＜論　　説＞

数値解析による最適投資行動の比較[1]

外　木　好　美

目　　次

1．はじめに
2．設備投資の調整費用がないケースと Dynamic Programing
　2.1．Sequential Problem アプローチ
　2.2．Dynamic Programing のアプローチ
　2.3．数値解析の手順（Value Function Iteration）
　2.4．数値解析の結果
3．設備投資の調整費用があるケース
　3.1．凸型調整費用（Tobin の q 理論）
　3.2．凸型調整費用と借入制約
　3.3．固定的調整費用
　3.4．凸型調整費用と大規模投資の固定的調整費用の追加
4．おわりに
5．補論：設備投資の非可逆性と非対称性

1．はじめに

本稿では，企業の利潤最大化に基づく様々な代表的な設備投資行動を比較・検討する。理論モデルの構造によっては，最適投資行動を閉形式（closed form）での解として得られるとは限らないため，数値解析を行う。そして，西岡・池田（2006）でノンパラメトリック推計された日本の財務データに基づく q と投資率の関係を導出するモデルを提示する。

本稿の構成は以下の通りである。まず第 2 節では，投資の調整費用が全くないモデルをベンチマーク・モデルとして取り上げ，Dynamic Programing から数値解析により最適投資行動を導く手順を概観する。第 3 節では，設備投資の調整費用を導入する。有名な Tobin の q 理論を導く凸型調整費用や，一括・大規模投資を導く固定的調整費用と，これらを同時にモデルに導入する場合を，数値計算により比較・検討する。各調整費用によるどのような投資行動が導出されるのかを考察した上で，日本の財務データからノンパラメトリック推計された q と投資率の関係を導出するモデルを提示する。第 4 節は，まとめである。また，第 5 節では，補論として，一括・大規模投資を固定的調整費用なしに導出するモデルを紹介する。

2．設備投資の調整費用がないケースと Dynamic Programing

企業は，前期末に行われた設備投資を受けて，当期首の資本ストックをもとに生産を行うとする。各期の設備投資は来期以降の生産に寄与する資本ストックとなることから，設備投資量の決定は Dynamic な問題となる。本節では，ベンチ・マークとして，設備投資に関する調整費用が全くない企業の無限期間での利潤最大化モデルを扱う。

2.1．Sequential Problem アプローチ

各 t 時点での技術ショックと資本ストックを，それぞれ，$A(t)$，$K(t)$ とし，生産関数を $A(t)\cdot K(t)^{\alpha}$，生産物価格をニュメレールとする投資財価格を $p(t)$ とする。この時，τ 時点での無限期間での利潤最大化モデルは，

$$\begin{aligned} &\max \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^{(t-\tau)} E\left[A(t)\cdot K(t)^{\alpha} - p(t)\cdot I(t)\right] \\ &\text{s.t. } I(t) = K(t+1) - (1-\delta)K(t) \text{ for all } t \qquad \cdots\cdots(1) \\ &K(\tau) = K_{\tau} \end{aligned}$$

となる。目的関数は，τ 時点以降の利潤の割引現在価値であり，企業価値を表している。ただし，β は割引ファクター，δ は物理的資本減耗率，E は期待値オペレータである。企業は τ 時点で，K_{τ} のもと，技術ショックを観測してから（つまり $E[A(\tau)] = A(\tau)$），今期以降の資本ストックの水準（つまり当期以降の設備投資）について意思決定を行う。

各期の最適な資本ストックは，(1)式の目的関数に制約条件を代入した上で得た $K(t)\,(t>\tau)$ に関する1階の条件

$$\beta E\left[\alpha\cdot A(t)\cdot K(t)^{(\alpha-1)}\right] = p(t-1) - \beta(1-\delta)p(t)$$

から求められる[2]。この結果を利用して，将来価格について繰り返し代入をして，t 期の投資財価格について求めると，

$$p(t) = \beta \Sigma_{\varphi=t}^{\infty} \{\beta(1-\delta)\}^{(\varphi-t)} E\left[\alpha\cdot A(\varphi)\cdot K(\varphi)^{(\alpha-1)}\right] \qquad \cdots\cdots(2)$$

を得る。企業の資本ストックの水準は，設備投資財価格と，設備投資による来期以降の資本ストック増による生産増（資本の限界生産性）の期待値の割引現在価値の和とが等しくなるように決定されることがわかる。

2.2. Dynamic Programing のアプローチ

当期首の資本ストックを K，当期末の投資後の資本ストックを $(1-\delta)K$，来期首の（当期末の投資後の）資本ストックを K' とする。なお，δ は各資本財の物理的減耗率であり，設備投資は $I=K'-(1-\delta)K$ となる。企業の生産関数を $A \cdot K^{\alpha}$ とすると，期首の技術ショック A を所与として，各期の企業価値 V に関する最大化問題は，

$$V(A,K)=\max_{K'}\langle A\cdot K^{\alpha}-p(K'-(1-\delta)K)+\beta E_{A'|A}[V(A',K')]\rangle \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

と書き表すことができる。ただし，β は割引ファクター，E は期待値オペレータ，A' は来期首の生産性ショックである。一般的に，ここでの A, K は状態変数，K', I はコントロール変数と呼ばれるものであり，(3)式のような関数方程式（Functional Equation）はベルマン方程式と呼ばれている。そして，$V(A,K)$ は価値関数（Value Function）と呼ばれ，状態変数の関数となる。ベルマン方程式を満たすような状態変数とコントロール変数の関係は，政策関数（Policy Function）と呼ばれている。

Sequential Problem アプローチでは各期の最適な資本ストックの水準値を解として求めていたが，Dynamic Programing のアプローチでは上記ベルマン方程式を満たすような関数 $V(A,K)$ を解として求めることになる。この価値関数は，Sequential Problem アプローチによる利潤最大化後の企業価値を与えるものになっている。そして，Dynamic Programing のアプローチでは，来期以降の資本ストック水準は問題とせず，来期以降は最適に行動することを前提として（つまり $V(A,K)$ という価値関数を前提として），当期の設備投資の政策関数（または来期首の資本ストックの政策関数）を求めることになる。2.1 で見た Sequential Problem の解を，(3)式のベルマン方程式の解が与えることは，Principle Optimality と呼ばれる[3]。

ここで，以下のようなオペレータ T を定義する。

$$(TV)(A,K)=\max_{I}\langle A\cdot K^{\alpha}-pI+\beta E_{A'|A}[V(A',K')]\rangle \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$
$$\text{s.t. } I=K'-(1-\delta)K$$

このオペレータが Contraction Mapping となっていれば，Contraction Mapping Theorem により不動点（Fixed Point）が存在する[4]。さらに，任意の価値関数からスタートし，オペレータ T を繰り返していけば，その収束先が不動点であり，ベルマン方程式の解となる価値関数を得る[5]ことが知られている。本稿で扱うモデルは，すべて，解を不動点として得られるようなパラメータ設定になっている。

来期の資本ストック K' の政策関数は，1階の条件

$$\beta E_{A'|A}\left[\frac{\partial V(A', K')}{\partial K}\right]=p \quad \cdots\cdots(5)$$

から求めることができる。(5)式と Sequential Problem の1階の条件である(2)式とを比較すると，限界的な価値関数が，来期以降の資本ストックが増加することによる生産増（限界生産性）の期待値の割引現在価値の和を意味していることがわかる。

2.3. 数値解析の手順（Value Function Iteration[6]）

Contraction Mapping Theorem により，数値計算においても，任意の価値関数（例えば，極端なケースとして $V(A, K)=0$ でも良い）を初期値として，オペレータ T を繰り返し計算していけば，その収束結果としてえられた価値関数がベルマン方程式の解となることが保証される。この数値解析の手法は，Value Function Iteration と呼ばれている。その手順は，以下の通りである。

①　ディープ・パラメータの決定

生産関数の形状とパラメータ（α, p, δ, β）の値を決める。

②　変数の離散近似

コンピュータでは連続空間は扱えないため，状態変数 A, K，コントロール変数 K' を離散空間に近似する[7]。

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n_A} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_{n_K} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} K_1' \\ K_2' \\ \vdots \\ K_{n_{K'}}' \end{bmatrix}$$

そして，来期の価値関数の期待値を算出する際に必要となる A の自己回帰過程をマルコフ過程に近似し，その推移確率を求める[8]。

$$P(A'=A_j \mid A=A_i)=\pi_{i,j}(1 \leq i, j \leq n_A) \text{ただし，} \sum_{j=1}^{n_A}\pi_{i,j}=1$$

③　Value Function Iteration のプログラムの構築と実行

Value Function Iteration のプログラムでは，②の離散空間で(4)式のオペレータを価値関数が収束するまで繰り返す。以下の1.～4.の演算で構成される。

1．$s=0$ の時は，価値関数の初期値は任意で構わないので，例えば極端ではあるが $V_s(A_i, K_j)=0(\forall i, j)$ という価値関数を設定する。

2．$V_s(A_i, K_j)$ を使って，$A=A_i, K=K_j$ の時の(4)式の右辺を計算し，$n_A \times n_K$ の行列

$$V_{i,j}=\max\left(A_iK_j^{\alpha}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}-p\begin{bmatrix}K'_1-(1-\delta)K_j\\K'_2-(1-\delta)K_j\\\vdots\\K_{n_{K'}}-(1-\delta)K_j\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\sum_{h=1}^{n_A}\pi_{i,h}V_s(A_i,K_1')\\\sum_{h=1}^{n_A}\pi_{i,h}V_s(A_i,K_2')\\\vdots\\\sum_{h=1}^{n_A}\pi_{i,h}V_s(A_i,K_{n_{K'}}')\end{bmatrix}\right)\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

を得る。

3．$[A_i]$$(n_A\times 1$ 行列）と $[K_i]$$(n_K\times 1$ 行列），そして $[V_{i,j}]$$(n_A\times n_K$行列）から，各 A_iの価値関数を補完（interpolation）[9] により求め，$V_{s+1}(A_i,K)$ とする。これは，$V_{s+1}(A_i,K_h')$ を求める際，必ずしも K_hが K'の点として得られないためである。

4．$\|V_{s+1}-V_s\|<\varepsilon$ と価値関数の変化が十分に小さくなるまで，2．と3．を繰り返す。

④　価値関数と政策関数の評価

$[A_i]$$(n_A\times 1$ 行列）と $[K_i]$$(n_K\times 1$ 行列）で $[V_{i,j}]$$(n_A\times n_K$行列）を補完して，価値関数 $V(A,K)$を得る。そして，$[A_i]$$(n_A\times 1$ 行列）と $[K_i]$$(n_K\times 1$ 行列）で，$[V_{i,j}]$$(n_A\times n_K$行列）を得る K'の値 $[K_{i,j}']$$(n_A\times n_K$行列）を補完して政策関数を得る。(6)式の h 行目が最大値となっているならば，$V_{i,j}$を得る K' は $K_{i,j}'=K_h'$ となる。

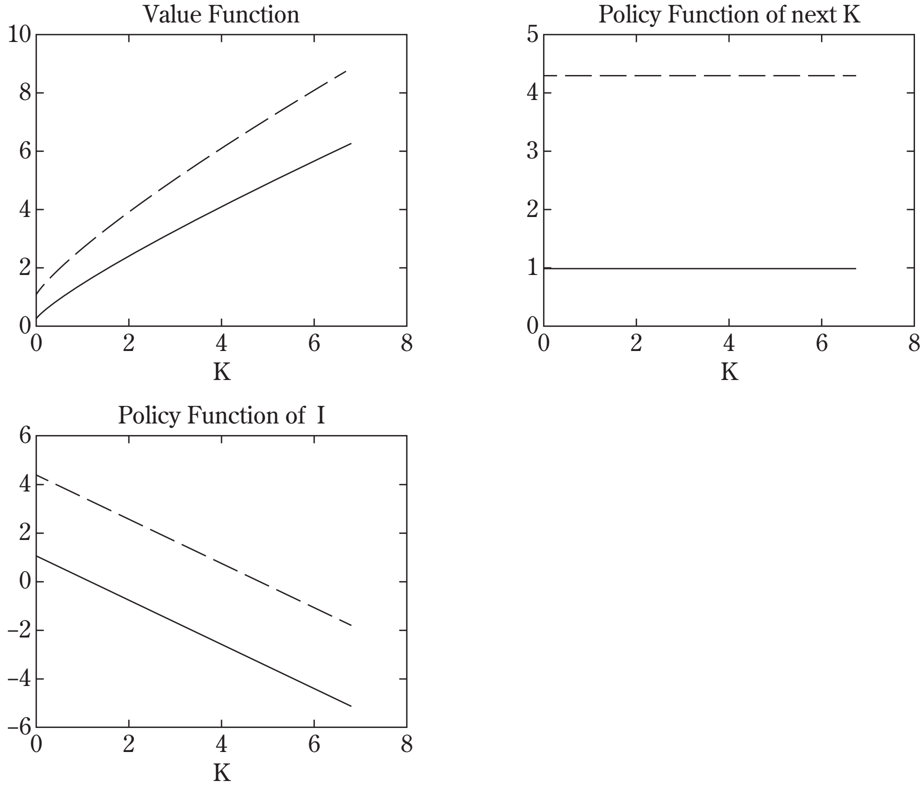
2.4. 数値解析の結果

ティープ・パラメータの値を $(\alpha,p,\delta,\beta)=(0.7,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.5)$ とする[10]。また，技術ショックは，$A'=\mu+0.6A+\varepsilon$$(\mu=0.4,\ E[\varepsilon]=0,\ std[\varepsilon]=0.2)$ の自己回帰過程を，バッド・ショックとグッド・ショックの2つの状態が発生するマルコフ過程に近似し，その実現値と推移確率は以下の通りであるとする。

$$\mathrm{A}=[0.75\quad 1.25]'\qquad\qquad \pi=\begin{bmatrix}0.933\cdots & 0.066\cdots\\0.066\cdots & 0.933\cdots\end{bmatrix}$$

図1が数値解析結果である。現在の資本ストック K がどのような値であっても，1階の条件である(5)式から，来期の資本ストックの水準 K'はある一定の値へと移る。そして，当期の設備投資 I は，来期の資本ストックが最適な水準となるよう，現在の資本ストックとのギャップの分だけ行われる。また，グッド・ショック実現すると，推移確率行列から来期もグッド・ショックとなる可能性が高く，そのために資本の限界生産性も高くなると予想されることから，限界的な価値関数の期待値も上昇し，最適な資本ストックの水準も大きくなっている。

図1　調整費用がないケース[11]



3．設備投資の調整費用があるケース

第3節では，設備投資を行う際に調整費用がかかるケースを想定する。前節では，設備投資の調整費用が存在しないため，最適な資本ストックの水準が常に実現していたが，調整費用が存在する場合は実現されるとは限らない。もし設備投資の調整費用が凸型である場合，設備投資の量が絶対値水準で大きいほど，調整費用も大きくなってしまうから，即座に最適な資本ストック水準を達成しようと一度に大きな設備投資を行うよりも，小出しに設備投資を行っていくことが最適となる。また，もし設備投資の調整費用が設備投資の量に依存せず固定的である場合，資本ストックが十分に減耗して限界的な企業価値が高まり，設備投資による企業価値の改善が固定費用以上になったと見込めない限り，設備投資は一切しない（$I=0$）ことが最適となる。

3.1と3.2では凸型調整費用について，3.3では固定費用について，3.4では凸型調整費用と固定費用の両者があるケースについて，数値解析を行う。その際は，比較可能性を考え，ディープ・パラメータ（α, p, δ, β）の値や，技術ショックAの値とその推移確率については，基本的に第2節と共通のものを使用する。以下では，ディープ・パラメータの値が第2節から変更があった場合と，新たに導入されたパラメータの値だけを記載する。

3.1. 凸型調整費用（Tobin の q 理論）

凸型調整費用として，投資率の 2 次の関数で表されるものを導入する。この調整費用は，以下で見る通り，Tobin の q 理論を導出する調整費用である。この時，企業の企業価値最大化モデルは，

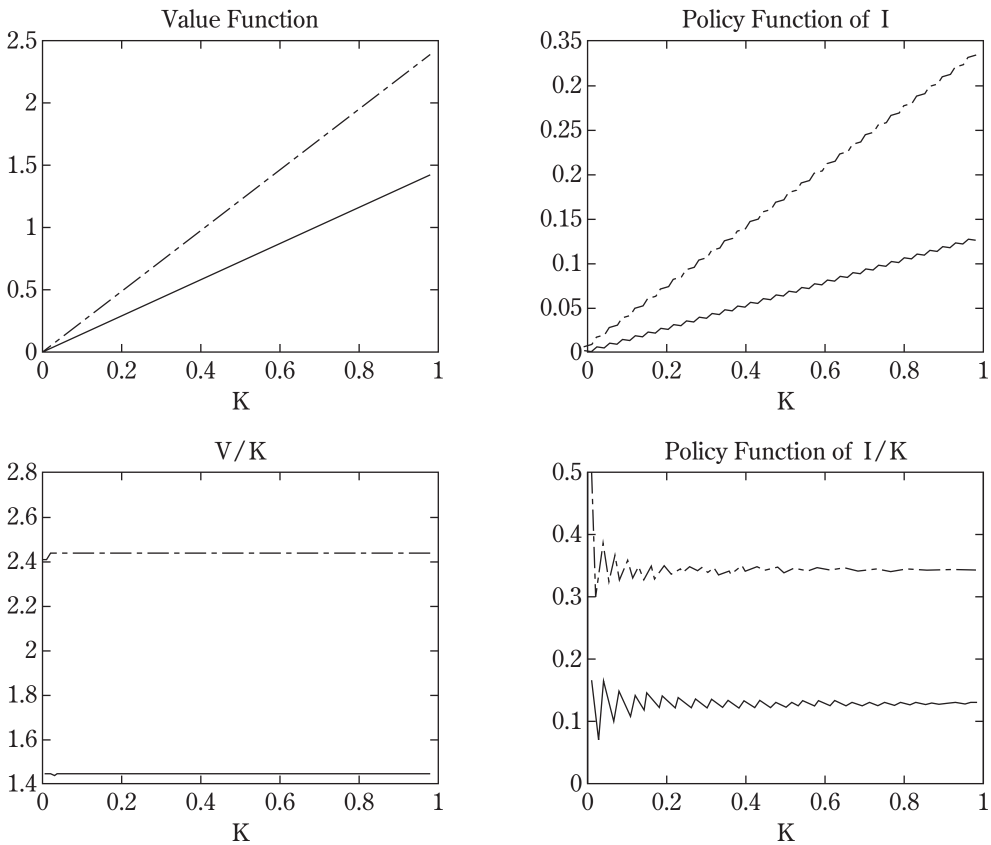
$$V(A, K) = \max_{K'} \left\langle A \cdot K^{\alpha} - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{K' - (1-\delta)K}{K} \right)^2 K - p(K' - (1-\delta)K) + \beta E_{A'|A}[V(A', K')] \right\rangle$$

と書き表され，1 階の条件から，政策関数は

$$\frac{I}{K} = \frac{1}{\gamma} \left(\beta E_{A'|A} \left[\frac{\partial V(A', K')}{\partial K} \right] - p \right) \cdots\cdots (8)$$

と求められる。調整費用がない第 2 節では(5)式から最適な資本ストックの水準が決定されていたが，(8)式では投資率の水準が決定されている。

図 2　凸型調整コスト[12]



数値解析では，ディープ・パラメータの値は（α,γ）=（1, 2）とした。この場合，Hayashi（1982）より $V(A, K)$ が K に関して 1 次同次となることから，限界 q と平均 q が一致し，

$$\frac{I}{K}=\frac{1}{\gamma}(q-1)p \quad ただし，q=\beta E_{A'|A}\left[\frac{V(A', K')}{pK'}\right]$$

と，Tobin の q 理論の平均 q で投資を説明する投資関数が導出される。

図 2 が数値解析結果である。企業価値 V や設備投資 I は，Hayashi（1982）の通り，資本ストック K の線形関数となっている。グッド・ショック実現すると，推移確率行列から来期もグッド・ショックとなる可能性が高く，そのために限界的な企業価値も高まると予想されることから，q の値も高まり，投資率の水準も高くなっている。

3. 2.　凸型調整費用と借入制約

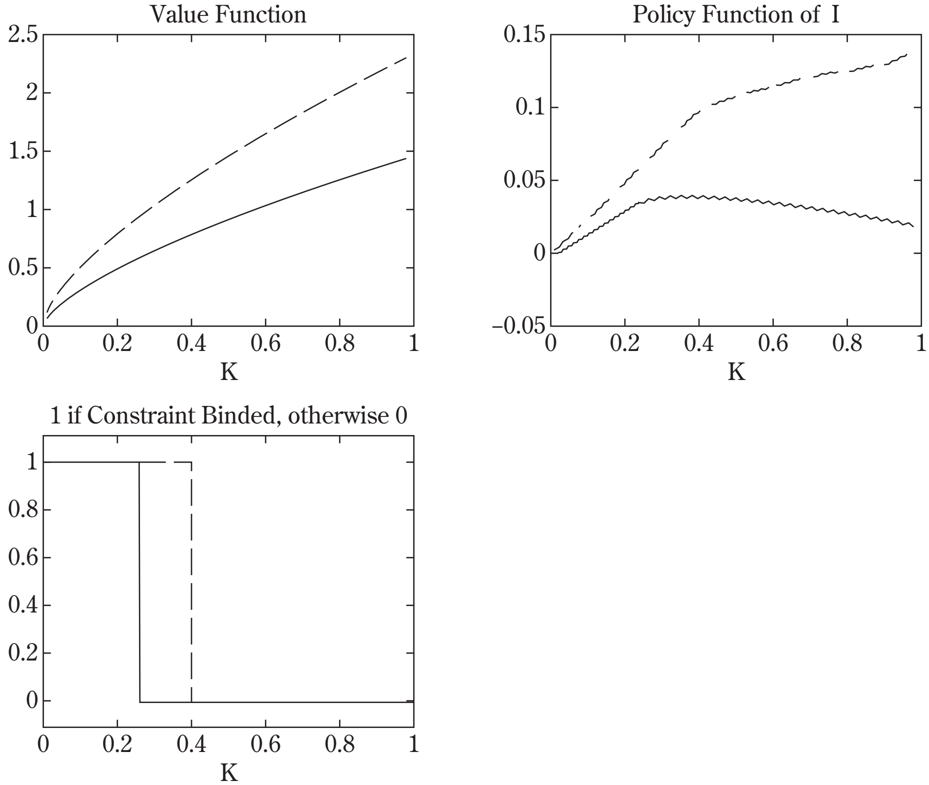
Tobin の q 理論はミクロ的基礎づけされた明快な理論であるものの，現実のデータに対して理論から期待されるようなパフォーマンスをあげていないことが，かねてより指摘されてきた[13]。ここでは，改善の 1 つの方向性として取り上げられた借入制約を 3. 1 のモデルに追加し[14]，数値解析を行う。ここでの借入制約は，今期の収益に対して b の割合までの資金準備しかできず，それが設備投資量の上限となるものとする。

$$V(A, K)=\max_{K'}\left\langle A\cdot K^{\alpha}-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{K'-(1-\delta)K}{K}\right)^{2} K-p(K'-(1-\delta)K)+\beta E_{A'|A}[V(A', K')]\right\rangle$$
$$\text{s.t. } K'-(1-\delta)K\leq b\cdot A\cdot K^{\alpha}$$

$\alpha=1$ の場合に借入制約がない場合の最適な設備投資は，状態変数 K に対して線形になり，投資率も一定となる[15]。そのため，すべての K で借入制約がバインドするか，もしくは，まったくバインドしない場合のどちらかになってしまう。ここでは，K の値によって，バインドする場合としない場合がでるようにするため，$\alpha=0.7$ とした。また，借入制約のパラメータは，$b=0.2$ とした。

図 3 が数値解析結果である。$\alpha=0.7$ とより，資本の限界生産性が低減することから，Tobin の q の理論とは異なり，K が大きくなるに連れて，I/K が一定ではなく，低減していく。K が小さい時の相対な I の比率は高くなるため，それだけ借入制約がバインドしやすくなる。図の設備投資の政策関数を見ると屈折（kink）しているが，ここが，借入制約がバインドするかの境界となっている。3. 1 の結果と同様，バッド・ショック実現するとグッド・ショックに比べて設備投資の量も少なく，借入制約がバインドし難くなるため，借入制約がバインドする K の範囲も狭くなっている。

図 3　凸型調整費用と借入制約[16]

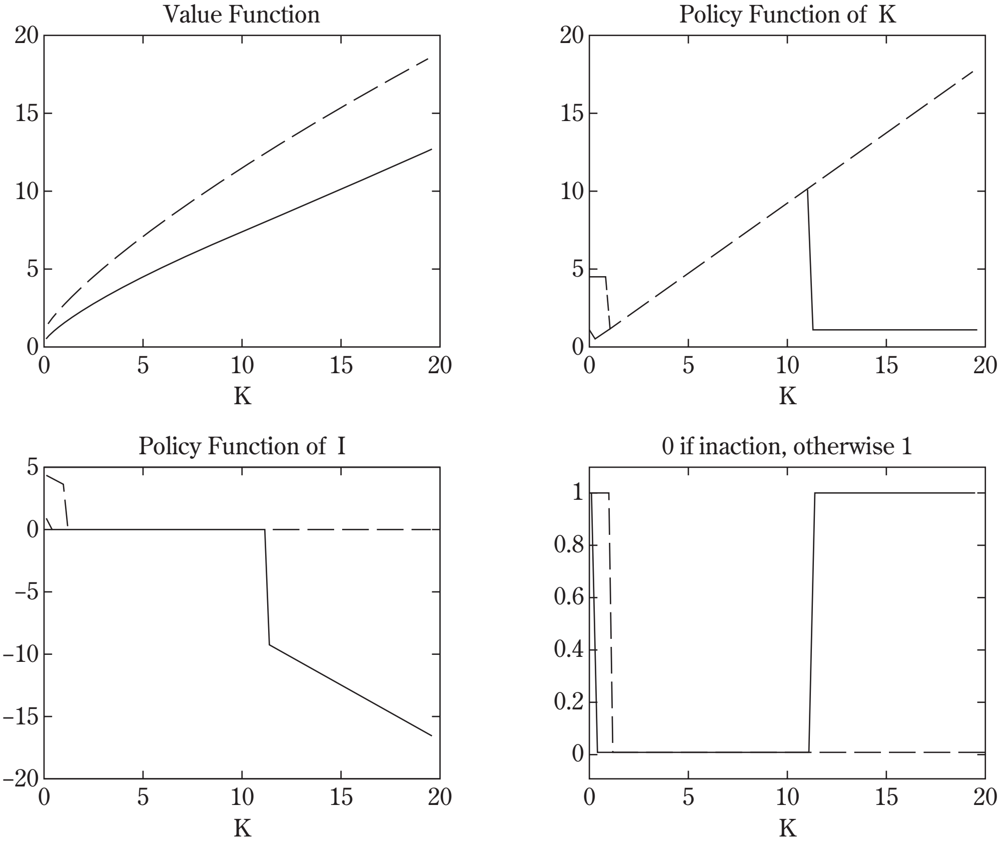


3.3. 固定的調整費用

Longitudinal Research Database（LRD）[17] といった事業所レベルのデータに基づく研究で，凸型調整費用の結果導出されるスムーズな（小出しの）設備投資行動ではなく，一括・断続的な投資行動の存在が指摘されてきた[18]。ここでは，一括・断続的な投資行動を生む固定的な調整費用がある場合について考察する[19]。

固定的な調整費用がある場合，設備投資による企業価値の改善が固定費用以上のものであると見込めない限り，設備投資は一切なされない。つまり，設備投資をしない場合に比べ，した方が企業価値が高まる場合に，設備投資が行われることになる。そして，設備投資を行う際，設備投資後の資本ストックの水準は，2 節で見た通り，限界的な企業価値と投資財価格が等しくなる水準に決定される。そこで，モデル構造も，①設備投資をしない場合と②する場合の 2 つのオプションを考え，より企業価値が高まる方を選択する構造になっている。設備投資をする際には，設備の備え付けのために事業所の営業が一時停止することを考慮して，$1-\mu$ の収益のロスがあるとしている。

図4　固定的調整費用[20]



$$V(A,K)=\max[V^i(A,K)\quad V^a(A,K)]$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} V^i(A,K)=\max_{K'}\langle A\cdot K^a+\beta E_{A'|A}[V(A',(1-\delta)K)]\rangle \\ V^a(A,K)=\max_{K'}\langle A\cdot K^a\cdot\mu-F\cdot K-p(K'-(1-\delta)K)+\beta E_{A'|A}[V(A',K')]\rangle \end{cases}$$

図4が，パラメータの値を（μ, F）=（0.9，0.1）とする数値計算の結果である。資本ストック K の水準が低い時は限界的な企業価値も高く，設備投資により固定費用以上に企業価値に改善が見込まれるため，設備投資を行う。資本ストック K の水準がある程度大きくなると，限界的な企業価値も逓減し，固定費用以上の企業価値の改善が見込めず，設備投資を行うことは非効率的となる。つまり，$I=0$ が最適な投資行動となる。そして，資本ストック K の水準があまりに大きくなり限界的な企業価値が十分に小さくなると，設備の売却による企業価値の低下も小さく，固定費用を支払ってでも設備の売却益を得た方が，企業にとって得となる。また，バッド・ショックに比べてグッド・ショックが起きた場合は，推移確率から来期もグッド・ショックが起こる可能性が高いことから，限界的な企業価値も高まり，$I=0$ が最適な投資行動となる資本ストック K の範囲と，設備の売却を行うことが最適な投資行動となる資本ストック K の範囲は，

それぞれ，右へとシフトすることになる[21]。

3.4. 凸型調整費用と大規模投資の固定的調整費用の追加

図 5 は，西岡・池田（2006）においてノンパラメトリック推計された，上場企業の Tobin の q と投資率の関係である。q が絶対値で大きいと投資率との比例関係が失われ，投資率はある上限値／下限値に張りついている[22]。それでは，どういった調整費用関数が，このような q と投資率の関係を生むのだろうか。

3.1～3.3 の結果を踏まえると，投資率が絶対値で小さい時は 2 次的な凸型調整費用にしたがっているが，投資率が絶対値で大きくなると固定費用が発生するという可能性が考えられる[23]。注目すべきは，q と投資率との比例線形関係が失われる範囲では投資率は 0 ではなく，上限値／下限値に張りつく形になっていることである。この範囲においては，固定費用だけでなく 2 次的な凸型調整費用も，同時に発生していることを意味するからである。q の値が多少高まって（低くなって）も，固定費用があるがために設備投資率をそのままに据え置くことが最適となり，固定費用を回収できる程の高い q が発生して（設備の売却利益がでる段階になって）初めて，大規模な設備投資に踏み切ることが予想される。

そこで，3.1 の 2 次的調整費用に加えて，投資率が $\underline{b}$ 以下または $\bar{b}$ 以上になると，固定的な調整費用 $F \cdot K$ が発生するモデルを数値計算する。

$$V(A, K) = \max_{K'} \left[A \cdot K^{\alpha} - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{I}{K} \right)^2 K - \left[\left(\frac{I}{K} \leq \underline{b} \right) \cup \left(\bar{b} \leq \frac{I}{K} \right) \right] \cdot F \cdot K - p \cdot I + \beta E_{A'|A} [V(A', K')] \right]$$

$$\text{s.t. } I = K' - (1 - \delta) K$$

ただし，$F \cdot K$ にかかっている $[\cdot]$ は，1 or 0 をとる指数関数（Indicator Function）である。

図 5　西岡・池田（2006）のノンパラメトリック推計

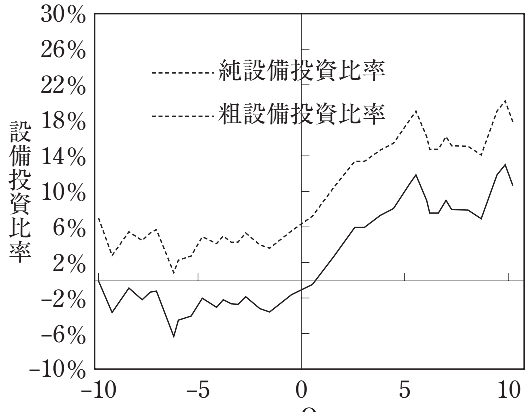


図6　凸型調整費用と固定的調整費用（大規模投資）[24]

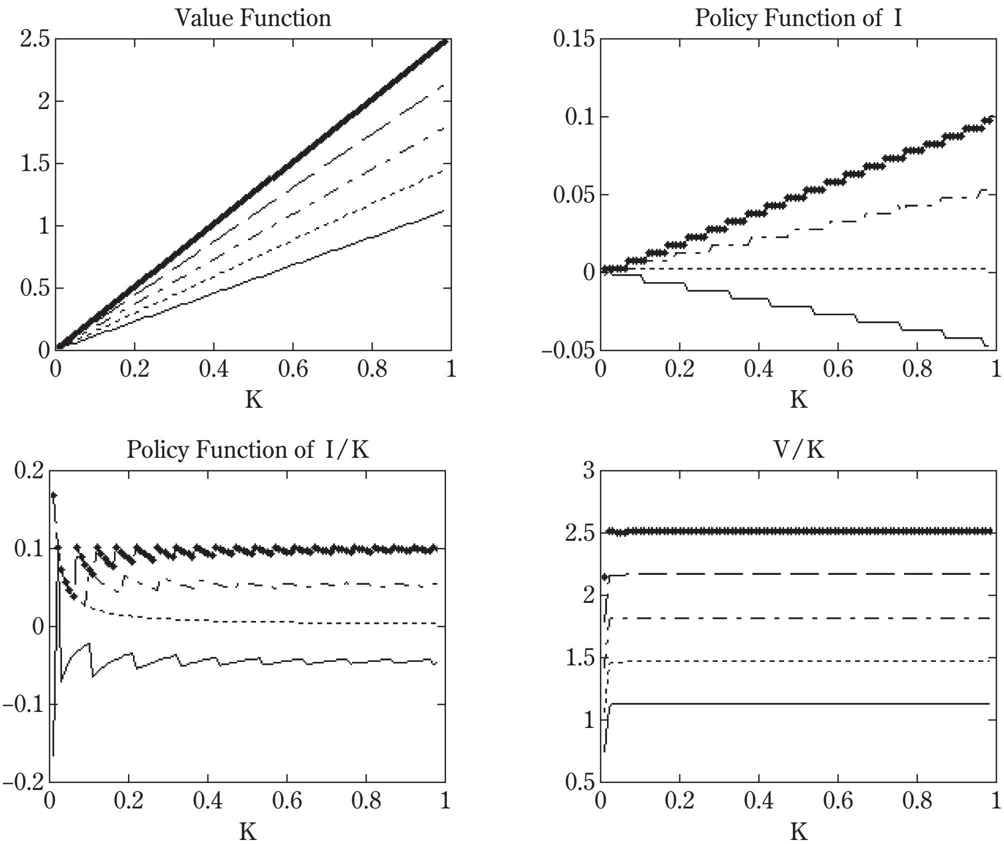


図6は，パラメータの値を（$\gamma, F, \underline{b}, \bar{b}$）=（2, 0.1, −0.1, 0.1）とする数値計算の結果である。技術ショックについては，ショックの大きさによって，投資率が上限に当たる場合とそうではない場合とを出現させるために，状態を2つより多く設定し，$A' = \mu + 0.6A + \varepsilon$（$\mu = 0.4$，$E[\varepsilon] = 0$，$std[\varepsilon] = 0.2$）の自己回帰過程を

$$A = [0.5 \quad 0.75 \quad 1 \quad 1.25 \quad 1.5]'$$

の5つの状態を持つマルコフ過程に近似した。もし高いショックが発生すると，$\rho = 0.6$ と自己回帰係数が高く，来期も同様の高いショックが発生すると予想される。したがって，より高いショックに，より高いqが対応することになる。3.1のような凸型調整費用のみであれば，qの大きさに比例して，投資率も高くなる。しかし，ここでは大規模投資に対して固定的な調整費用を追加している。1番目に高いショックにおいて投資を行おうとすると固定費用が発生するような大規模なものとなるが，その設備投資では固定費用を回収できる程の企業価値の改善は見込まれず，投資率を据え置くことが最適となる。そのため，1番目と2番目に高いqの値に，同じ投

資率が対応する結果が得られた。

4．おわりに

本稿では，企業の利潤最大化に基づく様々な代表的な設備投資行動を比較・検討した。理論モデルの構造によっては，最適投資行動を閉形式（closed form）での解として得られるとは限らないため，数値解析を行った。

調整費用が全くない場合，常に資本ストックは最適な水準になり，それが実現されるよう設備投資が実行されていた。しかし，投資率に2次の凸型調整費用の下（Tobin の q 理論）では，投資率が絶対値で大きい程調整費用がかかるため，一度に大きな設備投資をするよりも，小出しのスムーズな設備投資行動が得られた。一方，固定的な調整費用を導入すると，固定費用以上の企業価値の改善が見込めて初めて，最適な資本ストックの水準めがけて設備投資が実行されるという投資行動が得られた。

日本の上場企業における Tobin の q と投資率の関係は，西岡・池田（2006）のノンパラメトリック推計によると，q が絶対値で大きいと投資率との線形関係が失われ，投資率はある上限値／下限値に張りつく。そこで，3.4 では，投資率について2次の凸型調整費用に，設備投資が大規模となる場合に固定的調整費用が追加的に発生するモデルを提示した。このモデルの下では，q の値が十分に高く（低く）大規模な投資を行おうとしても，固定費用があるがために，設備投資率を据え置くことが最適となる。そして，固定費用を回収できる程の高い q（設備の売却利益がでるような低い q）が発生して初めて，大規模な設備投資に踏み切ることになる。

本稿では，3.4 のモデルのシミュレーション結果としてどのような投資分布が得られるのか，実際のデータに対応するディープ・パラメータの値はどうかまでは分析していない。これらは，今後の課題としたい。

5．補論：設備投資の非可逆性と非対称性

固定的な調整費用を導入することで，最適な資本ストック水準を即座に実現するため一度に設備投資を行うことが最適な行動となった。こういった一括・断続的な投資行動は，他のメカニズムでも発生する。

5.1．設備投資の非可逆性

投資の非可逆性とは一度備え付けた設備は売却できないとするモデルであり，設備投資に関して $I \geq 0$ という制約を課すことで，任意の投資モデルを設備投資の非可逆性があるケースに拡張することができる。負の設備投資ができないため，経年とともに資本ストックが十分に減耗し，限界的な企業価値が高まって初めて，正の設備投資が実行されることになる。つまり，待ちオプションが発生することになる。

5.2. 設備投資の非対称性

正と負の設備投資で，投資財価格が非対称となる場合にも，一括・断続的な投資行動が現れる。中古の設備は，生産に完全には適合しないであろうから，中古市場にフリクションが生じているとしている。ここでは，2節のモデルを，購入価格 $\overline{p}$ よりも売却価格 $\underline{p}$ の方が安くなるケースに拡張する。投資財価格の非対称性は，任意の投資モデルに導入することが可能である。ここでは，ベンチマーク・モデルに基づいた議論を行う。

投資財価格の非対称性を導入すると，ある閾値 $\overline{K}$，$\underline{K}$ の下，$I>0(K\leq\overline{K})$，$I=0(\overline{K}<K<\underline{K})$，$I<0(K\geq\underline{K})$ の3つのオプションが発生する。$K\leq\overline{K}$ の時，(5)式に対応した $\beta E_{A'|A}\left[\frac{\partial V(A',K')}{\partial K}\right]=\overline{p}$ の条件から，来期の資本ストックがある一定の水準 $\overline{K}$ となるよう正の設備投資が行われる。一方，$K\geq\underline{K}$ の時も，(5)式に対応した $\beta E_{A'|A}\left[\frac{\partial V(A',K')}{\partial K}\right]=\underline{p}$ の条件から，来期の資本ストックがある一定の水準 $\underline{K}$ となるよう負の設備投資が行われる。そして，$\overline{K}<K<\underline{K}$ では，限界的な価値関数が低減的であるので，$\overline{p}>\beta E_{A'|A}\left[\frac{\partial V(A',K')}{\partial K}\right]>\underline{p}$ となり，次のように $I=0$ が最適な投資行動となる。負の設備投資をする際，設備の縮小による企業価値減を補う程の設備の売却益が得られないため，設備の売却は選択しない。同様に，正の設備投資をする際，設備の拡大による企業価値増以上の設備の購入価格となるため，設備の購入は選択しない。

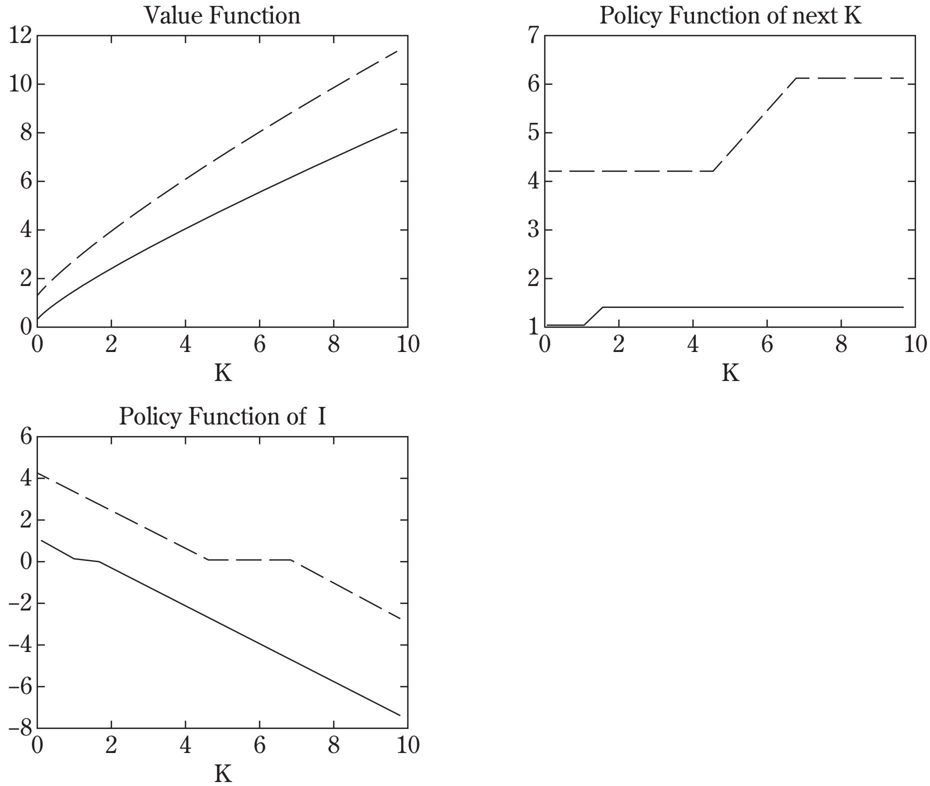
以上を受けて，モデルは，$I>0$，$I=0$，$I<0$，の3つのケースの企業価値の最大値をとる構造になっている。

$$V(A,K)=\max[V^{buy}(A,K)\quad V^{i}(A,K)\quad V^{sell}(A,K)]$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} V^{buy}(A,K)=\max\limits_{K'}\langle A\cdot K^{\alpha}-\overline{p}(K'-(1-\delta)K)+\beta E_{A'|A}[V(A',K')]\rangle \\ V^{i}(A,K)=\max\limits_{K'}\langle A\cdot K^{\alpha}+\beta E_{A'|A}[V(A',(1-\delta)K)]\rangle \\ V^{sell}(A,K)=\max\limits_{K'}\langle A\cdot K^{\alpha}-\underline{p}(K'-(1-\delta)K)+\beta E_{A'|A}[V(A',K')]\rangle \end{cases}$$

図7は，パラメータの値を（$\overline{p}$，$\underline{p}$）＝（0.5，0.46）とする数値計算の結果である。上記の議論の通り，資本ストック K が大きくなるにしたがって，$I>0$，$I=0$，$I<0$ の順でオプションが発生している。バッド・ショックに比べてグッド・ショックが起きた方が，推移確率から来期もグッド・ショックが起きると予想されることから，限界的な企業価値の期待値も上昇する。そのため，図上の $I>0$，$I=0$，$I<0$ の各オプションが発生する資本ストック K 範囲も，右へとシフトしている。

図 7　投資の非対称性（設備の購入価格が売却価格を上回る場合）[25]



注

1　本論文の作成にあたっては，浅子和美教授（一橋大学経済研究所）ならびに中村純一准教授（一橋大学経済研究所）から有益なコメントを頂いた。記して感謝したい。残された誤りはすべて筆者の責任に帰す。

2　割引ファクター β と安全資産の利子率 r の間に $\beta(1+r)=1$ が成立しているとし，投資財価格の上昇率を $\pi(t)$ とすると，$p(t-1)-\beta(1-\delta)p(t)\cong(r+\delta-\pi(t))p(t)$ となる。これは，次期の資本の限界生産性の期待値と資本レンタルコストが一致するところで各期の資本ストックが決定されることを意味する。

3　その証明については，Stokey and Lucas（1989）を参照のこと。非確率的モデルについては Theorem 4.2 を，確率的モデルについては Exercise 9.4。

4　Contraction となる十分条件は，Monotonicity と Discounting である。詳しくは Blackwell（1965）。Pay-off 関数（ここでは生産関数）が実数値関数で連続，有界であり，割引ファクターが $0<\beta<1$ を満たし，制約条件が空ではなくコンパクト値で連続であるならば，Contraction Mapping Theorem が成立する。詳しくは，Stokey and Lucas（1989）を参照。非確率的モデルについては Theorem 4.13 を，確率的モデルについては Theorem 9.6。

5　この時の不動点への収束スピードは，β となる。

6　Value Function Iteration の他に，価値関数ではなく政策関数を直接求める Policy Function Iteration やオイラー方程式を利用して政策関数を求める Projection Methods と呼ばれる方法もある。ここでは，企業価値と設備投資の関係を見たいため，Value Function Iteration による方法を用いている。

7　離散空間に近似する際，点を多く取ると（大きい n_A，n_K，$n_{K'}$）計算精度は上がるが，計算時間が増す

というトレード・オフが存在することに注意が必要である。

8　1階の自己相関過程を1階のマルコフ過程に近似する方法については，Tauchen（1986）や Tauchen and Hussey（1991）を参照。

9　補完方法は，線形補完やスプライン補完等，様々ある。補完方法によっては，計算負荷が異なっており，補完（内挿／外挿）する関数の形状によって向き不向きがある。

10　割引ファクターは，一般的には，安全資産利子率の逆数を設定することが多い。ただし，この値は，Value Function Iteration の収束スピードを決定する。本稿では，収束しやすいよう 0.5 という値を与えている。

11　破線はグッド・ショックの時，実線はバッド・ショックの時。

12　破線はグッド・ショックの時，実線はバッド・ショックの時。ステート K が小さい時の I/K がなめらかに描かれていないが，連続変数を離散化する際に，小さい K, I の値で点を多くとるようにすれば，なめらかな横線として描かれる。

13　浅子・國則（1989）は，そうした当時の現状に対して，以下のような問題点を指摘している。(1)Tobin の q の説明力はさほど高くない。(2)現在の q だけでなく，過去の q が説明力を持つ。(3)q 以外の変数を加えると，q 以外の変数が有意な説明力を持ち，q の説明力が低下する場合がある。

14　包括的なサーベイは，Hubbard（1998）にある。実証分析では，借入制約がバインドしている企業群とそうではない企業群とにデータを分け，q に加えてキャッシュ・フロー変数が有意となるかを検証するもの等がある。

15　$\alpha=1$ の場合，生産関数だけでなく，借入制約も K の一次同次である。そのため，3.1 同様，政策関数も K の一次同次関数となる。詳しくは，Stokey and Lucas（1989）の Theorem 4.14（非確率的）と Exercise 9.10 を参照。したがって，借入制約がある場合も，限界 q と平均 q は等しくなる。

16　破線はグッド・ショックの時，実線はバッド・ショックの時。

17　アメリカのセンサス局。

18　初期の研究として，Doms and Dunne（1998）がある日本の自動車産業の事業所データを分析したものに Uchida, Takeda and Shirai（2012）がある。

19　調整費用導入せずに一括・断続的な投資行動を生むモデルについては，補論を参照。

20　破線はグッド・ショックの時，実線はバッド・ショックの時。

21　図では，グラフの横軸にとっている資本ストック K が 20 までとなっており，グッド・ショックの場合に設備の売却が最適な投資行動となる場合の政策関数まで描ききれていない。

22　浅子・外木（2013）では，試験的ではあるが，資本財の多様性を考慮した上で，投資率について2次となる凸型調整費用で説明できる投資率の範囲について検証している。

23　外木・中村・浅子（2010）でも，設備のほぼ全てを新規購入／売却・除却するようなデータが観測されている。

24　全ての図で，より上にある線がより高い技術ショックに対応するものになっている。ステート K が小さい時の I/K がなめらかに描かれていないが，連続変数を離散化する際に，小さい K, I の値で点を多くとるようにすれば，なめらかな横線として描かれる。

25　破線はグッド・ショックの時，実線はバッド・ショックの時。

参考文献

Adda, Jerome and Russell W. Cooper（2003）*Dynamic Economics*, Cambridge, MA: MIT Press, 2003.

Doms, Mark E., and Timothy Dunne（1998）"Capital Adjustment Patterns in Manufacturing Plants," Review of Economic Dynamics, Elsevier for the Society for Economic Dynamics, vol. 1(2), pages 409–429, April.

Hayashi,Fumio（1982）"Tobin's Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation," Econometrica, Econometric Society, vol. 50(1), pages 213–24, January.

Hubbard, R. G. (1998), "Capital-market Imperfections and Investment," Journal of Economic Literature, 36, pp. 193–225.

Stokey, Nancy and L., Robert E. Lucas Jr. with Edward C. Prescott (1989) *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, 1989.

Tauchen, G. (1986) "Finite state Markov-chain approximation to univariate and vector autoregressions," Economic Letters 20：177–81.

Tauchen, G., and R. Hussey (1991) "Quadrature-based methods for obtaining approximate solutions to nonlinear asset pricing models," Econometrica 59：371–96.

Uchida, Takeda and Shirai (2012) "Technology and Capital Adjustment Costs: Micro evidence of automobile electronics in the auto-parts suppliers," Discussion papers 12001, Research Institute of Economy, Trade and Industry (RIETI).

浅子和美・國則守生（1989）「土地設備投資理論とわが国の実証研究」宇沢弘文編『日本経済：蓄積と成長の軌跡』東京大学出版会，151–182 頁。

浅子和美・外木好美（2010）「資本ストックの異質性と Multiple q」，Discussion Paper Series No a 541, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University.

外木好美・中村純一・浅子和美（2010）「Multiple q による投資関数の推計過剰設備の解消過程における資本財別投資行動の考察」経済経営研究，Vol. 31，No. 2，日本政策投資銀行設備投資研究所。

池田大輔・西岡慎一（2006）「断続的な設備投資（Lumpy Investment）：Generalized（S, s）モデルに基づいた分析」日本銀行ワーキングペーパーシリーズ No. 06-J-15.