<論　説>

# 基本給と歩合給の混合による賃金契約と，エージェントのナイト流不確実性

玉　井　義　浩*

## 1　序

長期不況の影響で，日本の企業の中には，それまでの賃金体系を見直し，成果連動型の変動給への移行を検討する企業が見られる。変動給を用いる事の経済学的根拠の一つは，非対称情報下のプリンシパル・エージェント問題に求めることができる。すなわち，プリンシパル（依頼者）対エージェント（代理者）の関係（株主　対　経営者，雇用者　対　被雇用者，依頼人　対　弁護士など）に於いて，依頼者が代理者の業務執行態度（努力水準）を把握できない（努力が代理者の私的情報である）場合，代理者の側に依頼者の目を盗んで怠けるインセンティヴが発生しうるという，いわゆるモラルハザードの問題が存在する。この代理者のモラルハザードを極力阻止し，代理者の努力提供のインセンティヴを高めるためには，怠ける事の代理者にとっての機会費用及び努力を追加する事の限界便益を高める必要があり，そのためには報酬を明白に観察可能な成果に連動させる必要がある，というのである。

しかし，成果連動型の変動給が代理者のインセンティヴを高めるのは，代理者にとって，努力する事によってより高い成果が上がる見込みがあるからであって，そのためには，努力の結果としての成果がある程度客観的に評価可能であること，及び，努力水準を高めればより良い成果が上がるという見込みがある程度あること，が前提となる事が容易に推察できる。

事実，成果の評価について依頼者と代理者の間で仮に争いが無い場合であっても，非対称情報下で成果連動型の変動給によってパレート効率性が達成されるのは，代理者の努力と成果の間の関係に全く不確実性がない（これだけ頑張ればこれだけの成果が上がるということが予め確実にわかっている）場合か，その関係が不確実であっても依頼者・代理者双方がリスク中立的である場合，のように，極めて限定的な場合に過ぎない（前者の場合は，依頼者・代理者の共同利得を最大化するような努力水準（そのような努力水準がどのようなものかは，予め確実にわかっている）を代理者が自発的に選ぶように，代理者の期待効用がその努力水準で最大となるように報酬体系（インセンティヴ・スキーム）を作ることが可能であるし，後者の場合は，例えば依頼者が予め一定額の分け前を取り，残余の成果を全て代理者が取るような契約（リーズ・ホールド契約）によって，代理者の私的利害と依頼者・代理者双方の共同利害を一

*E-Mail： tamai-y@kanagawa-u. ac. jp

致させることができる）。

これに対し，代理者の努力水準を依頼者が把握できず，成果が努力だけでなく運・不運の確率的要素に左右される場合で，代理者がリスク回避的な選好をもっている場合には，一般に，変動給によって代理者のインセンティヴが高まる一方，リスク回避的な代理者の期待効用は下がってしまうというトレード・オフが生じるために，変動給はあくまで次善均衡である。また，その変動給が成果連動型の変動給（より高い成果に高い報酬を払う形の変動給）となるのは，努力すれば高い成果が上がる蓋然性が高まると，ある程度明確に代理者が認識している場合に限られる。

このように，プリンシパル・エージェント問題（エージェンシー問題）については，解の存在の保証，また，解が成果連動型の変動給となる（インセンティヴ・スキーム（報酬額と成果の関係）が成果の単調（弱）増加関数となる），いずれのためにも，努力と成果の間の確率的関係が諸仮定を満たしている必要がある。特に，インセンティヴ・スキームの単調性については，確率分布が単調尤度比条件（Monotone Likelihood Ratio Condition: MLRC）を満たし，より高い努力が高い成果の確率を増す，という見込みが仮定されている必要がある（Grossman and Hart（1983））。

また，Mirelees（1975）以来指摘されているとおり，次善の最適解が存在するとしても，1階条件から接近した解が必ずしも最適解であるという保証は無い。そこで，エージェンシー問題を1階条件で解く場合には，確率分布については更に強い仮定（累積分布の凸性条件：Convex Distribution Function Condition: CDFC）あるいは，それに準じた仮定が成立している必要がある（Rogerson（1985）, Jewitt（1988））。

このような技術的問題に加え，より根本的な問題として，従来のエージェンシー問題が扱っている「不確実性」の捉え方，に関する問題がある。確かに従来のエージェンシー問題の殆んどは，「努力しても高い成果が実現するとは必ずしも保証されない」という意味での不確実性を扱ってはいる。しかし，そこでは成果の実現値は「不確実」とはいえ，努力と成果の間の撹乱的な要因の（主観的）確率分布は依頼者・代理人双方ともわかっている，という形で定式化が行なわれている。このような「不確実性」は，Frank Knight（1921）の用語法に従えば，厳密には「リスク」と呼ばれるものであり，確率分布がわからない状況，という意味での不確実性（Knightian uncertainty）とは異なる。そして，「リスク」による不確実性の定式化は，Savage（1954）による公理化以来，経済学のあらゆるモデル化に応用されてきたものである。

しかし，Savage，及びその基になっているvon Neumann=Morgenstern（vNM）の期待効用理論については，その問題点についても比較的早い段階から指摘されてきた。すなわち，一般にありそうな，人々の不確実性回避的な選好順序（分布が予めわかっているくじを，わからないくじよりも好む）を，vNMの期待効用理論では説明できない（Ellsberg's Paradox）。

そこで，経済主体が，確率分布そのものがよくわからないという意味での不確実性（ナイト流不確実性）に直面している場合に，不確実性が存在しない場合に均衡となる成果連動型の変動給が，妥当なインセンティヴ・スキームとなる保証は無い。現実にも，純然たる成果連動型の変動

給（歩合給）を採る労働現場は稀で，多くは基本給と歩合給の混合に依っている。日本の多くの労働現場で，賞与が景気変動に応じて変化する変動給的側面をもっていたと解釈することも可能であるし，成果の客観的把握の比較的容易な保険の販売員の給与ですら，基本給と歩合給の組み合せによっている。このように実際の賃金支払いは，多分に下方に硬直的（ある程度低い成果に関しては，成果の多寡によらず固定給が支払われる）な構造を取ることが多い。

本稿は，純然たる変動給が次善均衡となるような，通常のエージェンシー問題（努力と成果の間の確率的関係に関し単調尤度比条件が成立している）に，ごくわずかに労働者の側のナイト流不確実性が加わっただけで，固定給（基本給）と変動給（歩合給）の組み合せが次善均衡として得られる，という事を明らかにする。つまり，現実に多く観察される固定給と変動給を混合した賃金契約が，労働者の側がナイト流不確実性に直面している場合のエージェンシー問題の解として，自然に導かれる，という事を示す。

近年，ナイト流不確実性に直面する経済主体の選好順序の公理化が様々な形で実現している。代表的なものに，Gilboa and Schmeidler（1989）のMaximin期待効用，Schmeidler（1989）のChoquet期待効用による表現がある。前者は，vNMのような単一の確率分布に基づく期待効用ではなく，複数の確率測度の集合から経済主体にとって最悪の事態をもたらすような測度を用いた期待効用，後者は非加法的測度（確率測度の満たす性質のうち，加法性のみ緩めたもの）を用いたChoquet積分を用いた期待効用で表現される。また，Schmeidlerの特殊例として，Nishimura and Ozaki（2002, 2003）及びKojima（2004）によって公理が与えられた$\varepsilon$-contaminationと呼ばれる確率測度の集合を用いたMaximin期待効用による表現がある。

これらの公理化を受け，ナイト流不確実性の下でのエージェンシー問題を扱った研究にGhirardato（1994）がある。これは単一の依頼者と単一の代理者とが得られた成果をどのように分けるかを分析したものであるが，依頼者・代理者双方とも同一の非加法的確率測度によるChoquet積分で利得を評価する（依頼者・代理者双方が同程度の不確実性に直面している）という定式化である。そして，興味深い数値例として，インセンティヴ・スキームが成果と「負の相関」をする例が示されている。

一方，本稿で扱うエージェンシー問題はGhirardato（1994）と基本設定が同様であるものの，ナイト流不確実性の定式化が異なる。不確実性に直面しているのは代理者のみという非対称的な状況で，代理者が利得を確率測度の集合$\varepsilon$-contaminationを用いたMaximin期待効用で評価する場合を分析している。得られた主要な結論は以下のとおりである。代理者がナイト流の不確実性に直面している場合，最適なインセンティヴ・スキームは，固定給と変動給の組み合わせ，すなわち，比較的低い成果については成果の多寡に関わらず固定給を支払い，ある成果を超える成果を上げた場合については，その多寡に連動した変動給を支払う，という形のものになる。その固定給の対象となる成果の範囲は，代理者の直面する不確実性が大きいほど大きくなる。しかし，固定給の範囲が大きくなるにつれ，代理者の側のモラル・ハザードの問題が深刻となるため，代

理者へ実行させることの出来る努力水準は低下する。

本稿の以下の構成は次のとおりである。まず第2節で，本稿で用いる，確率測度の集合$\varepsilon$-contaminationを用いたナイト流不確実性の定式化を概説した後，第3節で主要モデルと命題を述べる。第4節に於いて不確実性の度合いと固定給・変動給の組み合わせの関係についての比較静学を紹介し，第5節で結論を述べる。

## 2　$\varepsilon$-Contamination Maximin Expected Utilityによるナイト流不確実性の定式化

ナイト流不確実性の定式化・公理化には，von Neumann-Morgenstern型の期待効用理論を確率アクト（Lottery Act）間の選好順序に引き直したAnscombe-Aumann型（A-A型）期待効用理論の公理を，ナイト流不確実性の含意に沿って緩め，期待効用関数に於ける積分をChoquet積分に置き換えたSchmeidler（1989）の表現定理や，複数の確率測度の集合についてのMaximin期待効用を用いたGilboa-Schmeidler（1989）の表現定理がある。

Anscombe-Aumann型期待効用理論は，賞品集合$X$上のすべての確率分布の集合を$Y$とするとき，状態空間$(S, \Sigma)$（$S$は状態の集合，$\Sigma$はその部分集合（事象）の代数）から$Y$への$\Sigma$-可測関数$f(s)$（確率アクト：Lottery Act）同士の選好順序を扱う。特に確率アクトのうち，その値域が$Y$の有限部分集合であるような確率アクト（単純な確率アクト：Simple Lottery Act…その集合を$L_0$とおく）間の選好順序を扱う。

Anscombe and Aumann（1963）は$L_0$上の選好順序が，確率アクトの，$(S, \Sigma)$上の加法的確率測度による期待効用関数の大小関係で一意に定まる場合についての公理化を行なった。すなわち，$L_0$上の二項関係$>$が順序性・独立性・連続性・単調性・非退化性を満たすときかつそのときに限り，一意に定まる$(S, \Sigma)$上の確率測度$\mu$と正のアフィン変換を除いて一意に定まる$Y$上のアフィン関数$u$が存在し，$f, g \in L_0$に関し，

$$f > g \Leftrightarrow \int_S u(f(s))\,d\mu(s) > \int_S u(g(s))\,d\mu(s) \tag{1}$$

となることを示した。

しかしながら，この期待効用によって表される$L_0$上の選好順序が満たすべき公理のうち，「独立性の公理」はかなり限定的な制約である。すなわちこの公理は，任意の$f, g, h \in L_0$について

$$f > g \Rightarrow \quad \lambda f + (1-\lambda)h > \lambda g + (1-\lambda)h$$
$$(\lambda \in (0, 1])$$

となることを要請するものであるが，これは$L_0$上のいかなる確率アクト$h$との混合によっても，$f$と$g$の間の選好順序が影響を受けない，ということを要請する，相当にきつい条件である。

**Choquet期待効用（CEU）による表現**　これに対しSchmeidler（1989）は，A-Aの公理群のうちの独立性の公理を，互いに共単調的[1]な確率アクトの任意の$(f, g, h)$についてだけ独立性が満た

されていればよいという，緩い公理に置き換えた公理群を満たす$L_0$上の選好順序が，Anscombe and Aumannに於ける加法的確率測度$\mu$を，より一般的な「非加法的測度」$\nu$に置き換えた場合のChoquet期待効用（Ellsbergのパラドックスに於ける選好順序をも自然に記述できる）で表現できることを示した。すなわち

$$f > g \Leftrightarrow \int_S u\,(f\,(s))\,d\nu\,(s) > \int_S u\,(g\,(s))\,d\nu\,(s) \tag{2}$$

ここで非加法的測度とは，通常の加法的確率測度の満たす単調性等の性質($A \supseteq B \Rightarrow \nu(A) \geq \nu(B), \nu(S)=1, \nu(\phi)=0$)は満たすものの，加法性($\nu(A \cup B)=\nu(A)+\nu(B)-\nu(A \cap B)$)が必ずしも成立しないような集合関数$\nu: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$をいう。

特に，$\nu(A \cup B) \geq \nu(A)+\nu(B)-\nu(A \cap B)$となるとき，$\nu$は凸である，という。この$\nu$は，「AまたはBである］という大雑把な情報はわかっているのだがAとBの確率の精緻な内訳まではわからない」というナイト流不確実性に直面した経済主体の選好順序を記述するのに適合的なのではないか，と直観的に推測できる。

実際，Choquet期待効用（CEU）に於ける非加法的測度が凸である場合には，Schmeidlerの公理を満たす$L_0$上の選好順序は，不確実回避性($\forall f, g, h \in L_0, \forall \alpha \in [0,1], f > g \Rightarrow \alpha f+(1-\alpha)g \geq g$)を満たす事が知られている。

**Maximin期待効用による表現**　これに対し，Gilboa and Schmeidler (1989) はAnscombe-Aumannの公理群のうちの独立性の公理を，constant act（確率アクトのうち，状態$s$が何であろうとも$Y$上のある一つの確率分布がその値域であるアクト）との混合に関してのみの独立性という，より緩やかな公理に代え，加えて不確実性回避の公理($\forall f, g \in L_0, \forall \alpha \in [0,1], f \sim g \Rightarrow \alpha f+(1-\alpha)g > f$)を加えた公理群を満たす$L_0$上の選好順序が，以下のような，複数の確率測度の集合についてのMaximinの期待効用（MMEU）で一意に表現される事を示した。すなわち，

$$f > g$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min\left\{\int_S u\,(f\,(s))\,dp\,(s) \mid p \in C\right\} > \min\left\{\int_S u\,(g\,(s))\,dp\,(s) \mid p \in C\right\} \tag{3}$$

ここで$C$は$S$上の加法的確率測度の非空閉凸集合で，$u$は$Y$上のアフィン関数であり，それぞれ選好順序に応じて，一意に（$u$は正のアフィン変換を除いて一意に）定まる。$C$が$S$上の単一の確率測度からなる場合は，この表現はAnscombe-Aumann型期待効用となる。一方，集合$C$が複数の確率測度から成る場合は，このMMEUは，経済主体が単一の確率測度に依拠できず，複数の確率測度の“束”によって最悪の事態を念頭に置きつつ，慎重に利得を評価する場合に相当す

[1] $f, g$についていかなる状態の組（$s, t$）についても$f(s) > f(t)$かつ$g(t) > g(s)$とはならない場合を，「$f$と$g$は互いに共単調的である」という。

る。この測度の“束”がより多くの測度によって構成されるほど，経済主体はナイト流の意味でのより大きな不確実性に直面している，と考えられる。

前出のSchmeidler型のCEUは，非加法的測度$\nu$が凸の場合，MMEUにおいて$C=\mathrm{core}(\nu)$とおいた場合に相当する。

**$\varepsilon$-contaminationによる$C$の特定化**　したがって，ナイト流不確実性の特性は，測度の束$C$をどのように特定化するかによって特徴付けられる。ここでは$C$の特定化として以下のようなものを考える。すなわち，$(S, \Sigma)$ 上のすべての加法的確率測度の集合を$\mathcal{M}$と表すことにすると，任意の$\mu \in \mathcal{M}$についての集合“$\mu$の$\varepsilon$-contamination : $\{\mu\}^{\varepsilon}$”を以下のように定義する。

$$\{\mu\}^{\varepsilon} \equiv \{(1-\varepsilon)\mu + \varepsilon\tilde{\mu} \mid \tilde{\mu} \in \mathcal{M}\}$$

つまり$(S, \Sigma)$上の測度が $(1-\varepsilon)$ の度合いで$\mu$，残りの$\varepsilon$の度合いで$\mathcal{M}$の任意の要素との混合となっている，$\mu$に近いが$\varepsilon$の度合いで$\mu$と少しずつ異なる，という測度から成る束である。

$C$をこの$\{\mu\}^{\varepsilon}$に特定化すると，MMEUは

$$(1-\varepsilon)\int_{S} u(f(s))\,d\mu(s) + \varepsilon \min_{s \in S} u(f(s)) \tag{4}$$

となる。つまり $(1-\varepsilon)$ の度合いで経済主体はA-A型の期待効用と同様の利得の評価を行なうものの，$\varepsilon$の度合いで，真の確率分布がわからず，その部分については最悪の利得をもたらす事象が確率1で生じるような測度を想定し，利得を慎重に評価するようになる，というMMEUである。$\varepsilon$が大きいほど，考慮の対象となる「最悪のケース」のウェイトが大きくなり，経済主体がより大きなナイト流不確実性に直面している事を意味する。

このような$\varepsilon$-contaminationによるMMEUの大小関係と$L_0$上の選好順序が同値となる場合の$L_0$上の二項関係の公理について，Nishimura and Ozaki (2002) はSchmeidler (1989) の公理に$\varepsilon$に関する二つの公理を加えたものを提唱した。また，Kojima (2004) はSchmeidler (1989) の公理のうちの共単調独立性を，互いにCommon Minimum Stateである確率アクト（$Y$上の最悪の値をもたらす状態$s$の集合が互いに共通であるような確率アクト）間の独立性に置き換えたものが，$\varepsilon$-contaminationによるMMEUで表現される選好順序の公理化になることを示した。

第3節では，代理者が，この$\varepsilon$-contamination MMEUによる不確実性に直面している場合のエージェンシー問題を分析し，第4節でインセンティヴ・スキームの形状（固定給と変動給の組み合わせ）と不確実性のパラメータ$\varepsilon$との関係を分析する。

# 3 ナイト流不確実性下のエージェンシー問題

## 3.1 モデルの概要

ここで議論するエージェンシー問題は，単一のプリンシパル（例えば企業）と単一のエージェント（例えば労働者）との間の契約に関するもので，代理者のモラルハザードの問題のみに焦点を絞った標準的なものである（異なるタイプのエージェントが混在し，そのタイプを依頼者が識別できないという，逆選択の問題が絡んだ一般的なエージェンシー問題とは異なる)。すなわち，依頼者（企業）は個々の代理者（労働者）（そのタイプは既知）へ何らかの設備を提供，それを労働者が企業の下で用いることにより，何らかの経済的価値（成果：Outcome）が生み出される。この成果を企業と労働者との間でどのように分け合うか（どのような成果が上がった場合にどれだけ労働者へ報酬を払うか）を予め契約で決める。

労働者が生み出しうる成果 $x$ は正の実数の尺度で数値化可能で，$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ の $n$ 種類の数値をとる。これらのうち，どの成果が実際に実現するかは，労働者の努力によって決まる側面と，努力とは無関係の「運」「不運」によって決まる側面の二つがある。企業は成果 $x$ の値を客観的かつ立証可能な形で知る事ができるが，労働者の努力水準を観察することができない。そこで労働者は，企業の目を盗んで努力を怠るインセンティヴをもつという，モラルハザードが発生し得る。努力が観察不能なために，労働者への報酬は観察可能な成果に対して支払われることになる。$x_i$ という成果に対する報酬を $w_i$ とおく。

企業と労働者は，以下の手番で行動する。まず企業がベクトル $\mathbf{w}=(w_1, \ldots, w_n)$（インセンティヴ契約あるいはインセンティヴ・スキーム）を労働者に示す。労働者はこの $\mathbf{w}$ を受けて，契約を締結するか否かを決める。締結した後，労働者は努力を提供し，その後，これに運・不運の確率的要因が加わって成果が決まる。そして，予め決められた $\mathbf{w}$ にしたがって，$w_i$ が労働者に支払われ，残りの $x_i - w_i$ が企業の取り分となる。

なお，企業と労働者のもつ情報についてまとめると以下のようになる。

1. 企業には労働者の努力水準がわからないが，その他の情報，労働者の生産性・選好（リスクと不確実性に対する態度）は，企業と労働者が共通に等しい情報をもつ（Common Knowledge である)。
2. 労働者は自分の努力水準は知っており，この私的情報の面では企業に対し，情報優位の立場にある。しかし労働者は努力と成果の間の関係にまつわる不確実性について，企業と異なる選好をもつ。

1. より，ここでは労働者のタイプがわからないために発生する逆選択の問題は存在せず，

Holmstrom (1979), Grossman and Hart (1983), Rogerson (1985) 等の一連の研究で分析された，モラルハザードの側面だけを専ら問題としたエージェンシー問題を分析することになる。2.の「企業と労働者の間で不確実性についての選好が異なる」とは，従来の一般的なエージェンシーモデルに於ける「リスク」についての選好の違い（企業はリスク中立的，労働者はリスク回避的等々）ではなく，「不確実性」についての選好が企業・労働者間で異なることを指す。

つまり，従来の一般的なエージェンシーモデルに於いては，vNM 型期待効用に基づき，企業についても労働者についても，それぞれ単一の確率分布同士の選好順序が議論されるのに対し，本稿で言う「企業・労働者の，不確実性に対する選好の違い」とは，企業の選好は vNM 型期待効用関数によって表現可能な，単一の確率分布同士の選好順序であるが，労働者の選好は複数の確率分布の束（第2節で紹介した $\varepsilon$-contamination）についての選好順序となる，という違いのことを指す。以下，この点について詳述する。

## 3.2　労働者の直面する不確実性

ここでは Ghirardato (1994) に於ける，ナイト流不確実性の下でのエージェンシー問題の定式化を $\varepsilon$-contamination の文脈に置き換えた定式化を行なう。

労働者にとっての賞品の集合（有限集合）を $X_A=\{w_1,\dots,w_n\}\times\{c_1,\dots,c_l\}$ とおく。$\{w_1,\dots,w_n\}$ は前述のとおり報酬契約（インセンティヴ・スキーム），$\{c_1,\dots,c_l\}$ は努力の結果生じうるコストの取りうる値である $(c_1<c_2<\cdots<c_l)$。状態空間を $S$, $Y$ を $(X_A, 2^{X_A})$ 上の（加法性を満たす）確率分布の集合とする。

労働者の行動（どれだけの水準の努力を行なうか）は，$S$ から $Y$ への，$Y$ の有限部分集合を値域とする $\Sigma-$可測関数 $f(s)$，すなわち単純な確率アクトとして記述される。この単純確率アクトの値域となる $Y$ の有限部分集合を $Y'$ とおく。$Y'$ には，確率分布 $\delta_{11},\dots,\delta_{nl}$ が含まれる。ただし，$\delta_{jk}$ は賞品 $(w_j, c_k)$ に確率1を付与する分布を表す。

単純な確率アクトのすべてが労働者にとって選択可能な努力水準ということではなく，労働者にとって選択可能な確率アクトの集合は，$L_0$ の部分集合である。これを $\mathcal{F}$ とおく。$\mathcal{F}$ は有界閉集合（有限集合でない）とし，実数の集合と等濃であるとする。$\mathcal{F}$ の全ての元について，以下が成立すると仮定する。

**仮定1a**　$\forall f\in\mathcal{F}, \forall j\in\{1,\dots,n\}, \forall k\in\{1,\dots,l\}, \exists s\in S, f(s)=\delta_{jk}$

**仮定1b**　$\forall f\in\mathcal{F}, \forall i\in\{1,\dots,n\}, \forall k\in\{1,\dots,l\}, f^{-1}(\delta_{jk})\neq S$（ここで $f^{-1}(\delta_{jk})\subseteq S$ は $\delta_{jk}$ の $f$ についての $S$ への逆像，すなわち $\{s\in S\mid f(s)=\delta_{jk}\}$ を表す)。

つまり，労働者の取りうる行動のすべてについて，その値域に $\delta_{jk}$ が必ず含まれる（仮定1a）が，労働者はどのように努力をしても，ある単一の成果を確実に生じるようにはできない（仮定

1b) ものとする。

労働者は，$(1-\varepsilon)$ の度合いでのみ $(S, \Sigma)$ 上の確率測度が $\mu$ であるとの確信をもっているものの，$\varepsilon$ の度合いで，真の確率測度が何であるかがわからない（労働者はナイト流不確実性に直面している)。このような労働者の，努力 $f(s)$ についての選好順序は，確率測度の集合 $\varepsilon$-contamination による Maximin 期待効用で以下のように表現できる。

$$EU^{\varepsilon} \equiv (1-\varepsilon)\int_S u(f(s))\,d\mu(s) + \varepsilon \min_s u(f(s)) \tag{5}$$

**$X_A$ 上の確率分布を用いた表現への置換え**　具体的には，アフィン関数 $u(f(s))$ を以下のように特定化する。$f(s)$ は単純な確率アクトなので，その値域は $Y$ の有限部分集合となる。今，ある確率アクト $f(s)$ を固定し，その値域が $\{y_1^f, \dots, y_m^f\}$ であるとする。$f(s) = y_i^f$ のとき，

$$u(f(s)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\{U(w_j) - c_k\}\,y_{ijk}^f \tag{6}$$

ただし，$y_{ijk}^f$ は，$X_A$ 上の確率分布 $y_i^f$ に於いて賞品 $(w_j, c_k)$ に付与された確率を表す。

また，$U(\cdot)$ は vNM 型期待効用関数に於ける効用インデックスで，これが凹関数であれば，リスク回避的な $Y$ 上の選好順序を表現する。本稿では労働者はリスク回避的であると仮定する。

$f$ についてのアフィン関数 $c(f) \equiv \Sigma_{k=1}^{l} c_k y_{ijk}^f : \mathcal{F} \to \mathbf{R}_+$ は $f$ という行動をとることの労働者にとってのコストを表す。

労働者が $f$ を採ったとき，$y_i^f$ がその値となるような $s \in S$ の集合（事象)，すなわち，$y_i^f$ の逆像を $f^{-1}(y_i^f)(\equiv \{s \in S \mid f(s) = y_i^f\})$ とおく。これを用いると，(5)の積分部分は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
&\int_S u(f(s))\,d\mu(s) \\
&= \sum_{i=1}^{m} u(y_i^f)\,\mu\left(f^{-1}(y_i^f)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\{U(w_j) - c_k\}\,y_{ijk}^f\right\}\mu\left(f^{-1}(y_i^f)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} U(w_j)\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} y_{ijk}^f\,\mu\left(f^{-1}(y_i^f)\right)\right\} - \sum_{k=1}^{l} c_k\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ijk}^f\,\mu\left(f^{-1}(y_i^f)\right)\right\}
\end{aligned} \tag{7}$$

(7)最終行の二つの中括弧内は，それぞれ，「$(S, \Sigma)$ 上の測度が $\mu$ である場合に労働者が努力 $f$ を採択した場合に報酬，費用がそれぞれ $w_j$, $c_k$ となる確率」に相当する。これをそれぞれ $p_j(f)$, $q_k(f)$ と表記することにする。

また，仮定1aより，

$$\min_s u(f(s)) = \min_{j,k}\{U(w_j) - c_k\} = \min_j U(w_j) - \max_k c_k$$

が成立する。

以上より，(5)は $X_A$ 上の確率分布を用いて次のように書き直すことができる。

$$EU^{\varepsilon}(f)=(1-\varepsilon)\left\{\sum_{j=1}^{n}U(w_j)p_j(f)-\sum_{k=1}^{l}c_k q_k(f)\right\}+\varepsilon\min_{j,k}\{U(w_j)-c_k\} \tag{8}$$

$U(w_j)$ はvNM型期待効用理論に於ける効用インデックスである。この $U$ の関数形について，以下の仮定をおく。

**仮定 2**　(1) $U(w)$ は $(\underline{w},\infty)$ を定義域とする単調強増加強凹関数。

(2) $\lim_{w\to\underline{w}}U(w)=-\infty$。

**努力のコストの順序**　$\mathcal{F}$ のすべての要素 $f$ は，$\mathbf{R}$ の部分集合 $A=[\underline{a},\overline{a}]$ の要素 $a$ と1対1で対応づけられているとする。ある実数 $a$ と対応づけられた確率アクトを $f^a$ とおくと，

$$\pi_j(a)\equiv p_j(f^a)$$
$$c(a)\equiv\sum_{k=1}^{l}c_k q_k(f^a)$$

という具合に定義が可能である。この $c(\cdot)$ が大きいほど労働者にとっての努力のコストは大きい。このようにして $\mathcal{F}$ 上の確率アクトはそのアクトを採ることの期待効用の大小関係によって順序付けられる。結局，(8)は

$$EU^{\varepsilon}(f^a)=(1-\varepsilon)\left\{\sum_{j=1}^{n}U(w_j)\pi_j(a)-c(a)\right\}+\varepsilon\left\{\min_j U(w_j)-\overline{c}\right\} \tag{9}$$

のように表現できる（ただし $\overline{c}$ は $\{c_1,\ldots,c_k\}$ のうちの最大値）。

確率アクトの集合 $\mathcal{F}$ が仮定1を満たしている場合について，$S$ 上の確率測度 $\mu$ と確率アクトの値域が，それに対応する $\pi_j(a)$ 及び $c(a)$ が以下の諸仮定を満たすようなものであるとする（そのような確率測度 $\mu$ と確率アクトの値域の例については，後述の例を参照）。

**仮定 3**

**i) 単調尤度比（Monotone Likelihood Ratio (MLR)**　…$\dfrac{\pi_j'(a)}{\pi_j(a)}$ がすべての $a$ について $j$ の増加関数。

**ii) 累積分布関数の凸性（Convexity of Distribution Function: CDF）**　…累積分布関数 $\sum_{j=1}^{m}\pi_j(a)$ が，すべての $m=1,2,\ldots,n$ について $a$ の凸関数。

**iii)**　すべての $j=1,2,\ldots,n$ について，$\pi_j(a)>0$。

**仮定 4（$c$ の凸性）**　$c(\cdot)$ の定義域は $A$, $c'>0$, $c''>0$, $c$ の値域は有界閉区間。

つまり，労働者の選好は，$(1-\varepsilon)$ の度合いで，$S$ 上の確率測度が $\mu$ であると確信している分

については，従来議論されてきた多くのエージェンシー問題と同様，努力と特定の成果の生起確率との間に，「より苦痛の大きな努力を積むほど，高い成果が上がる確率が高まる（MLR）」，という確率的関係があるとした場合のvNM型期待効用で記述できる。また，$\varepsilon$ の度合いで，労働者は $S$ 上の確率測度が $\mu$ であることを確信できず，$S$ 上の測度がありとあらゆるものとなる可能性を考慮し，常に自分にとって最悪の結果をもたらすような測度を用いて利得を評価する。仮定1より，それは報酬が最低値をとるような成果しか生じず，常に努力の費用が最大となってしまうような状態である。

**例**　では，$X_A$ 上の確率分布や $c(a)$ が仮定3,4を満たすような $(S, \Sigma)$ 上の確率測度，確率アクトが存在するのかどうかが問題だが，それらについては比較的簡単に，その例を示す事ができる。

労働者の賞品集合 $X_A$ は $X_A=\{w_1, \dots, w_n\}\times\{c_1, c_2\}$ とする。$\{w_1, \dots, w_n\}$ はインセンティヴ・スキーム，$c_1, c_2$ は努力の費用で $c_1=0,\ c_2=1$ とする。

$Y$ を $X_A$ 上の全ての加法的確率分布の集合とし，$S=\mathbf{R}^2$ とする。$(S, \Sigma)$ 上の確率測度 $\mu$ は $[0,1]\times\ [0,1]$ 上の一様分布とする。

確率アクト $f: S\to Y$ の集合 $\mathcal{F}$ は，$\mathbf{R}$ と等濃で，各要素は $a\in[0,1](\equiv A)$ と1対1に対応付けられている。$f$ の値域たる $Y$ の有限部分集合として，$\{y_1, y_2, y_3, y_4, \delta_{11}, \dots, \delta_{n2}\}$ を考える。このうち，$\delta_{jk}$ は賞品 $(w_j, c_k)$ に確率1を付与する確率分布を表し，$y_1, \dots, y_4$ はそれぞれ以下の性質を満たす。$y_i$ において $(w_j, c_k)$ が生じる確率を $y_{ijk}$ と表すと $(I\equiv\{1, \dots, n\})$,

$$y_{1j1}=\frac{2}{n\,(n+1)}j,\quad y_{1j2}=0, \forall j\in I$$

$$y_{2j1}=\frac{2}{n\,(n+1)}(n+1-j), y_{2j2}=0, \forall j\in I$$

$$y_{3j1}=0,\quad y_{3j2}=\frac{2}{n\,(n+1)}j, \forall j\in I$$

$$y_{4j1}=0,\quad y_{4j2}=\frac{2}{n\,(n+1)}(n+1-j), \forall j\in I$$

$a\in[0,1]$ に対応付けられる確率アクト $f^a$ を，以下のように定義する。

$$f^a(s)=\begin{cases} y_1 & \text{if } s\in[0,\sqrt{a}]\times[0,\sqrt{1-a^2}] \\ y_2 & \text{if } s\in(\sqrt{a},1]\times[0,\sqrt{1-a^2}] \\ y_3 & \text{if } s\in[0,\sqrt{a}]\times(\sqrt{1-a^2},1] \\ y_4 & \text{if } s\in(\sqrt{a},1]\times(\sqrt{1-a^2},1] \\ \delta_{jk} & \text{for some } s\in\mathbf{R}^2\backslash[0,1]\times[0,1] \end{cases}$$

このような $\mu(s), f(s)$ について，$\varepsilon$-contamination の不確実性に直面する労働者の選好順序を，以下のように表現することが出来る。

$$(1-\varepsilon)\int_S u\,(f\,(s))\,d\mu\,(s)+\varepsilon\min_{s\in S}u\,(f\,(s))$$
$$=(1-\varepsilon)\left[\sum_{j\in 1}U\,(w_j)\,\pi_j\,(a)-c\,(a)\right]+\varepsilon\left\{\min_j U\,(w_j)-1\right\}$$

ただし

$$\pi_j\,(a)=\frac{2}{n\,(n+1)}\{\sqrt{a}j+(1-\sqrt{a})(n+1-j)\} \tag{10}$$

$$c\,(a)=1-\sqrt{1-a^2} \tag{11}$$

である。このような $\pi_j\,(a)$, $c\,(a)$ が仮定3, 4 を満たしている事は，容易に確認できる。

## 3.3　企業の最適化問題

労働者と異なり，企業はリスク中立的かつ，不確実性は一切もっておらず，したがって，リスク中立的なvNM型期待効用の最大化を図るものとする。また，労働者が，(9)のように表現できるような不確実性に関する選好をもっている，という事も企業は知っている。すると企業の最適化問題は，労働者の選好順序が(9)で表されることを考慮しつつ（労働者の直面するナイト流不確実性を考慮しつつ）自らの期待効用を最大化するようなインセンティヴ・スキームと労働者に採らせる努力水準を考えることになる。よって企業の最適化問題は

$$\max_{a,\mathbf{w}}\,(x_j-w_j)\,\pi_j\,(a) \tag{12}$$

$s.t$

$$EU^{\varepsilon}\,(\mathbf{w},a)\equiv(1-\varepsilon)\left\{\sum_{j=1}^{n}U\,(w_j)\,\pi_j\,(a)-c\,(a)\right\}+\varepsilon\left\{\min_{\mathbf{w}}U\,(w_j)-\overline{c}\right\}\geq\underline{U} \tag{13}$$

$$EU^{\varepsilon}\,(\mathbf{w},a)\geq EU^{\varepsilon}\,(\mathbf{w},a')\ \forall a'\in A \tag{14}$$

制約条件(13)は，このインセンティヴ・スキームの下で代理契約を結ぶことが，労働者にとって他で得られる効用機会 $\underline{U}$ と同様かそれ以上の効用を得る事を意味するための条件(Individual Rationality 条件）であり，以下これをIR条件と略記する。一方，制約条件(14)は，インセンティヴ・スキーム $\mathbf{w}$ の下で労働者が自発的に努力水準 $a$ をとる（$\mathbf{w}$ によって $a$ を実行させる事が可能(implementable）である）ための条件（Incentive Compatibility 条件）であり，以下これをIC条件と略記する。

## 3.4　解の存在

Grossman and Hart(1983)はこの企業の問題を2段階に分離，すなわち，(1)各 $a$ について，労働者にその行動（努力 $(a)$）を実行させることのできるインセンティヴ・スキームのうち，最も費用の低い（したがって労働者にとっての報酬額の期待値の低い）ものの集合を求めるということをすべての $a$ について行ない，(2)その中で最も企業の期待利得の高いものが最適解となる，とい

う具合に分離し，最適解の存在を証明した。本稿における問題(12)においても，企業の目的関数が成果と報酬に分割可能な形となっているために，同様の二段階化が可能である。ただ一点，労働者がナイト流下確実性に直面している分，IR 制約と IC 制約が微分不能点をもつという点が Grossman and Hart の問題と異なる。しかし，基本的に IR 制約と IC 制約を満たすようなインセンティヴ・スキームの集合が凸集合であることが容易にわかるので，問題の基本構造は Grossman and Hart と同様である。

そこで，まず，$a^* \in A$ を最小費用で労働者に実行させることのできるインセンティヴ・スキームを求める費用最小化問題を考える。すなわち

$$\min_{\mathrm{w}} \sum_{j=1}^{n} h(v_j)\pi_j(a^*) \tag{15}$$

*s.t.*

$$(1-\varepsilon)\left\{\sum_{j=1}^{n} v_j\pi_j(a^*)-c(a^*)\right\}+\varepsilon\{\min_{\mathrm{j}} v_j-\bar{c}\}\geq \underline{U}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&(1-\varepsilon)\left\{\sum_{j=1}^{n} v_j\pi_j(a^*)-c(a^*)\right\}+\varepsilon\{\min_{\mathrm{j}} v_j-\bar{c}\}\\ \geq\ &(1-\varepsilon)\left\{\sum_{j=1}^{n} v_j\pi_j(a)-c(a)\right\}+\varepsilon\{\min_{\mathrm{j}} v_j-\bar{c}\} \qquad {}^\forall a\in A\end{aligned} \tag{17}$$

ただし，$v_j \equiv U(w_j), h\equiv U^{-1}$ つまり，$h(v_j)=w_j$ である。$U$ は凹関数であるので，$h$ は凸関数である。また容易にわかるように制約(16)，(17)も凸集合である。したがってこの問題は凸制約の下での凸関数の最小化問題である。

(16)，(17)を満たすインセンティヴ・スキームが存在する場合には，$h$ の凸性より，以下が成立する。

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} h(v_j)\pi(a^*) &\geq (1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{n} h(v_j)\pi_j(a^*)+\varepsilon\min_j h(v_j)\\ &\geq h\left[(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{n} v_j\pi_j(a^*)+\varepsilon\min_j v_j\right]\\ &\geq h[\underline{U}+(1-\varepsilon)c(a^*)+\varepsilon\bar{c}]\end{aligned}$$

二番目の不等号は $h$ の凸性から，最後の不等号は IR 制約(16)からしたがう。つまり，企業の報酬支払額の期待値には，これより下には下げられないという下限が存在する。

仮に労働者の努力水準 $a$ を企業が観察可能である完全情報下では，IC 制約が制約とならず，企業はあらゆる成果についての報酬を等しくする（固定給を支払う）ことで最右辺の下限を達成できる（First Best を達成できる）。この報酬支払いの期待値の最下限を $C_{FB}(a^*)$ とおく。

反面，$a$ が企業に観察不能の場合，労働者のモラルハザードのために，ある特定の努力水準 $a$ を実行させることのできるインセンティヴ・スキームに於ける期待報酬を $C_{FB}(a^*)$ まで抑える

ことが必ずしも可能でない。$a$ が観察不能の場合に労働者に $a^*$ という努力を実行させることのできるようなインセンティヴ・スキームの集合について，その報酬の期待値（労働者にとっての費用の期待値）の最大下界を $C(a^*)$ とおく。

一般に労働者のモラルハザード問題のために $C(a^*)=C_{FB}(a^*)$ は成立しないものの，Grossman and Hart（1983）は，ある努力水準 $a^*$ については両者が一致することを示した。それは，$a^*$ が $C_{FB}(a^*)$ を最小化するようなものである場合である。

本稿の場合においても，このことは基本的に成立する。なぜなら，IR制約のみ考えればよい（労働者に最低の留保効用水準を保証する報酬を支払えばよい）場合に，企業の費用（報酬の期待値）が最小となる場合というのは，労働者にとっての努力の費用が最小になるような努力を採らせる場合である（最小の努力費用を補償する報酬は最小で済む）が，その場合の固定給のインセンティヴ・スキーム（成果の値が何であろうと，$w=h(\underline{U}+(1-\varepsilon)c(a^*)+\varepsilon\underline{c})$ を支払う，という契約）は，IR制約のみならず，IC制約をも満たすからである（$C_{FB}(a^*)$ を最小化する $a^*$ は労働者にとっても最小コストで済む努力であるため，企業の目を盗んで怠けるような状況にあっても労働者はこれ以外の努力水準を選ぶインセンティヴをもたず，$a^*$ を実行する)。

したがって，以下の補題がしたがう。

**補題1**　$C_{FB}(a^*)$ を最小化する $a^*$ について，$C(a^*)=C_{FB}(a^*)$ が成立する。

この補題1と仮定2,3のiii),4およびGrossman and Hart（1983）のProposition 1より，以下がしたがう。

**命題1**　企業の最適化問題(12)の解としてのインセンティヴ・スキーム及び努力水準が存在する。

### 3.5　1階条件からの接近

仮に企業の問題(12)～(14)の厳密なIC制約(14)が労働者の効用最大化の1階条件と同値であるならば，企業の問題の解としてのインセンティヴ・スキームを簡便・実用的に見出すことが可能となる。すなわち，(14)を

$$\frac{\partial}{\partial a}EU^{\varepsilon}=0$$
$$\Leftrightarrow\quad (1-\varepsilon)\left\{\sum_{j=1}^{n}U(w_j)\pi_j'(a)-c'(a)\right\}=0 \tag{18}$$

で置き換えた問題（以後，これを「緩和された問題」と呼ぶことにする）を解くことが，元来の「厳密な問題」を解くことと同値であるならば，置き換えて解いた方が簡便である。

Rogerson（1985）は緩和された問題による置き換えが可能となるための十分条件として，確率分

布が単調尤度比条件（MLRC）と凸性条件（CDFC）を満たしている事，を挙げたが，本小節では，これらの条件が，労働者が $\varepsilon$-contamination によるナイト流不確実性に直面している場合でも依然としてこれらの条件が緩和された問題の有効性を保証するための十分条件となることを示す。

その主要な論理の流れは以下のとおりである。緩和された問題の IC 条件は厳密な問題のそれを含む，より緩やかな条件であるので，厳密な問題の解は緩和された問題の解の中に含まれる。そこで，緩和された問題の解としての Incentive Schme の集合(当然，厳密な問題の解も含まれる)の元の満たす性質を調べる。もしその性質を満たす解(Incentive Scheme) の集合に限って，緩和された IC 条件と厳密な IC 条件とが同値であるのであれば，緩和された問題を解くことと厳密な問題を解くこととが同値となる。

### 3.5.1　緩和された問題の1階条件

緩和された問題を解くについても，労働者のナイト流不確実性に固有の問題が残る。(13)に min が存在することにより，IR 条件が微分不能点をもつからである。これは，$S$ 上の真の分布が何であるかについて労働者は $\varepsilon$ の度合いで確信を抱けないので，その $\varepsilon$ の度合いについてはインセンティヴ・スキームが何であれ常に最悪のシナリオ（確率分布が，報酬が最低額になってしまうような成果を確率1で上げてしまうようなものかもしれない）を考慮することによる。

例えば固定給のインセンティヴ・スキーム $w_j = w\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ があったとする。このとき，ある $j$ についてのみ，$w_j$ を少し上げる場合と下げる場合を考える。$w_j$ のみ少し上げても，「報酬の最低額」は依然として $w$ のままである。しかし，$w_j$ のみ少し下げる場合は「報酬の最低額」が $w_j$ となる。そこで，$w_j$ を $w$ から上げる場合と下げる場合で，労働者の限界効用が全く異なる。

以上のことを考慮したうえで，緩和された問題についての Kuhn-Tucker 条件をまとめると以下のようになる（証明の詳細については，玉井（2004）の補論1を参照)。

$$\begin{cases} \forall \quad j \in I_{min}, & \dfrac{1}{U'(\underline{w})} = (1-\varepsilon)\left\{\lambda\left(1+\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\dfrac{\theta_j}{\pi_j}\right)+\mu\dfrac{\pi_j'}{\pi_j}\right\} \\ & \text{ただし，} \sum_{j \in I_{min}} \theta_j = 1, \text{ かつ } \theta_j \geq 0 \\ \forall \quad i \in I_{min}^c, & \dfrac{1}{U'(w_i)} = (1-\varepsilon)\left\{\lambda+\mu\dfrac{\pi_i'}{\pi_i}\right\} \end{cases} \tag{19}$$

$$\sum_{i \in I}(x_i - w_i)\pi_i'(a) + \mu(1-\varepsilon)\left\{\sum_{i \in I} U(w_i)\pi_i''(a) - c''(a)\right\} = 0 \tag{20}$$

ただしここで，$\underline{w}$ は払われうる報酬 $\{w_j\}_{j=1}^n$ の最小値を意味し，集合 $I$ は集合 $\{1, \ldots, n\}$ を意味し，集合 $I_{min}$ はその部分集合で $I_{min} = \{j \in I \mid w_j = \underline{w}\}$ で定義されるもの，$I_{min}^c$ は $I_{min}$ の補集合すなわち $I \backslash I_{min}$ を意味する。また，$\lambda$ と $\mu$ はそれぞれ，IR 制約(13)及び緩和された IC 制約(18)

についてのラグランジュ乗数である。

なお，$\mu$ の符号について，以下が成立する。

**補題2**　仮定3の $i$, $iii$, および仮定4の下，$\mu>0$ である。

**証明**　ここでは，緩和された問題の有効性を仮定せずに $\mu>0$ であることを証明したJewitt (1988)の手法を，労働者の側に $\varepsilon$-contamination に基づくナイト流不確実性が存在する場合に援用して証明を行なう。

$\pi_j(a)(j\in\{1,\dots,n\})$ は確率分布であるから $\sum_{j=1}^{n}\pi_j'(a)=0$ が成立しなければならない。そこで，(19)の両辺に確率 $\pi_j(a)$ を乗じて期待値をとると，

$$\lambda=E\left[\frac{1}{U'(w)}\right]\tag{21}$$

が成立する。

一方，1階条件(19)より，

$$\mu(1-\varepsilon)\pi_j'(a)=\left(\frac{1}{U'(w_j)}-\lambda\right)\pi_j(a)+\lambda\varepsilon(\pi_j(a)-\theta_j)$$

（ただし $\theta_j\geq 0,\forall j\in I_{min},\sum_{j\in I_{min}}\theta_j=1,\theta_j=0\forall j\in I_{min}^c$ である）が成立する。この両辺に $U(w_j)$ を乗じ，$j\in I$ について合計をとり，(21)を考慮すると，

$$\mu(1-\varepsilon)\sum_{j\in I}U(w_j)\pi_j'(a)=Cov\left(\frac{1}{U'(w_j)},U(w_j)\right)+\lambda\varepsilon(U(w_j)-U(\underline{w}))\geq 0\tag{22}$$

$Cov(\cdot,\cdot)$ は共分散を表す。$U'>0,U''<0$ より，この項は非負である。また(22)の右辺第2項も，$U$ の単調増加性と，$\underline{w}$ が $w_j$ の最小値であることから，やはり非負である。以上より，(22)の不等号がしたがう。

一方，緩和された $IC$ 条件と $c'(a)>0$ より，$(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}U(w_j)\pi_j'(a)>0$。これと(22)が両立可能なのは $\mu\geq 0$ の場合のみである。

しかし $\mu=0$ の場合は以下の理由で1階条件(19)，(20)と両立不能である。すなわち，$\mu=0$ と(19)が両立可能なのは，$w=$ 一定で $\theta_j=\pi_j\ \forall j\in I$ の場合のみであるが，これは(20)と相容れない。なぜなら，仮定3の i と iii より，$\forall j\leq\overline{m},\pi_j'(a)\leq 0,\forall j>\overline{m},\pi_j'(a)>0$ なる $\overline{m}\in I$ が存在する。一方，固定給契約に於ける企業の利得 $x_j-w$ は $j$ の強増加列となるので，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(x_j-w)\pi_j'(a)&=\sum_{j=1}^{n}x_j\pi_j'(a)-w\sum_{j=1}^{n}\pi_j'(a)\\&=\sum_{j=1}^{\overline{m}}(x_j-x_{\overline{m}})\pi_j'(a)+\sum_{j=m+1}^{n}(x_j-x_{\overline{m}})\pi_j'(a)>0\end{aligned}$$

最後の不等号は，$j=\overline{m}$ の場合を除いて $(x_j-x_{\overline{m}})$ と $\pi_j'(a)$ が同符号になること，$j=\overline{m}$ の場合

は$(x_j - x_{\overline{m}})\pi_j'(a)=0$となることからしたがう。よって$\mu=0$の場合，(20)が成立しない。

以上より，$\mu>0$でなければならない。 *Q.E.D.*

この補題と(19)～(20)より，以下が成立する。

**命題2**　仮定3が成立する場合，緩和された問題の解としてのインセンティヴ・スキームは，ある閾値$m\in\{1,\dots,n-1\}$について，$\forall j\le m, w_j=\underline{w}$(固定給)，$\forall j>m$なる$j$については$\underline{w}<w_{m+1}<w_{m+2}<\cdots<w_n$という成果連動型の変動給，というものになる。

**証明**　変動給の部分が$j\in I\backslash I_{min}^c$なる$j$について単調増加となるのは，補題2と(19)より直ちにしたがうので，命題の証明としては，$j\ge m$ならば必ず$j\in I_{min}$，さもなくば必ず$j\in I_{min}^c$となるような$m$が存在する事が示されれば十分である。そのためには，任意の$j,i\in I$について，$j\in I_{min}$かつ$i\in I_{min}^c$であれば必ず$j<i$となることが示されればよい。そしてそれは，(19)，仮定3のi)，及び$U$の関数形に関する仮定2よりしたがう。 *Q.E.D.*

以上で，単調尤度比条件が成立する場合の緩和された問題の解としての次善のインセンティヴ・スキームが，ある成果よりも低い成果については固定給，それを超える部分については成果に正相関した変動給を支払うという性質をもつことがわかったが，これは非減少列であるので，Rogerson (1985) と同様，$X_A$上の累積確率分布が凸関数であれば，緩和された問題で労働者が自発的に選択する努力水準が，もともとの厳密な問題のIC制約をも満たしている事が言える。

**命題3**　累積確率分布$P_k(a)\equiv\sum_{j=1}^{k}\pi_j(a)$が任意の$k=1,\dots,n$について$a$の凸関数であるならば，緩和された問題の解としてのインセンティヴ・スキームについては，厳密な問題に於ける*IC*制約と緩和された問題に於ける*IC*制約が同値となる。

**証明**　(19)～(20)を満たす任意のインセンティヴ・スキーム

$$\forall j\le m,\quad w_j=\underline{w}$$
$$\forall j>m,\quad w_j \text{ は } j \text{ について強増加}$$

を考える。すると，このインセンティヴ・スキームの下での労働者の$\varepsilon$-contaminationを考慮した期待効用は

$$\begin{aligned}EU^{\varepsilon}=&(1-\varepsilon)\sum_{j\in I_{min}}U(\underline{w})\pi_j(a)+(1-\varepsilon)\sum_{j\in I\backslash I_{min}}U(w_j)\pi_j(a)\\&-(1-\varepsilon)c(a)+\varepsilon\{U(\underline{w})-\overline{c}\}\end{aligned}$$

$$= U(\underline{w}) + (1-\varepsilon)\sum_{j \in I \setminus I_{min}} \{U(w_j) - U(\underline{w})\}\pi_j(a)$$
$$-(1-\varepsilon)c(a) - \varepsilon\overline{c}$$
$$= U(\underline{w}) + (1-\varepsilon)\sum_{j=m}^{n-1} \{U(w_{j+1}) - U(w_j)\} * (1 - P_j(a))$$
$$-(1-\varepsilon)c(a) - \varepsilon\overline{c}$$

$P_j(a)$ が $a$ について凸であるので $(1-P_j(a))$ は凹関数である。よって，$c(a)$ についての仮定より，労働者にとっての問題は $A$ 全域について凹関数である。　*Q.E.D.*

## 4　不確実性と，固定給の対象となる成果の範囲

前節までの議論で，労働者が $\varepsilon$ の度合いだけ，真の確率測度が何であるかについての確信をもてない場合に，次善のインセンティヴ・スキームが，ある成果以下の成果については固定給，それを超える成果について成果連動型の変動給，という形になることが示された。本節では，不確実性の度合いのパラメータ $\varepsilon$ の大きさと，固定給の対象となる成果の範囲の関係についての簡単な比較静学を行ない，一つの数値例を示す。

労働者の不確実性の度合い $\varepsilon$ の値が上昇すると，固定給（基本給）の対象となるような成果の範囲が広がる。つまり，固定給支払いの対象となる成果の上限（閾値）の $x_m$ の番号 $m$ が大きくなり，生じうる成果の比較的広範囲の成果にわたって，固定給が支払われるようになり，変動給の比率が低くなる。ただし，容易に推測できるように，固定給の比率の上昇は，労働者の怠業のインセンティヴを高めるというモラル・ハザード問題の深刻化につながるため，労働者へ実行させる事のできる努力水準は低下する。

### 4.1　$m$ の満たす条件

固定給の対象となる成果の上限の番号 $m$ が，$\varepsilon$ の上昇とともに大きくなることは，前節の1階条件(19)から得られる。まず，固定給の上限の成果につけられる番号 $m$ に於いては，

$$(1-\varepsilon)\left(\lambda + \mu\frac{\pi'_m}{\pi_m}\right) \leq \frac{1}{U'(\underline{w})} < (1-\varepsilon)\left(\lambda + \mu\frac{\pi'_{m+1}}{\pi_{m+1}}\right) \tag{23}$$

が成立する。また，$\sum_{j \in I_{min}} \theta_j = 1$ であることから，(19)の $j \in I_{min}$ についての合計をとると，

$$\frac{1}{U'(\underline{w})} = (1-\varepsilon)\left[\lambda\left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1}{\sum_{j \in I_{min}} \pi_j(a)}\right) + \mu\frac{\sum_{j \in I_{min}} \pi'_j(a)}{\sum_{j \in I_{min}} \pi_j(a)}\right] \tag{24}$$

を得る。

この(24)式の最後の項については，

$$\frac{\sum_{j \in I_{min}} \pi'_j(a)}{\sum_{j \in I_{min}} \pi_j(a)} = \sum_{j \in I_{min}} \frac{\pi'_j}{\pi_j}\frac{\pi_j}{\sum_{j \in I_{min}} \pi_j}$$

が成立する。右辺は他ならぬ，尤度比 $\frac{\pi_j'}{\pi_j}$ の，$j$ が固定給の対象となる $I_{min}$ にあることを所与とした，条件付期待値である。以下これを，$E\left(\frac{\pi_j'}{\pi_j}\middle| j\in I_{min}(m)\right)$ と表記する。$I_{min}(m)$ は，$I_{min}$ のうち，特に，固定給の範囲の上限の成果の番号が $m$ である場合 ($I_{min}=\{1,\ldots,m\}$) を意味する。

このことを考慮し，(24)を(23)へ代入すると，番号 $m$ について以下が成立する。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu}{\lambda}\left[\frac{\pi_m'}{\pi_m}-E\left(\frac{\pi_j'}{\pi_j}\middle| j\in I_{min}(m)\right)\right]\\
&\le\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1}{\sum_{j\in I_{min}}\pi_j}\\
&<\frac{\mu}{\lambda}\left[\frac{\pi_{m+1}'}{\pi_{m+1}}-E\left(\frac{\pi_j'}{\pi_j}\middle| j\in I_{min}(m)\right)\right]
\end{aligned}
\tag{25}
$$

この不等式(25)の最左辺を $L(m)$，不等号で挟まれた項を $C(m)$，最右辺を $R(m)$ とおく。単調尤度比（特に，本稿の場合は尤度比が単調"強"増加）及び条件付期待値の性質から，$L(m)$，$R(m)$ 共に閾値 $m$ について単調強増加であり，特に $L(1)=0$ である。一方，$C(m)$ は仮定3の iii より，$m$ について単調強減少である。更に，条件付期待値の性質から，$L(j+1)<R(j)\,\forall j\in I$ も成立する。

以上より，(25)を満たす $m\in I_{min}$ が必ず存在する。

**$\varepsilon$ の増大の影響**　まずナイト流の不確実性が全く存在しないケース（$\varepsilon=0$ の場合）を考える。この場合，(25)と整合的なのは，$m=1$ の場合のみである。すなわち，成果の全域にわたり，次善のインセンティヴ・スキームは完全な成果連動型の変動給となる。

一方，ナイト流不確実性が存在する場合（$\varepsilon$ の値が正の場合），(25)を満たす $m$ (最適な，固定給の上限)は2以上の値を取りうる。また，$\lambda$ と $\mu$ の値を所与とする限り，$\varepsilon$ の値が大きいほど，最適な閾値 $m$ は大きくなる，すなわち，固定給の範囲が広がる。

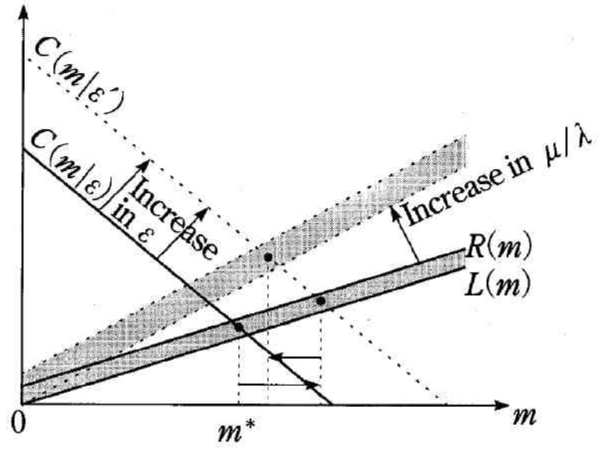
下図に於いて，$L(m)$ と $R(m)$ に挟まれた領域と $C(m)$ とが交わるような自然数 $m$ が，(25)を満たす最適な，固定給の上限 $m^*$ であるが，$\varepsilon$ の上昇によって $C(m)$ 全体が上方へシフトするため，$\lambda$ と $\mu$ を固定して考えると $\varepsilon$ の増大は $m^*$ を上昇させる。

ところが，固定給の範囲の増大は，変動給部分を所与とすると，労働者の努力のインセンティヴを削いでしまう[2]。そこで，IC 制約がきつくなる結果，$\mu$ の値は上昇する。一方，他の効用機会 $\underline{U}$ を一定とすれば，不確実性の上昇は労働者の効用を下げるため，IR 制約もきつくなり，$\lambda$ の値も上昇する。したがって，$\mu/\lambda$ の値が $\varepsilon$ の上昇によって増加するのか減少するのかについて

[2] $\sum_{j\in I}\pi_j'(a)=0$ であるから、労働者の努力追加の期待限界便益は

$$\sum_{j=1}^{m}U(\underline{w})\pi_j'(a)+\sum_{j=m+1}^{n}U(w_j)\pi_j'(a)=\sum_{j=m+1}^{n}[U(w_j)-U(\underline{w})]\pi_j'(a)$$

である。明らかに，変動給部分のインセンティヴ・スキームが不変であれば，固定給の範囲 $m$ の上昇は努力の限界便益を下げ，労働者の努力供給を押し下げる。




は不分明である。しかし，仮に $\mu$ 上昇の影響の方が深刻な場合，図に於ける様に $\mu/\lambda$ の上昇によって $L(m)$ と $R(m)$ に挟まれた領域が左上方にシフトする。これは最適な $m^*$ を下げる（固定給の範囲を狭める）要因となる。

## 4.2 数値例

以下では分布関数を第3節の例に於けるものに特定化し，$\varepsilon$ の値と労働者の留保効用 $\underline{U}$ が与えられた場合にインセンティヴ・スキームの形がどのようになるかを数値計算で求めた例を紹介する。

$\varepsilon$ の値と労働者の留保効用 $\underline{U}$ が与えられた場合の，インセンティヴ・スキームの形を画すパラメータ $\lambda$，$\mu$，$m$ 及び均衡の努力水準 $a$ の4つの変数の値は，以下のように決まる。すなわち，$\lambda, \mu, a$ が与えられると閾値条件(25)で閾値 $m$ が決まる。この $m$ と $\lambda, \mu, a$ と1階条件(19)によって決まるインセンティヴ・スキームが，実際にIR条件，IC条件，1階条件の一つ(20)を満たせば，その $\lambda, \mu, a$ が均衡解，ということになる。

ただし，離散分布の特性上，閾値 $m$ を画す条件(25)が不等式となる。この困難を避けるため，ここでは，$n$ を無限大にした場合の極限に於ける連続分布で，以下のように近似した。

すなわち，(10)に於ける確率分布で描かれる問題は，$x_j = b + l\left(\frac{j}{n}\right)$ という変換を行なって $n$ が極めて大きな数である場合には，成果 $x$ が区間 $[b, b+l]$ 上の実数値をとり，$x$ の確率密度関数が $g(x,a) \equiv 2\left[\sqrt{a}\left(\frac{x-b}{l}\right) + (1-\sqrt{a})\left(1-\frac{x-b}{l}\right)\right]$ である場合の問題で以って近似できる。

また，仮定1を満たす $U(w)$ の関数形の特定化として，$U(w) = \ln w$ を用いる。以下の表は，このような連続分布での近似と $U$ の関数形の特定化で得られた計算例である。ここでは $\underline{U}$ の値を1に，また，$x$ の区間を $[b, b+10]$ にとっている（企業がリスク中立的であるので，$b$ の値の多寡は結果に影響を及ぼさず，$x$ の取り得る値の範囲 $l$ が影響する）。

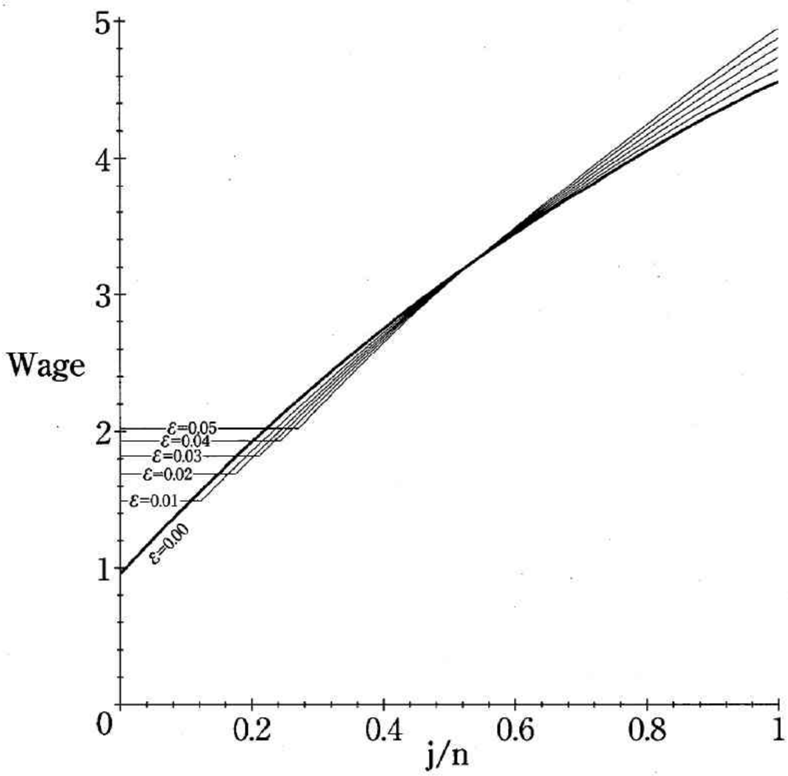
$\varepsilon$ の値の大きい程，固定給の範囲 $\lim_{n\to\infty} m/n$ は拡大するが，労働者に実行させることのできる次善の努力水準は低下する。

ここで注目すべきは，たった1パーセント不確実性が発生しただけで，下方12パーセント以

| $\varepsilon$ | $\lim_{n\to\infty}(m/n)$ | $\lambda$ | $\mu$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000 | 3.102 | 1.031 | 0.3528 |
| 0.01 | 0.1221 | 3.12 | 1.0785 | 0.3401 |
| 0.02 | 0.1723 | 3.141 | 1.1201 | 0.3310 |
| 0.03 | 0.2102 | 3.1645 | 1.1596 | 0.3232 |
| 0.04 | 0.2416 | 3.189 | 1.1979 | 0.3163 |
| 0.05 | 0.2688 | 3.2145 | 1.2357 | 0.30999 |

上の相対順位の成果が固定給の対象となることである。

以下の図は，上の表の数値例で示された，連続分布で近似したインセンティヴ・スキームの形状である。外部での効用機会を一定に基準化すると，不確実性$\varepsilon$の上昇は固定給の対象となる成果の範囲を広げるだけでなく，固定給の金額（基本給）も上昇させる。しかし，手厚い基本給は労働者の側のモラルハザードの原因ともなるため，変動給部分の賃金上昇率は大きくなる。




## 5　結　語

企業はナイト流不確実性に直面していないものの，労働者にとっては努力と成果の間の確率的な関係についての確信の度合いが一部分（$\varepsilon$の度合い）崩れ，労働者がいわばナイト流不確実性に直面している場合，労働者の努力水準を企業がコントロールできない状況下での次善の意味での

インセンティヴ・スキームは，固定給と変動給を組み合わせたものとなる。すなわち，比較的低い成果については基本給を保証し，ある成果を超えた段階から成果の多寡に応じて報酬に差をつける，という形のインセンティヴ・スキームが次善均衡となる。固定給から変動給へ移行する成果の境界は，不確実性のパラメータ $\varepsilon$ の値が大きい場合には上方にずれる。すなわち，労働者の直面する不確実性がより深刻になるほど，固定給の対象となる成果の範囲が広がり，その固定給の金額（基本給）も上昇する。

ナイト流の不確実性に直面する労働者にとっては，不確実性に直面していない労働者に比して，「最悪の報酬」は極めて重要な関心事となる。「報酬の下限」が限界的に上昇することの限界効用は，その他の報酬額が限界的に上昇することによる限界効用を上回る。したがって，不確実性の大きな労働者を契約に引き寄せるためには，企業は，変動給の中位ないし上位の報酬支払額を上げるよりも，まず報酬の下限を引き上げることによった方が，報酬支払い費用を低く抑えることができる。こうして報酬の下限からまず引き上げられることによって，固定給部分が発生する。

しかし，手厚い基本給は同時に労働者のモラル・ハザードをも生む。そこで，本稿の確率分布の数値例では，$\varepsilon$ が大きい場合，手厚い基本給と引き換えに変動給部分の賃金上昇率は大きくなる。

本稿の分析は，一人の企業と一人の労働者の間の契約のみ扱っている。これを労使の団体交渉のように，複数の労働者との間の契約に拡張することも考えられる。また，本稿で扱った情報の不完全性は，専ら企業が労働者の努力水準を観察ないしコントロールできない，という，労働者のモラルハザードの側面である。モラルハザードだけでなく，企業が労働者のタイプ，とりわけ，$\varepsilon$ の値を不完全にしか知らない場合など，いわば逆選択の原因となるような情報の不完全性を導入した，より一般的なエージェンシー問題への拡張は，今後の研究課題である。

## 参考文献


[1] 玉井義浩（2004）「ナイト流不確実性の下でのエージェンシー問題と労使間リスクシェアリング」経済貿易研究第30号，pp. 45-59.

[2] Anscombe, F. J. and R. J. Aumann (1963), "A Definition of Subjective Probability" *Annals of Mathematical Statistics* 34, pp. 199-205.

[3] Ghirardato, P. (1994), "Agency Theory with Non-Additive Uncertainty" *mimeo*, available at http://web.econ.unito.it/gma/ghiro.html

[4] Gilboa, I. (1987) "Expected Utility with Purely Subjective Non-Additive Probabilities," *Journal of Mathematical Economics*16, pp. 65-88.

[5] Grossman, S. J. and O. D. Hart (1983) "An Analysis of the Principal-Agent Problem" Econometrica 51, No. 1, pp. 7-45.

[6] Holmstrom, B. (1979) "Moral hazard and Observability" *Bell Journal of Economics,* 1979, pp. 74-91.

[7] Jewitt, I. (1988) "Justifying the First-order Approach to Principal-Agent Problems," *Econometrica* 56, pp. 1177-90.

[8] Knight, F. (1921) "Risk, Uncertainty and Profit" Boston: Houghton Mifflin

[9] Kojima, H. (2004) "$\varepsilon$-contamination and Comonotonic Independence Axiom" mimeo.

[10] Mirrlees, J. (1975) "The Theory of Moral Hazard and Unobservable Behavior—Part I," mimeo, Nuffield College, Oxford

[11] Nishimura, K. G. and H. Ozaki (2002) "An Axiomatic Approach to $\varepsilon$-contamination", *Discussion Paper Series, University of Tokyo* 2002-CF-183

[12] Rogerson, W. P. (1985) "The First-Order Approach to Principal-Agent Problems," *Econometrica* 53, No. 6, pp. 1357-1367

[13] Savage, L. (1954) "*The Foundations of Statistics*" John Wiley, New York.

[14] Schmeidler, D. (1989) "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity", *Econometrica* 57, No. 3, pp. 571-587