的減少）は不確実性プレミアムの上昇（$\alpha$ の上昇）を意味するからである。$j=n$ の場合，$\alpha$ の定義域の最小値（$\alpha=\dfrac{\pi_n}{\pi_{n-1}}-1$）において $\underline{\pi}=\pi_{n-2}$, $v_1=\cdots=v_{n-2}=v_n=0$,　$v_{n-1}=\dfrac{1}{p_{n-1}}\dfrac{\Delta c}{1-\varepsilon}\dfrac{1}{\pi_{n-1}p_{n-1}}$ であるが，IC制約より，$v_{n-2}$ の限界的上昇（$\Delta_{n-2}>0$, $\underline{\pi}$ の限界的減少に対応）と $v_{n-1}$ の限界的変化（$\Delta_{n-1}$）との間に $p_{n-1}\Delta_{n-1}=-\pi_{n-2}p_{n-2}\Delta_{n-2}/\pi_{n-1}$ という関係がある（問題($\alpha$, $j$)に解があるケースなので $\pi_{n-1}>0$ である)。そこで，$v_{n-2}$ の限界的上昇によって $E(\mathbf{v})$ が$(1-\pi_{n-2}/\pi_{n-1})p_{n-2}\Delta_{n-2}$ だけ上昇する。よって，$\alpha$ と $\underline{\pi}$ が逆相関する。このことと $\underline{\pi}$ の連続性より，少なくとも $\alpha_{min}(j)$ を含む $\alpha_{min}(j)$ の右方の閉区間においては $\partial\underline{\pi}/\partial\alpha<0$ である（補題7–2の前段)。

補題7–1について，(39）から，$\underline{\pi}(\alpha^*,j)\in(\pi_1,\pi_{n-1})$ でなければならないことが明らかであるが，問題は，関数 $\underline{\pi}(\alpha,j)$ が $\alpha$ について単調減少ではなく増加に転じる部分をもち，$\underline{\pi}(\alpha,j)=\underline{\pi}(\alpha^*(j),j)$ となる $\alpha$ が複数存在する場合である。しかし，この場合，$F(\alpha,j)$ が最も小さくなるのは，そのような $\alpha$ のうち最小の $\alpha$ についてである。なぜなら，問題($\alpha$, $j$)の1階条件(29)で特徴付けられるような契約について，$\underline{\pi}$ を固定し，$\mu$ のみ異なるような契約間で $F(\alpha,j)$ を比べると，$E(\mathbf{v})$ が小さくなるような契約ほど $F$ が小さくなるからである。

実際，(38)の右辺の $dv_i$ に(33)を，$d\underline{\pi}=0$ とおいて代入し，$du_{min}=-(1-\varepsilon)dE(\mathbf{v})$ に注意して整理すると，

$$\left.\frac{dF}{dE(\mathbf{v})}\right|_{d\underline{\pi}=0}=\varepsilon w'(u_{min})+\mu\cdot\frac{D(\varepsilon+(1-\varepsilon)\sum_{i\in I_{min}}p_i)+\Psi}{B-A\underline{\pi}}w'(u_{min}) \tag{42}$$

ここで，$D\equiv\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\dfrac{(\pi_i-\underline{\pi})^2p_i}{w''(u_i)}>0$ であり，また，$B-A\underline{\pi}=\sum_{i\in I\setminus I_{min}}\dfrac{(\pi_i-\underline{\pi})p_i}{w''(u_i)}>0$ である。

よって，補題7–1が示された。

補題7–2の後段は，上記(42)と $\underline{\pi}(\alpha,j)$ の連続性および問題($\alpha$, $j$)の $\alpha$ の定義域の最小値において $\partial\underline{\pi}/\partial\alpha<0$ であることから直ちに導かれる。すなわち，もし $\alpha^*(j)$ において $\dfrac{\partial\pi}{\partial\alpha}>0$ であるとすると，少なくとも1つの，$\alpha^*(j)$ より小さな $\alpha'$ について $\underline{\pi}(\alpha',j)$ が $\underline{\pi}(\alpha^*(j),j)$ に等しくなるが，(42)より $F(\alpha',j)<F(\alpha^*(j),j)$ となりこれは矛盾である。以上で補題7が示された。

証明終

**補題8の証明**　$\alpha$ が当該区間に含まれる場合，$\underline{\pi}(\alpha, j) \geq \pi_1$ であるので $I_{min}(\alpha, j)$ に $i=1$ が含まれ，$v_1^*(\alpha, j)=0$ である。従って，$\mathbf{v}^*(\alpha, 1)$ と $\mathbf{v}^*(\alpha, j)$ の凸結合 $\mathbf{v}' \equiv \theta\mathbf{v}^*(\alpha, 1)+(1-\theta)\mathbf{v}^*(\alpha, j)$ $(\theta \in (0, 1))$ もまた，問題$(\alpha, 1)$の制約条件を満たす。$w''>0$ であるので，もし $F(\alpha, 1)>F(\alpha, j)$ であるとすると，$E(w)|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}'}<\theta F(\alpha, 1)+(1-\theta)F(\alpha, j)<F(\alpha, 1)$ となり，$\mathbf{v}^*(\alpha, 1)$ が問題$(\alpha, 1)$の解であることと矛盾する。よって，$F(\alpha, 1) \leq F(\alpha, j)$ でなければならない。すなわち，補題8–1が成立する。

補題8–2は(39)と補題6から直ちに従う。　証明終

**補題9の証明**　まず，$F(\alpha, 1)$ の最小値を与える $\alpha^*(1)$ が，$\underline{F}(\alpha, 1, j)$ の最小値を与える $\alpha$ でもある。なぜなら，補題8–2と補題6より，$\overline{\overline{\alpha(j)}}$ を上回る $\alpha$ についての $F(\alpha, j)$ が $\underline{F}(\alpha, 1, j)$ の最小値となることはなく，補題8–1より，$\alpha \leq \overline{\overline{\alpha(j)}}$ なる $\alpha$ については $F(\alpha, 1) \leq F(\alpha, j)$ であるので，$\underline{F}(\alpha, 1, j)$ の最小値は $F(\alpha, 1)$ の最小値に一致するからである。

よって，$\alpha^*(1) \leq \overline{\overline{\alpha(j)}}$ の場合は補題6，補題8から補題9–1および2が直ちに従う。また，$\alpha^*(1)>\overline{\overline{\alpha(j)}}$ の場合も，補題6と補題8から区間 $[\overline{\overline{\alpha(j)}}, \alpha^*(1)]$ において依然として $F(\alpha, 1) \leq F(\alpha, j)$ が成立するので，この補題が従う。

以上で命題3が示された。

## 補遺C 系2の証明

$(34)*(C-\underline{\pi}B)-(35)*(B-\underline{\pi}A)$ より，$d(\mu\underline{\pi})=\underline{\pi}d\mu+\mu d\underline{\pi}$ を考慮して，$\Omega dE(\mathbf{v})=-\mu\Psi d\underline{\pi}$ を得る。ただし，

$$\begin{aligned}\Omega \quad \equiv \quad & \varepsilon \sum_{i \in I \setminus I_{min}} \frac{\pi_i(\pi_i-\underline{\pi})p_i}{w''(u_i)} \\ & +(1-\varepsilon)\left[w''(u_{min}(\alpha))\Psi+\sum_{i \in I \setminus I_{min}} \sum_{k \in I_{min}} (\pi_i-\pi_k)(\pi_i-\underline{\pi})\frac{p_i p_k}{w''(u_i)}\right] \end{aligned} \tag{43}$$

である。$\Psi>0$ であるので，$\Omega>0$ であることを示せば十分である。そして，問題$(\alpha, 1)$においては(29)より $\forall\kappa \in I_{min}, \forall i \in I \setminus I_{min}, k<i$ が成立するから(43)の右辺の第2項は正である。よって，第1項が正であれば $\Omega>0$ であり，系2が示された。

## 補遺D 補題3の証明

**3–1の証明**　$v_1=0$ を所与とする第1段階の問題の1階条件より，

$$\exp(v_i) = 1 + \mu \max(\pi_i - \underline{\pi}, 0) \tag{44}$$

(44)とIC制約を等式でを満たす近接の $\mathbf{v}$ 相互の比較についての全微分を考えると，

$$\exp(v_i)\,dv_i = \begin{cases} 0 & i \leq M \text{ の場合} \\ (\pi_i - \underline{\pi})\,d\mu - \mu d\underline{\pi} & i \geq M+1 \text{ の場合} \end{cases} \tag{45}$$

ただし，(32)より $M = \begin{cases} m & \underline{\pi} \in (\pi_m, \pi_{m+1}) \text{ の場合または } \underline{\pi} = \pi_m \text{ かつ } d\underline{\pi} \geq 0 \text{ の場合} \\ m-1 & \underline{\pi} = \pi_m \text{ かつ } d\underline{\pi} < 0 \text{ の場合} \end{cases}$

両辺を $\exp(v_i)$ で割り，更に $p_i$ を乗じて $i \in I$ についての和を取ると，

$$dE(\mathbf{v}) = (B - A\underline{\pi})\,d\mu - \mu A\,d\underline{\pi} \tag{46}$$

(ただし，$A \equiv \sum_{i \geq M+1} p_i / \exp(v_i)$，$B \equiv \sum_{i \geq M+1} \pi_i p_i / \exp(v_i)$ である)。同様に(45)の両辺を $\exp(v_i)$ で割り，$\pi_i p_i$ を乗じて $i \in I$ についての総和を取ると，IC条件より $d\mathcal{I} = 0$ だから，

$$0 = (C - B\underline{\pi})\,d\mu - \mu B d\underline{\pi} \tag{47}$$

(ただし $C \equiv \sum_{i \geq M+1} \pi_i^2 p_i / \exp(v_i)$ である)。

(46)と(47)から $d\mu$ を消去すると，$\dfrac{d\underline{\pi}}{dE(\mathbf{v})} = -\dfrac{C - B\underline{\pi}}{\mu \Psi_{\ln}}$ を得る。ただし，$\Psi_{\ln} \equiv AC - B^2 = \dfrac{1}{2} \sum_{i \in I} \sum_{\kappa \in I} \dfrac{(\pi_i - \pi_\kappa)^2 p_i p_\kappa}{\exp(v_i)\exp(v_\kappa)} > 0$ である。

更に，$C - B\underline{\pi} = \sum_{i \geq M+1} p_i\, Cov\left(\pi_i, \dfrac{\pi_i - \underline{\pi}}{\exp(v_i)} \,\middle|\, i \geq M+1\right) + \sum_{i \geq M+1} \pi_i p_i \sum_{i \geq M+1} \dfrac{\pi_i - \underline{\pi}}{\exp(v_i)}$ であるところ($Cov(\cdot,\cdot|i \geq M+1)$ は変数間の，$i \geq M+1$ であることを条件とした条件付き共分散)，単調尤度比条件より $\sum_{i \geq M+1} \pi_i p_i > 0$, $\underline{\pi}$ の定義から $i \geq M+1$ なる全ての $i$ について $\pi_i - \underline{\pi} > 0$ であり，また，第1段階の問題の1階条件から，$\dfrac{\pi_i - \underline{\pi}}{\exp(v_i)} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{1}{\exp(v_i)}\right)$ は $\pi_i$ と同様，$i$ についての増加列であるから $Cov\left(\pi_i, \dfrac{\pi_i - \underline{\pi}}{\exp(v_i)} \,\middle|\, i \geq M+1\right) > 0$ である。よって，$\dfrac{d\underline{\pi}}{dE(\mathbf{v})} < 0$ つまり $\dfrac{d\underline{\pi}}{d\alpha} < 0$ である。

**3–2 の証明**　第1段階の問題の1階条件(44)に注意して $\dfrac{-d \ln \rho}{dE(\mathbf{v})}$ の全微分を取ると，

$$d\left(\frac{-d \ln \rho}{dE(\mathbf{v})}\right) = \frac{\sum_{i \leq M} (\underline{\pi} - \pi_i)\, p_i\, d\mu + \mu\left(\sum_{i \leq M} p_i + \sum_{i \geq M+1} \pi_i p_i\right) d\underline{\pi}}{\{E[\exp(v_i)]\}^2} \tag{48}$$

右辺に(47)を代入して $d\mu$ を消去すると，

$$d\left(\frac{-d\ln\rho}{dE(\mathbf{v})}\right)=\frac{C\sum_{i\leq M}p_i+B\sum_{i\geq M+1}\pi_i p_i+\mu\sum_{i\geq M+1}\pi_i p_i(C-B\underline{\pi})}{\{E[\exp(v_i)]\}^2(C-B\underline{\pi})}\,d\underline{\pi} \tag{49}$$

補題 3–1 の証明に示したとおり $C-B\underline{\pi}>0$ であるから，(49)の右辺の分子が正であることを示せば足りる。第 1 段階の問題の 1 階条件(44)より $\pi_i=\frac{1}{\mu}(\exp(v_i)-(1-\mu\underline{\pi})B)$ であることを考慮すると，

$$C=\frac{1}{\mu}\left(\sum_{i\geq M+1}\pi_i p_i-(1-\mu\underline{\pi})B\right) \tag{50}$$

という関係がある。これを代入すると，

$$(49)\text{の右辺の分子}=\mu C\sum_{i\leq M}p_i+\mu\left(\sum_{i\geq M+1}\pi_i p_i\right)^2 \tag{51}$$

であり，$C\equiv\sum_{i\geq M+1}\frac{\pi_i^2 p_i}{\exp(v_i)}$ だから，(51)の右辺の第 1 項第 2 項ともに正である。

## 補遺 E 補題 4 の証明

(17)の全微分より，

$$d\left(\frac{-d\ln\rho}{dE(\mathbf{v})}\right)=\{E[\exp(v_i)]\}^{-1}\left(\sum_{i\leq M}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i d\mu+\mu P_M d\underline{\pi}\right)-\{E[\exp(v_i)]\}^{-2}dE[\exp(v_i)]$$

ここで，$E[\exp(v_i)]\equiv\sum_{i\in I}\exp(v_i)p_i$ であり，$M$ は(45)におけるのと同様に定義される，$P_M\equiv\sum_{i\leq M}p_i$ である。(15)の全微分より $dE[\exp(v_i)]=\sum_{i\geq M+1}(\pi_i-\underline{\pi})p_i\,d\mu-\mu(1-P_M)\,d\underline{\pi}$ である。これを代入して整理すると，

$$d\left(\frac{-d\ln\rho}{dE(\mathbf{v})}\right)=\{E[\exp(v_i)]\}^{-2}\left[\sum_{i\leq M}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i d\mu+\left(\mu P_M+\mu^2\sum_{i\geq M+1}\pi_i p_i\right)d\underline{\pi}\right] \tag{52}$$

である。一方(15)の全微分を $\exp(v_i)$ で除すと $dv_i=\frac{\pi_i-\pi}{\exp(v_i)}\,d\mu-\frac{\mu}{\exp(v_i)}\,d\underline{\pi}$ であるが，この両辺に $\pi_i p_i$ を乗じて $i\geq M+1$ について和を取ると $d\mathcal{I}=(C-B\underline{\pi})\,d\mu-\mu Bd\underline{\pi}$ である。これを(52)に代入して $d\mu$ を消去し，(50)を考慮すると，$d\left(\frac{-d\ln\rho}{dE(\mathbf{v})}\right)=\frac{\sum_{i\leq M}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i}{(C-B\underline{\pi})\{E[\exp(v_i)]\}^2}\,d\mathcal{I}+\frac{\partial MCR}{\partial\underline{\pi}}\,d\underline{\pi}$ である。すなわち，

$$\frac{\partial\left(\frac{-d\ln\rho}{dE(\mathbf{v})}\right)}{\partial\mathcal{I}}=\frac{\sum_{i\leq M}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i}{(C-B\underline{\pi})\{E[\exp(v_i)]\}^2}>0 \tag{53}$$

である。

## 補遺 F 命題 4 の証明

第 2 段階の問題の 1 階条件が恒等的に成立するから, (17) と補題 4 と (53) より,

$$d\varepsilon = \frac{\sum_{i\leq M}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i}{(C-B\underline{\pi})\{E[\exp(v_i)]\}^2}\,dI + \frac{\partial MCR}{\partial\underline{\pi}}\,d\underline{\pi}$$

である。$\varepsilon$ の変化前において，第 2 段階の問題の最適化の 1 階条件 (16) が成り立ち，$\varepsilon=\mu\sum_{i\leq M}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i/E[\exp(v_i)]$ が成立していたこと，また $\Delta c$ を所与とすると，$d\mathcal{I}=\mathcal{I}\frac{1}{1-\varepsilon}d\varepsilon$ であることから，これらを考慮して上の式を移項・整理すると，

$$\left[1-\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\mathcal{I}\frac{1}{1-\varepsilon}}{E[\exp(v_i)](C-B\underline{\pi})}\right]d\varepsilon=\frac{\partial MCR}{\partial\underline{\pi}}\,d\underline{\pi} \tag{54}$$

を得る。補題 4 より $\frac{\partial MCR}{\partial\underline{\pi}}>0$ だから，$\frac{d\underline{\pi}}{d\varepsilon}$ の符号は (54) の $d\varepsilon$ の係数の符号に一致する。

ところで，第 1 段階の問題の 1 階条件 (15) の両辺に $v_ip_i$ を乗じ，更にこれを $i\in I$ について足し合わせ，IC 制約を考慮すると，$\sum_{i\in I}\exp(v_i)v_ip_i=(1-\mu\underline{\pi})E(\mathbf{v})+\mu I$ が成立することから，

$$\mathcal{I}=\frac{1}{\mu}\left[\sum_{i\in I}\exp(v_i)v_ip_i-(1-\mu\underline{\pi})E(\mathbf{v})\right] \tag{55}$$

である。

更に，(15) より $E[\exp(v_i)]=(1-\mu\underline{\pi})+\mu\sum_{i\leq M}(\underline{\pi}-\pi_i)p_i$ が成立するので，これと第 2 段階の問題の 1 階条件 (16) ないし (17) より，

$$1-\mu\underline{\pi}=(1-\varepsilon)E[\exp(v_i)] \tag{56}$$

である。これを (55) に代入すると，

$$\mathcal{I}=\frac{1}{\mu}\left[\sum_{i\in I}Cov(\exp(v_i),v_i)+\varepsilon E[\exp(v_i)]E(\mathbf{v})\right] \tag{57}$$

を得る。

また，(15) より $\pi_i=\frac{1}{\mu}[\exp(v_i)-(1-\mu\underline{\pi})]$ であるので，$(C-B\underline{\pi})=\frac{1}{\mu^2}\sum_{i\geq M+1}\left[1-\frac{1-\mu\underline{\pi}}{\exp(v_i)}\right]*[\exp(v_i)-1]p_i$ であり，更に，$\exp(v_i)=1\quad\forall i\leq M$ だから，$(C-B\underline{\pi})=\frac{1}{\mu^2}\sum_{i\in I}\left[1-\frac{1-\mu\underline{\pi}}{\exp(v_i)}\right]*[\exp(v_i)-1]p_i$ であり，右辺に (56) を代入すると，

$$c-B\underline{\pi}=\frac{1}{\mu^2}\left\{Cov[\exp(v_i),-\exp(-v_i)]+\varepsilon E[\exp(v_i)]\left[1-E\left(\frac{1}{\exp(v_i)}\right)\right]\right\}>0 \tag{58}$$

を得る。(57) と (58) を (54) へ代入すると，(54) の $d\varepsilon$ の係数は (18) の右辺に一致する。すなわち命題 4 が示された。