＜論　説＞

生涯消費，危険資産混合，確実資産保有の拡張 Roy 等式

桐谷　　維

目　次

0. 序論

不確実性下における貯蓄モデルの一般化と精緻化としてフィッシャー=フェルプス=ハカンソン線上の無限期間にわたる消費と投資の期待効用極大化問題は，確率変数としての証券投資からの収益に加えて，確実な非資本所得流入を含んでいた。本論では，消費支出を消費財の実物量と価格の積として表示し，金融資産投資額を資産の実物的量（枚数・株数）と資産価格の積に分解して，ミクロ経済分析における主要課題の一つである間接効用関数の分析に相当する極大期待生涯効用の比較静学分析を行い，消費財束のみならず危険資産混合[1]と確実資産[2]について拡張したロイの等式（Roy's　Identities）を提示する。なお，本論で用いる数学記号文字として，実数はイタリック体，ベクトル・行列はゴシック体で表す。

1. 基本モデル

1.1　富の制約式

消費と投資の配分を同時に考慮する個別主体の生涯を T 個の期間 $t=1,\ 2,\ \cdots,\ T-1,\ T$ に分ける。個別主体が消費可能な消費財の種類を $i=1,\ 2,\cdots,\ n$ とし，同様に，投資可能な[3]危険資産の種類を $h=1,\ 2,\cdots,\ s$，確実資産を1種類の資産混合とする。一般の期間 t の期首において購入される消費財束を n 次列ベクトル $\mathbf{c}_t$ とし，その消費財価格の n 次列ベクトルを $\mathbf{p}_t$ とする。同様に，危険資産の物理的保有量（枚数・株数等）の s 次列ベクトルを $\mathbf{x}_t$，その資産価格の s 次列ベクトルを $\mathbf{q}_t$ と表す。

一般に，第 t 期の期首に個別主体は，前 $t-1$ 期末の賦存富 w_{t-1} から消費支出 $\mathbf{p}'_t\mathbf{c}_t$ を支払い，残余を金融資産で保有する。金融資産の一部は危険資産混合 $\mathbf{q}'_t\mathbf{x}_t$ に投資され，残余が確実資産 m_t（現金，要求払い預金，および有期預金；いわゆる取引残高と投機残高の和）の形態で貯蓄される。確実資産混合の価値は，その価格を物理的単位当たり1と固定すると確実資産混合の物理的量と名目的金額が一致して m_t と表すことができる。すると，前 $t-1$ 期末の賦存

富 w_{t-1} の第 t 期首における支出配分は次のように書かれる。

$$w_{t-1} = \mathbf{p}'_t \mathbf{c}_t + \mathbf{q}'_t \mathbf{x}_t + m_t \tag{1}$$

消費 $\mathbf{c}_t$ は当期中に消費され，金融資産は期末までに増殖する。確実資産 m_t は確定利子率 r_t を生み，第 t 期の期末までに $(1+r_t)m_t$ に増殖する。この増殖率 $(1+r_t)$ を確実資産の累積要因（accumulation factor）という。

危険資産の物理的単位[4)]（1 株・1 枚）当たり第 t 期首の価値 $\mathbf{q}'_t$ は t 期末までに将来価値 $\mathbf{R}_t$ に増殖する。$\mathbf{R}_t$ は，来期 $t+1$ の価格 $\mathbf{q}_{t+1}$ と今期の配当 $\mathbf{d}_t$ の和 $\mathbf{R}_t = \mathbf{q}_{t+1} + \mathbf{d}_t$ である。なお，この期末価値 $\mathbf{R}_t$ から期首の価格 $\mathbf{q}_t$ を差し引いた $\mathbf{R}_t - \mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t+1} - \mathbf{q}_t + \mathbf{d}_t$ は期間中の物理的単位当たり収益額であり，特に $\mathbf{q}_{t+1} - \mathbf{q}_t$ の部分は資本利得と呼ばれる。また，t 期中に労働賃金等の非資産所得 y_t が稼得される。それ故，第 t 期末までに増殖した富は次のようになる。

$$\begin{aligned} w_t &= \mathbf{R}'_t \mathbf{x}_t + (1+r_t) m_t + y_t \\ &= (1+r_t)(w_{t-1} - \mathbf{p}'_t \mathbf{c}_t) + (\mathbf{R}_t - (1+r_t)\mathbf{q}_t)' \mathbf{x}_t + y_t \end{aligned} \tag{2}$$

上式 2 行目は，(1) 式を m_t に代入して得られる。

このプロセスが $t=0$ から $T-1$ 期まで続くと，そこでは第 $T-2$ 期末の富 w_{T-2} が $T-1$ 期首において配分される。

$$w_{T-2} = \mathbf{p}'_{T-1} \mathbf{c}_{T-1} + m_{T-1} + \mathbf{q}'_{T-1} \mathbf{x}_{T-1} \tag{3}$$

$T-1$ 期末までに，この富は増殖して次式になる。

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}'_{T-1} \mathbf{x}_{T-1} + (1+r_{T-1}) m_{T-1} + y_{T-1} \\ &= (1+r_{T-1})(w_{T-2} - \mathbf{p}'_{T-1} \mathbf{c}_{T-1}) \\ &\quad + (\mathbf{R}_{T-1} - (1+r_{T-1}) \mathbf{q}_{T-1})' \mathbf{x}_{T-1} + y_{T-1} \\ &= w_{T-1} \end{aligned} \tag{4}$$

最終の T 期首に，前期末富 w_{T-1} は消費支出 $\mathbf{p}'_T \mathbf{c}_T$ と遺産 b_T に分けられる。

$$w_{T-1} = \mathbf{p}'_T \mathbf{c}_T + b_T \tag{5}$$

この遺産 b_T が最後に残される富 w_T に他ならない。

$$b_T = w_T \ (\geqq 0) \tag{6}$$

1.2　生涯効用の最適化問題

富の増殖過程で消費額は毎期漏出していくが，その消費量が生涯を通じてもたらす生涯効用を分離型効用関数により指定する[5)]。将来価値の現在への割引率 α を $0<\alpha\leqq 1$ と定める。

$$U=u(\mathbf{c}_1)+\sum_{t=2}^{T}\alpha^{t-1}u(\mathbf{c}_t) \tag{7}$$

上式で，現在期（$t=1$）は確実であるが，将来期（$2\leqq t\leqq T$）は不確実であると考え，将来期間全体にわたって期待値[6)]を取り，来2期以降の期待効用を現在価値に割り引く。

$$E[U]=u(\mathbf{c}_1)+\sum_{t=2}^{T}\alpha^{t-1}\mathrm{E}[u(\mathbf{c}_t)] \tag{8}$$

よって，期待生涯効用は，(8) 式のように，現在決定期と将来決定期の二部分に分割できる。すると，問題は，『期待生涯効用 (8) を制約条件 $w_t=(1+r_t)(w_{t-1}-\mathbf{p}'_t\,\mathbf{c}_t)+(\mathbf{R}_t-(1+r_t)\mathbf{q}_t)'\mathbf{x}_t+y_t$ $(t=1,2,\cdots,T-1)$ および $w_{T-1}=\mathbf{p}'_T\,\mathbf{c}_T+b_T$　$(t=T)$ の下で，消費ベクトル $\mathbf{c}_1$，$\mathbf{c}_2$，…，$\mathbf{c}_t$，…，$\mathbf{c}_T$ に関して極大にする』と設定することができる[7)]。

期待生涯効用 $\mathrm{E}[U]$ の**極大値**を V と置く。V の下添え字 $T-t$ は当期後の残存期間を表し，w の下添え字 t は当期を表す。まず，第1期の極大生涯期待効用 $V_T(w_0)$ は次式のような体系構造式に書かれる。

$$V_T(w_0)=\max U_T=\max\left\{u(\mathbf{c}_1)+\sum_{t=2}^{T}\alpha^{t-1}\mathrm{E}[u(\mathbf{c}_t)]\right\} \tag{9}$$

$V_T(w_0)$ は第1期首に残存期数 T を伴う初期（$t=0$）賦存富 w_0 の関数であることを表す。

ここで，(9) 式を将来に1期ずらして，

$$V_{T-1}(w_1)=\max U_{T-1}=\max\left\{u(\mathbf{c}_2)+\sum_{t=3}^{T}\alpha^{t-2}\mathrm{E}[u(\mathbf{c}_t)]\right\} \tag{10}$$

とする。上式両辺の期待値を取り，割引率 α を掛けて1期だけ割り引き，将来決定期についてまとめる。

$$\alpha\mathrm{E}[V_{T-1}(w_1)]=\alpha\mathrm{E}[\max U_{T-1}]$$

$$=\max\left\{\alpha\mathrm{E}[u(\mathbf{c}_2)]+\sum_{t=3}^{T}\alpha^{t-1}\mathrm{E}[u(\mathbf{c}_t)]\right\}$$
$$=\max\left\{\sum_{t=2}^{T}\alpha^{t-1}\mathrm{E}[u(\mathbf{c}_t)]\right\} \tag{11}$$

すると，第1期を現在期とし，第 T 期までの将来にわたる極大期待生涯効用は，初期賦存富 w_0の関数として単純化されて，現在期と将来期の二つの項にまとめられる。

$$V_T(w_0)=\max\{u(\mathbf{c}_1)+\alpha\mathrm{E}[V_{T-1}(w_1)]\} \tag{12}$$

一般に任意の第 t 期における極大期待生涯効用は次のように書かれる。

$$V_{T-t+1}(w_{t-1})=\max\{u(\mathbf{c}_t)+\alpha\mathrm{E}[V_{T-t}(w_t)]\}$$
$$=\max\{u(\mathbf{c}_t)+\alpha\mathrm{E}[V_{T-t}((1+r_t)(w_{t-1}-\mathbf{p}'_t\,\mathbf{c}_t)$$
$$+(\mathbf{R}_t-(1+r_t)\mathbf{q}_t)'\mathbf{x}_t+y_t)]\}\qquad t=1,2,\cdots,T-1, \tag{13-1}$$
$$V_1(w_{T-1})=\max\{u(\mathbf{c}_T)\}\qquad t=T \tag{13-2}$$

生涯最終期末 $t=T$ 期において，T 期首の富 w_{T-1}は消費財束 $\mathbf{c}_T$ に支出された残りが遺産 $B_T\geqq 0$ として残される。第 $T-1$ 期では，期首の富 w_{T-2}から消費額 $\mathbf{p}'_{T-1}\,\mathbf{c}_{T-1}$を差し引いた残余の額 $w_{T-2}-\mathbf{p}'_{T-1}\,\mathbf{c}_{T-1}$が最終期 T の期首富 w_{T-1}に増殖して，それが最終 T 期中に消費 $\mathbf{p}'_T\,\mathbf{c}_T$ と遺産 B_T に分割される。

$$(1+r_{T-1})(w_{T-2}-\mathbf{p}'_{T-1}\,\mathbf{c}_{T-1})+(\mathbf{R}_{T-1}-(1+r_{T-1})\mathbf{q}_{T-1})'\mathbf{x}_{T-1}+y_{T-1}$$
$$=w_{T-1}=\mathbf{p}'_T\,\mathbf{c}_T+B_T \tag{14}$$

それ故，第 $T-1$ 期における極大期待生涯効用は

$$V_2(w_{T-2})=\max\{u(\mathbf{c}_{T-1})+\alpha\mathrm{E}[V_1((1+R_{T-1})(w_{T-2}-\mathbf{p}'_{T-1}\,\mathbf{c}_{T-1})$$
$$+(\mathbf{R}_{T-1}-(1+r_{T-1})\mathbf{q}_{T-1})'\mathbf{x}_{T-1}+y_{T-1})]\}$$
$$=\max\{u(\mathbf{c}_{T-1})+\alpha\mathrm{E}[V_1(w_{T-1})]\}$$
$$=\max\{u(\mathbf{c}_{T-1})+\alpha\mathrm{E}[V_1(\mathbf{p}'_T\,\mathbf{c}_T+B_T)]\} \tag{15}$$

のように，後続決定部が最終期 T の極大期待効用と一致する。

2. 投資主体の最適化行動

2.1 最適解の導出

一般の t 期について，期待生涯効用

$$U_t = u(\mathbf{c}_t) + \alpha \mathrm{E}[V_{T-t}((1+r_t)(w_{t-1} - \mathbf{p}'_t \mathbf{c}_t) + (\mathbf{R}_t - (1+r_t)\mathbf{q}_t)'\mathbf{x}_t + y_t)] \qquad t = 1, 2, \cdots, T-1, \tag{16}$$

を $\mathbf{c}_t$ と $\mathbf{x}_t$ に関して偏微分してゼロと置くと，極大化の1階条件が得られる。

$$\frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{c}_t} = \frac{du(\mathbf{c}_t)}{d\mathbf{c}_t} - \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}}{dw_t}((1+r_t)(w_{t-1} - \mathbf{p}'_t \mathbf{c}_t) + (\mathbf{R}_t - (1+r_t)\mathbf{q}_t)'\mathbf{x}_t + y_t)(1+r_t)\mathbf{p}_t\right] = \mathbf{0} \tag{17-1}$$

および

$$\frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{x}_t} = \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}}{dw_t}((1+r_t)(w_{t-1} - \mathbf{p}'_t \mathbf{c}_t) + (\mathbf{R}_t - (1+r_t)\mathbf{q}_t)'\mathbf{x}_t + y_t) \cdot (\mathbf{R}_t - (1+r_t)\mathbf{q}_t)\right] = \mathbf{0} \tag{17-2}$$

極大化の2階条件は，非ゼロの $[d\mathbf{c}'_t \ \ d\mathbf{x}'_t] \neq \mathbf{0}'$ に対して，次の2次形式が負値定符号（negative definite）[8]になることである。

$$[d\mathbf{c}'_t \ d\mathbf{x}'_t] \begin{bmatrix} \partial^2 U_t / \partial \mathbf{c}_t^2 & \partial^2 U_t / \partial \mathbf{c}_t \partial \mathbf{x}_t \\ \partial^2 U_t / \partial \mathbf{x}_t \partial \mathbf{c}_t & \partial^2 U_t / \partial \mathbf{x}_t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{c}_t \\ d\mathbf{x}_t \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \ & [d\mathbf{c}_t]' [\partial^2 U_t / \partial \mathbf{c}_t^2] [d\mathbf{c}_t] \\ & + 2\ [d\mathbf{c}_t]' [\partial^2 U_t / \partial \mathbf{c}_t \partial \mathbf{x}_t] [d\mathbf{x}_t] \\ & + \ [d\mathbf{x}_t]' [\partial^2 U_t / \partial \mathbf{x}_t^2] [d\mathbf{x}_t] < 0 \end{aligned} \tag{18}$$

1階条件（17–1）と（17–2）の同時解を解けば，n 次消費財束と s 次危険資産混合の解ベクトルが求められる。これらの解ベクトルはパラメーター群の関数になる。ただし，$\mathscr{R}_t$ は確率変数である危険資産収益率ベクトル $\mathbf{R}_t$ の確率分布を規定するパラメーター集合を表す。

$$\mathbf{c}_t^* = \mathbf{c}_t^*(\mathbf{p}_t, \ \mathbf{q}_t, \ r_t, \ w_{t-1}, \ y_t, \ \mathscr{R}_t) \tag{19-1}$$

$$\mathbf{x}_t^* = \mathbf{x}_t^*(\mathbf{p}_t, \ \mathbf{q}_t, \ r_t, \ w_{t-1}, \ y_t, \ \mathscr{R}_t) \tag{19-2}$$

（19–1）式は消費財束（フロー）の需要関数であり，（19–2）式は危険資産混合（ストック）の保有需要（投資）関数である。

危険資産将来価値ベクトル $\mathbf{R}_t$ が従う確率分布を，取りあえず，最も単純な2パラメーター分布[9]と仮定する。このとき，確率分布パラメーターは将来価値 $\mathbf{R}_t$ の平均値ベクトル $\boldsymbol{\mu}_t$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ になり[10]，確率分布パラメー

ターの集合は$\mathscr{R}_t=\{\boldsymbol{\mu}_t,\ \boldsymbol{\Sigma}_t\}$と書かれる。平均値ベクトル$\boldsymbol{\mu}_t$は将来価値ベクトル$\mathbf{R}_t$の期待値の$s$次列ベクトルであり，

$$\boldsymbol{\mu}_t=\mathrm{E}[\mathbf{R}_t] \tag{20}$$

と書かれる。危険資産将来価値ベクトル$\mathbf{R}_t$の分散共分散行列$\boldsymbol{\Sigma}_t$はs次正方行列であり，

$$\boldsymbol{\Sigma}_t=\mathrm{E}[(\mathbf{R}_t-\boldsymbol{\mu}_t)(\mathbf{R}_t-\boldsymbol{\mu}_t)'] \tag{21}$$

と定義される。

2.2　極大期待生涯効用関数

一般の第t期について，(19) 式の最適解$\mathbf{c}_t^*$と$\mathbf{x}_t^*$を元の期待生涯効用の (16) 式に代入すると，第t期の極大期待生涯効用$\max U_t$が得られる。これはV_{T-t+1}と書かれ，極大期待生涯効用はパラメーター群$\mathbf{p}_t$，$\mathbf{q}_t$，r_t，w_{t-1}，y_t，$\mathscr{R}_t=\{\boldsymbol{\mu}_t,\ \boldsymbol{\Sigma}_t\}$を変数とする当期の関数として表される[11)]。

$$\begin{aligned}
&V_{T-t+1}(\mathbf{p}_t,\ \mathbf{q}_t,\ r_t,\ w_{t-1},\ y_t,\ \mathscr{R}_t)\\
&\quad=\max U_t\\
&\quad=u(\mathbf{c}_t^*)+\alpha\mathrm{E}[V_{T-t}(w_t)]\\
&\quad=u(\mathbf{c}_t^*)+\alpha\mathrm{E}[V_{T-t}((1+r_t)(w_{t-1}-\mathbf{p}_t'\mathbf{c}_t^*)\\
&\qquad\qquad+(\mathbf{R}_t-(1+r_t)\mathbf{q}_t)'\mathbf{x}_t^*+y_t)]\\
&\qquad\qquad\qquad t=1,2,\cdots,\ T-1,
\end{aligned} \tag{22}$$

なお，第t期首における最終期Tまでの残存期間は$T-(t-1)=T-t+1$期であり，将来の第$t+1$期における残存期間数は$T-t$である。

上記パラメーター群の変化が現在期の極大期待生涯効用V_{T-t+1}に及ぼす効果を検討するために，まず，将来期のV_{T-t}に関する，次の補助定理を用意する。

〔補助定理〕

期間tにおける富w_tに関する将来期の限界極大期待生涯効用は正である。すなわち，$\dfrac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}>0$である。

（証明） 1階条件（17-1）式より，

$$\frac{du\ (\mathbf{c}_t)}{d\,\mathbf{c}_t}=\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\ (w_t)}{dw_t}(1+r_t)\,\mathbf{p}_t\right] \tag{17$'$-1}$$

を得る。（17′-1）式の左辺は消費財束 $\mathbf{c}_t$ の限界効用のベクトルであり，通常，$\frac{du\ (\mathbf{c}_t)}{d\,\mathbf{c}_t}>\mathbf{0}$，正であると仮定される。よって，（17′-1）式の右辺も正であるから，正の価格ベクトル $\mathbf{p}_t>\mathbf{0}$, 正の確定利子率 $r_t>0$，正の割引率 $\alpha>0$ を考慮すれば，$\frac{dV_{t-1}\,(w_t)}{dw_t}>0$ と判定される。▮

3. 初期富と当期所得変化の効果

以下では，この**補助定理**を用いて，現在期極大期待生涯効用 V_{T-t+1} に及ぼすパラメーター変化の効果を検討する。

3.1　初期富変化の効果

〔定理 1〕

前 $t-1$ 期末の富 w_{t-1} が増加すると，当期 t の現在期極大期待生涯効用 V_{T-t+1} は増加する。すなわち，$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial w_{t-1}}>0$ である。

（証明）（22）式の V_{T-t+1} を前期末富 w_{t-1} に関して偏微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial w_{t-1}}&=\left\{\frac{du\ (\mathbf{c}_t^*)}{d\,\mathbf{c}_t}-\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\ (w_t)}{dw_t}(1+r_t)\,\mathbf{p}_t\right]\right\}'\left(\frac{d\,\mathbf{c}_t^*}{dw_{t-1}}\right)\\&\quad+\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\ (w_t)}{dw_t}(\mathbf{R}_t\ (1+r_t)\,\mathbf{q}_t)'\left(\frac{d\,\mathbf{x}_t^*}{dw_{t-1}}\right)\right]\\&\quad+\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\ (w_t)}{dw_t}\right](1+\mathrm{r}_t)\\&=\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\ (w_t)}{dw_t}\right](1+r_t)>0\end{aligned} \tag{23}$$

上式の1行目と2行目は（17-1）と（17-2）を用いるとゼロになるから，3行目のみが残る。**補助定理**により $\frac{dV_{t-1}\,(w_t)}{dw_t}>0$ だから，（23）式最右辺で，正の確定利子率 $r_t>0$, 正の割引率 $\alpha>0$ を考慮して，所定の偏導関数は正，すなわち，$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial w_{t-1}}>0$ と判定できる。▮

3.2　当期所得の変化

〔定理 2〕

第 t 期の所得 y_t が増加すると当期 t の現在期極大期待生涯効用 V_{T-t+1} は増加する。すなわち，$\dfrac{\partial V_{T-t+1}}{\partial y_t}>0$ である。

（証明）（22）式の V_{T-t+1} を当期 t の所得に関して偏微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial y_t}&=\left\{\frac{du\,(\mathbf{c}_t^*)}{d\,\mathbf{c}_t}-\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\,(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\,\mathbf{p}_t\right]\right\}'\left(\frac{\partial\,\mathbf{c}_t^*}{\partial y_t}\right)\\&\quad+\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\,(w_t)}{dw_t}(\mathbf{R}_t-(1+r_t)\,\mathbf{q}_t)'\left(\frac{\partial \mathbf{x}_t^*}{\partial y_t}\right)\right]\\&\quad+\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\,(w_t)}{dw_t}\right]\\&=\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\,(w_t)}{dw_t}\right]>0\end{aligned}\tag{24}$$

右辺 1 行目と 2 行目は 1 階条件（17－1）と（17－2）よりゼロに等しいから，3 行目だけが残る。よって，**補助定理**と $\alpha>0$ により（24）式の符号は正である。■

4. 決定論的パラメーター変化の効果

現在期極大期待生涯効用関数の変数には，確率的でないパラメーターと確率分布のパラメーターが含まれる。前者の確率的でないパラメーターを決定論的（deterministic）という。本節では，これらの決定論的パラメーター（$\mathbf{p}_t$, $\mathbf{q}_t$, r_t, w_{t-1}, y_t）の変化が当期 t の現在期極大期待生涯効用に及ぼす効果を検討する。

4.1　消費財価格変化の効果

〔定理 3〕

第 t 期の消費財価格 $\mathbf{p}_t$ が上昇すると当期の現在期極大期待生涯効用 V_{T-t+1} は減少するか一定である。すなわち，$\dfrac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \mathbf{p}_t}\leq \mathbf{0}$ である。

（証明）（22）式の V_{T-t+1} を第 t 期の消費財価格ベクトル $\mathbf{p}_t$ に関して偏微分する。

$$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \mathbf{p}_t}=\left(\frac{d\,\mathbf{c}_t^*}{d\,\mathbf{p}_t}\right)'\left\{\frac{du\,(\mathbf{c}_t^*)}{d\,\mathbf{c}_t}-\alpha\mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\,(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\,\mathbf{p}_t\right]\right\}$$
$$-\alpha\mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\,(w_t)}{dw_t}\right](1+r_t)\,\mathbf{c}_t^*$$
$$+\alpha\mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}}{dw_t}\left(\frac{\partial\,\mathbf{x}_t\,(w_t)}{\partial\,\mathbf{p}_t}\right)(\mathbf{R}_t-(1+r_t)\,\mathbf{q}_t)\right]$$
$$=-\alpha\mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\,(w_t)}{dw_t}\right](1+r_t)\,\mathbf{c}_t^*\leq\mathbf{0}\tag{25}$$

1階条件（17）により，1行目と3行目はゼロである。よって，2行目だけが残る。すると，正の割引率 $\alpha>0$, 正の確定利子率 $r_t>0$, 半正最適消費ベクトル $\mathbf{c}_t^*\geq\mathbf{0}$ および**補助定理**を考慮して，（25）式は半非正[12]と判定される。■

付言すれば，上の証明で，財の消費ベクトルは非負（$\mathbf{c}_t^*\geqq\mathbf{0}$）である。しかし，消費者が生存するためには消費ベクトルはゼロ・ベクトルにはなり得ない（$\mathbf{c}_t^*\neq 0$）から，必ず半正（$\mathbf{c}_t^*\geq 0$）となる。

4.2　危険資産混合の投資立場

投資主体の危険資産混合投資の立場（positions）は，まず次の3領域に分割される。i）信用買いの立場，ii）現物投資の立場，iii）空売りの立場[13]。

投資主体は当初の賦存富 w_{t-1}から第 t 期の消費支出 $\mathbf{p}_t'\mathbf{c}_t^*$を差し引いた残高 $w_{t-1}-\mathbf{p}_t'\mathbf{c}_t^*$を危険資産混合投資 $\mathbf{q}_t'\mathbf{x}_t^*$と確実資産保有 m_t^*に分割する。よって，（1）式より，第 t 期危険資産混合投資額と確実資産保有額は投資立場ごとに次のように表される。

i）危険資産混合の信用買い：

$$(w_{t-1}-\mathbf{p}_t'\mathbf{c}_t^*)<\mathbf{q}_t'\mathbf{x}_t^*\tag{26-1}$$

ii）危険資産混合の現物投資：

$$0\leqq\mathbf{q}_t'\mathbf{x}_t^*\leqq(w_{t-1}-\mathbf{p}_t'\mathbf{c}_t^*)\tag{26-2}$$

iii）危険資産混合の空売り：

$$\mathbf{q}_t'\mathbf{x}_t^*<0\tag{26-3}$$

次に，上の三つの立場に対応する確実資産保有額は次のように表される。

i) 危険資産混合の信用買いに対して

$$m_t^* < 0 \tag{27-1}$$

ii) 危険資産混合の現物投資に対して

$$0 \leq m_t^* \leq (w_{t-1} - \mathbf{p}_t'\mathbf{c}_t^*) \tag{27-2}$$

iii) 危険資産混合の空売りに対して

$$(w_{t-1} - \mathbf{p}_t'\mathbf{c}_t^*) < m_t^* \tag{27-3}$$

すると，確実資産は，危険資産の現物投資と空売りの立場に対して非負ないし正であり，信用買いの立場で負であることが判る。

さらに，危険資産混合の保有形態は二つの立場に区別される。一つはi) 信用買い (26-1) とii) 現物投資 (26-2) を一括した立場であり，**買い長** (long position) という。他の一つはiii) 空売り (26-3) の立場であり，**売り長** (short position) という。

買い長の立場は，全危険資産保有が現物投資と信用買いに限定され，関連する危険資産が一律に買い一辺倒になる。売り長の立場は，全危険資産投資が空売りに限定され，売り一辺倒になる。なお，個別主体にとって投資可能な危険資産のベクトルは全銘柄の投資から全銘柄の無投資まであり得るから，危険資産保有ベクトルは，買い長の場合，非負 $\mathbf{x}^* \geq 0$ と表され，売り長の場合，負 $\mathbf{x}^* < 0$ と表される。

4.3　危険資産価格変化の効果

〔定理 4 a〕

全危険資産保有が買い長で $\mathbf{x}_t^* \geq 0$ の場合，第 t 期の危険資産価格 $\mathbf{q}_t$ が上昇すると当期の現在期極大期待生涯効用 V_{T-t+1} は減少するか一定に留まる。すなわち，$\dfrac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \mathbf{q}_t} \leq \mathbf{0}$ である。また，全危険資産保有が売り長で $\mathbf{x}_t^* < 0$ の場合，第 t 期の危険資産価格 $\mathbf{q}_t$ が上昇すると当期の極大期待生涯効用 V_{T-t+1} は増加する。すなわち，$\dfrac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \mathbf{q}_t} > \mathbf{0}$ である。

(証明) (22) 式の V_{T-t+1} を今期の危険資産価格ベクトル $\mathbf{q}_t$ に関して偏微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \mathbf{q}_t}&=\left(\frac{d\mathbf{c}_t^*}{d\mathbf{q}_t}\right)'\left\{\frac{du(\mathbf{c}_t^*)}{d\mathbf{c}_t}-\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\mathbf{p}_t\right]\right\}\\&\quad+\alpha\mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}\left(\frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \mathbf{q}_t}\right)(\mathbf{R}_t-(1+r_t)\mathbf{q}_t)\right]\\&\quad-\alpha\mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\mathbf{x}_t^*\right]\\&=-\alpha\mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\mathbf{x}_t^*\right]\end{aligned}\tag{28}$$

上式右辺の第1行と第2行は1階条件（17）よりゼロである。よって，右辺最終行のみが残る。**買い長**の場合，最適危険資産保有ベクトルは非負で$\mathbf{x}_t^*\geqq\mathbf{0}$だから，右辺頭の負符号，正の割引率$\alpha>0$,正の確定利子率$r_t>0$,および**補助定理**を考慮すると，（28）式は非正と判定できる。

$$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \mathbf{q}_t}=-\alpha\mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\mathbf{x}_t^*\right]\leqq\mathbf{0}\tag{28′}$$

また，同じ（28）式で，**売り長**の場合，最適危険資産保有ベクトルは負となり，$\mathbf{x}_t^*<\mathbf{0}$だから，右辺頭の負符号，正の割引率$\alpha>0$,正の確定利子率$r_t>0$,および**補助定理**を考慮すると，（28）式は正と判定できる。

$$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \mathbf{q}_t}=-\alpha\mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\mathbf{x}_t^*\right]>\mathbf{0}\tag{28″}$$

を得る。∎

危険資産への投資態様は，保有する全銘柄について必ずしも一律ではない。ある銘柄は保有され，ある銘柄は保有されず，ある銘柄は空売りされる。この場合の極大期待生涯効用に及ぼす危険資産価格効果は危険資産保有ベクトルの成分ごとに異なる。それ故，次の**定理**4bは危険資産を銘柄別に取り扱う。

〔**定理**4b〕

個別主体による第h危険資産の保有が買い長であるか，売り長であるかに応じて，第t期の危険資産hの価格q_{ht}が上昇すると，当期の現在期極大期待生涯効用V_{T-t+1}は，買い長のとき減少するか一定に留まり，売り長のとき増加する。すなわち，買い長$x_{ht}^*\geqq0$のとき$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial q_{ht}}\leqq0$，売り長$x_{ht}^*<0$のとき$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial q_{ht}}>0$である。

(証明) **定理** 4 a の (28) 式を銘柄別に書き直すと，銘柄 h の買い長 $x_{ht}^{*} \geqq 0$ に対応して

$$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial q_{ht}} = -\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)x_{ht}^{*}\right] \leqq 0 \tag{29-1}$$

または売り長 $x_{ht}^{*}<0$ に対応して

$$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial q_{ht}} = -\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)x_{ht}^{*}\right] > 0 \tag{29-2}$$

となる。何故ならば，(29) 式右辺で頭の負符号，正の割引率 $\alpha>0$, 正の確定利子率 $r_t>0$, および**補助定理**を考慮すると，最適危険資産 h の買い長 $x_{ht}^{*} \geqq 0$ または売り長 $x_{ht}^{*}<0$ に対応して，上式の符号は非正または正と判定できるからである。∎

4.4　確定利子率変化の効果

これら危険資産投資の立場の領域に対して，確定利子率 r_t の変化に関する効果が次の**定理** 5 により確認される。

〔**定理** 5〕

第 t 期の確定利子率 r_t が上昇すると第 t 期の極大期待生涯効用 V_{T-t+1} は増加する。すなわち，$\dfrac{\partial V_{T-t+1}}{\partial r_t} > 0$ である。

(証明) (22) 式を確定利子率 r_t に関して偏微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial r_t} &= \left\{\frac{du(\mathbf{c}_t^{*})}{d\mathbf{c}_t} - \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w)}{dw_t}(1+r_t)\mathbf{p}_t\right]\right\}'\left(\frac{d\mathbf{c}_t^{*}}{dr_t}\right) \\ &\quad + \alpha \mathrm{E}\left[\frac{d\mathrm{V}_{T-t}(w_t)}{dw_t}(w_{t-1} - \mathbf{p}'_t\mathbf{c}_t^{*} - \mathbf{q}'_t\mathbf{x}_t^{*})\right] \\ &\quad + \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(\mathbf{R}_t - (1+r_t)\mathbf{q}_t^{*})'\left(\frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial r_t}\right)\right] \\ &= \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}m_t^{*}\right]\end{aligned} \tag{30}$$

1 階条件 (17) より右辺 1 行目と 3 行目はゼロだから，2 行目だけが残る。また，(1) 式より $m_t = w_{t-1} - \mathbf{p}'_t\mathbf{c}_t - \mathbf{q}'_t\mathbf{x}_t$ だから，これを用いて整理すると，(30) 式最右辺で，$\alpha>0$, および**補助定理**により $dV_{T-t}(w_t) / dw_t>0$ だから，(27) の確実資産保有の符号を用いて，危険資産の現物投資と空売りの立場

$\boldsymbol{m}_t^* \geqq 0$ に対して，(30) 式の符号は非負であり，

$$\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t} m_t^*\right] \geq 0 \tag{31-1}$$

信用買いの立場 $\boldsymbol{m}_t^* < 0$ に対して，(30) 式の符号は負である。

$$\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t} m_t^*\right] < 0 \tag{31-2}$$

■

5. 確率論的パラメーター変化の効果

危険資産期末価値ベクトル $\mathbf{R}_t$ が属する確率分布を規定するパラメーターを，$\mathbf{R}_t$ の期待値ベクトル $\boldsymbol{\mu}_t$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ とする[14]。本節では，これらの確率論的パラメーターの変化が現在期の極大期待生涯効用 V_{T-t+1} に及ぼす効果を検討する。特に，後述の**定理 7** が示すように，分散共分散行列の変化が全く無効果であることは著しい特徴を示している。

5.1　危険資産期待期末価値の変化

〔**定理 6**〕

第 t 期の危険資産期待期末価値 $\boldsymbol{\mu}_t$ が上昇するとき，当期の現在期極大期待生涯効用 V_{T-t+1} は危険資産混合が買い長で $\mathbf{x}_t^* \geqq \mathbf{0}$ ならば増加するか一定に留まり，売り長で $\mathbf{x}_t^* < \mathbf{0}$ ならば減少する。すなわち，買い長ならば，$\dfrac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \boldsymbol{\mu}_t} \geqq \mathbf{0}$，売り長ならば，$\dfrac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \boldsymbol{\mu}_t} < \mathbf{0}$ である。

(証明) (22) 式を期待期末価値のベクトル $\boldsymbol{\mu}_t$ に関して偏微分する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \boldsymbol{\mu}_t} &= \left\{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{c}_t} + \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}\right]\left(\frac{\partial w_t}{\partial \mathbf{c}_t}\right)\right\}\left(\frac{\partial \mathbf{c}_t}{\partial \boldsymbol{\mu}_t}\right) \\
&\quad + \alpha \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}V_{T-t}(w_t)}{dw_t}\left(\frac{\partial w_t}{\partial \mathbf{x}_t}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \boldsymbol{\mu}_t}\right)\right] \\
&\quad + \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}\left(\frac{\partial w_t}{\partial \boldsymbol{\mu}_t}\right)\right] \\
&= \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t} \mathbf{x}_t^*\right]
\end{aligned} \tag{32-1}$$

上の (32-1) 式の 1 行目と 2 行目は 1 階条件 (17-1) と (17-2) によりゼロで消え，3 行目に $\mathrm{E}[\partial w_t / \partial \boldsymbol{\mu}_t] = \mathbf{x}_t^*$ を用いる。すると，**補助定理**と $\alpha > 0$ により

(32-1) 式の符号は $\mathbf{x}_t^*$ の符号に一致する。(32-1) 式の符号は，危険資産が買い長 $\mathbf{x}_t^* \geqq \mathbf{0}$ ならば非負，

$$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \boldsymbol{\mu}_t} = \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}}{dw_t}\right]\mathbf{x}_t^* \geqq \mathbf{0} \tag{32-2}$$

売り長 $\mathbf{x}_t^* < 0$ ならば負，

$$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \boldsymbol{\mu}_t} = \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}}{dw_t}\right]\mathbf{x}_t^* < \mathbf{0} \tag{32-3}$$

と判定される。■

5.2　危険資産期末価値の分散共分散変化の効果

〔定理 7〕

第 t 期の危険資産期末価値 $\mathbf{R}_t$ の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ が変化しても，当期の現在期極大期待生涯効用 V_{T-t+1} は一定に留まる。

（証明） (22) 式を分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ に関して偏微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_t} &= \left\{\frac{du\,(\mathbf{c}_t)}{d\,\mathbf{c}_t} + \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\,(w_t)}{dw_t}\right]\left(\frac{\partial w_t}{\partial \mathbf{c}_t}\right)\right\}'\left(\frac{\partial \mathbf{c}_t}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_t}\right) \\ &\quad + \alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}\,(w_t)}{dw_t}\left(\frac{\partial w_t}{\partial \mathbf{x}_t}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_t}\right)\right] = \mathbf{O}\end{aligned} \tag{33}$$

$\partial w_t / \partial \mathbf{c}_t = -(1+r_t)\mathbf{p}_t$，$\partial w_t / \partial \mathbf{x}_t = (\mathbf{R}_t - (1+r_t)\mathbf{q}_t)$ を考慮すると，右辺 1 行目は 1 階条件 (17-1) によりゼロになり，また，2 行目は 1 階条件 (17-2) によりゼロになる。よって，$[\partial \mathbf{c}_t / \partial \boldsymbol{\Sigma}_t]$ と $[\partial \mathbf{x}_t / \partial \boldsymbol{\Sigma}_t]$ が何であろうと無関係に (33) 式はゼロ行列となる。■

6. Roy の等式の拡張

これまで導出した諸定理から，現在期極大期待生涯効用について拡張された Roy の等式[15)]を導き出すことができる。ここでは，消費財ベクトル $\mathbf{c}_t$ と危険資産混合ベクトル $\mathbf{x}_t$ および確実資産 m_t に関する等式を導く。この場合，分母となる所得項は前期末富 w_{t-1} および今期の所得 y_t の二通りを試験的に用いる。分子となる価格項は消費財価格ベクトル $\mathbf{p}_t$，危険資産価格ベクトル $\mathbf{q}_t$，危険資産期待期末価値ベクトル $\boldsymbol{\mu}_t$，確実資産確定利子率 r_t の 4 種とする。

6.1　前期末富 w_{t-1} の等式群

6.1.1　消費財ベクトル

まず，**定理1**の（23）式を**定理3**の（25）式に代入して整理し，消費財ベクトルの等式を求める。

$$\mathbf{c}_t^* = -\frac{\partial V_{T-t+1}/\partial \mathbf{p}_t}{\partial V_{T-t+1}/\partial w_{t-1}} \tag{34}$$

6.1.2　危険資産混合ベクトル（危険資産価格ベクトル $\mathbf{q}_t$ による）

定理1の（23）式を**定理4a**の（28）式に代入して整理し，危険資産混合ベクトルの等式を求める。

$$\mathbf{x}_t^* = -\frac{\partial V_{T-t+1}/\partial \mathbf{q}_t}{\partial V_{T-t+1}/\partial w_{t-1}} \tag{35}$$

6.1.3　危険資産混合ベクトル（危険資産期待期末価値ベクトル $\boldsymbol{\mu}_t$ による）

定理1の（23）式を**定理6**の（32-1）式に代入して危険資産混合 $\mathbf{x}_t$ について整理する。

$$\mathbf{x}_t^* = \frac{(\partial V_{T-t+1}/\partial \boldsymbol{\mu}_t)(1+r_t)}{\partial V_{T-t+1}/\partial w_{t-1}} \tag{36}$$

6.1.4　確実資産

定理1の（23）式を**定理5**の（30）式に代入し，確実資産 m_t を取り出す。

$$m_t^* = \frac{(\partial V_{T-t+1}/\partial r_t)(1+r_t)}{\partial V_{T-t+1}/\partial w_{t-1}} \tag{37}$$

6.2　当期所得 y_t の等式群

6.2.1　消費財ベクトル

定理2の（24）式を**定理3**の（25）式に代入して $\mathbf{c}_t$ を取り出し，消費財ベクトルの等式を導く。

$$\mathbf{c}_t^* = \frac{\partial V_{T-t+1}/\partial \mathbf{p}_t}{(\partial V_{T-t+1}/\partial y_t)(1+r_t)} \tag{38}$$

6.2.2　危険資産混合ベクトル（危険資産価格ベクトル $\mathbf{q}_t$ による）

定理2の（24）式を**定理4a**の（28）式に代入して整理し，危険資産混合ベ

クトルの等式を求める。

$$\mathbf{x}_t^* = \frac{\partial V_{T-t+1}/\partial \mathbf{q}_t}{(\partial V_{T-t+1}/\partial y_t)(1+r_t)} \tag{39}$$

6.2.3　危険資産混合ベクトル（危険資産期待期末価値ベクトル $\boldsymbol{\mu}_t$ による）

定理 2 の（24）式を**定理** 6 の（32–1）式に代入して整理し，危険資産混合ベクトル $\mathbf{x}_t$ の等式を導く。

$$\mathbf{x}_t^* = \frac{\partial V_{T-t+1}/\partial \boldsymbol{\mu}_t}{\partial V_{T-t+1}/\partial y_t} \tag{40}$$

6.2.4　確実資産

定理 2 の（24）式を**定理** 5 の（30）式に代入し，確実資産 m_t の等式を取り出す。

$$m_t^* = \frac{\partial V_{T-t+1}/\partial r_t}{\partial V_{T-t+1}/\partial y_t} \tag{41}$$

7. 補　論

7.1　Roy の等式の一つの検証

上掲の（34），（35），（37）式で，消費財，危険資産混合，および確実資産の拡張 Roy の等式を得た。われわれはここで一つの検証として，これらの拡張等式に価格ベクトルを掛けて足し合わせてみる。つまり，われわれが得た拡張 Roy の等式が前掲の(1)式を成立させるかどうかを確かめる。すると，結果は

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}'_t\mathbf{c}_t + \mathbf{q}'_t\mathbf{x}_t + m_t \\
&= -\mathbf{p}'_t \frac{\partial V_{T-t+1}/\partial \mathbf{p}_t}{\partial V_{T-t+1}/\partial w_{t-1}} \\
&\quad -\mathbf{q}'_t \frac{\partial V_{T-t+1}/\partial \mathbf{q}_t}{\partial V_{T-t+1}/\partial w_{t-1}} \\
&\quad + \frac{(\partial V_{T-t+1}/\partial r_t)(1+r_t)}{\partial V_{T-t+1}/\partial w_{t-1}} \\
&= \Biggl\{ -\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}\right](1+r_t)\,\mathbf{p}'_t\,\mathbf{c}_t^* \\
&\quad -\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\,\mathbf{q}'_t\,\mathbf{x}_t^*\right]
\end{aligned}$$

$$+\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\,m_t^*\right]\Bigg\} \Bigg/ \frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial w_{t-1}}$$

$$=\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\right](\mathbf{p}_t'\mathbf{c}_t+\mathbf{q}_t'\mathbf{x}_t+m_t) \Bigg/ \frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial w_{t-1}}$$

$$=w_{t-1} \tag{42}$$

となって，名目Royの等式群を加え合わせると，元の前期末富 w_{t-1} に等しいことが確かめられる。

7.2　危険資産価格と危険資産期待価値

(28) 式に (32–1) 式を代入する。

$$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \mathbf{q}_t}=-\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-1}(w_t)}{dw_t}(1+r_t)\,\mathbf{x}_t^*\right]$$

$$=-\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial \boldsymbol{\mu}_t}(1+r_t) \tag{43}$$

上式の両端を取ると，危険資産価格の効果は危険資産期待価値の効果に確実資産の累積要因 $(1+r_t)$ を掛けたものに等しいことが判る。すると，上記ベクトルの危険資産 s に対応する要素間の関係は，すべての s に対して

$$1+r_t=-\frac{\partial V_{T-t+1}/\partial q_{st}}{\partial V_{T-t+1}/\partial \mu_{st}}>0 \tag{44}$$

と書くことができる。

7.3　前期末富と当期非資産所得

極大期待効用に及ぼす前期末富 w_{t-1} 変化の効果と今期非資産所得 y_t 変化の効果との関係は，(23) 式に (24) 式を代入することによって得られる。

$$\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial w_{t-1}}=\alpha \mathrm{E}\left[\frac{dV_{T-t}(w_t)}{dw_t}\right](1+r_t)$$

$$=\frac{\partial V_{T-t+1}}{\partial y_t}(1+r_t) \tag{45}$$

すると，確実資産の累積要因 $(1+r_t)$ は

$$1+r_t=\frac{\partial V_{T-t+1}/\partial w_{t-1}}{\partial V_{T-t+1}/\partial y_t} \tag{46}$$

と表すことができる。

[注]

1) 危険資産（risky asset）として，株式（stocks）・債券（bonds）を考える。これらは市場性（marketability）を持ち，資本利得 $\mathbf{g}_t=\mathbf{q}_t^f-\mathbf{q}_t$ を発生する。株式は配当（dividends）$\mathbf{d}_t$ を産み，債券は確定利子率 r_t を生むが，ともに市場性があるので，危険資産としてまとめ，債券の収益も配当に含める。よって，危険資産収益は資本利得と配当の和 $\mathbf{R}_t=\mathbf{g}_t+\mathbf{d}_t$ と定義する。

2) 確実資産（riskless asset）は，市場性がなく，その収益率が確率変数ではない金融資産をいう。確実資産の収益率を確定利子率 r_t とする。

3) 個別投資主体は上場株式や債券のすべてに投資するわけではない。「投資可能」とは投資主体の主観による。

4) 危険資産の物理的単位とは，1 枚の証券・証書類を指す。

5) 多期間の効用関数 $u(\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \cdots,\ \mathbf{c}_t,\ \cdots,\ \mathbf{c}_T)$ を各期について分離表現する形式 $u(\mathbf{c}_1)+\alpha u(\mathbf{c}_2)+\cdots+\alpha^{t-1}u(\mathbf{c}_t)+\cdots+\alpha^{T-1}u(\mathbf{c}_T)$ を分離効用関数という。α は将来に対する一定の割引率である。

6) 連続な確率変数 x の数学的期待値は $\mathrm{E}[x]=\mu$ と表される。期待値は確率分布 f の加重平均を意味する。確率変数 x の確率密度関数 $f(x)$ に対して x の期待値は $\mathrm{E}[x]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx$ と定義される。

7) 制約条件付き極値問題は Lagrange 未定乗数法により解かれる。変数のベクトルを $\mathbf{x}$ として，目的関数 $f(\mathbf{x})$ を陰関数形式の制約条件 $g(\mathbf{x})=0$ の下で極大あるいは極小にする解 $\mathbf{x}^*$ を求める。Lagrange 関数 $\Lambda=f(\mathbf{x})-\lambda g(\mathbf{x})$ を設ける。λ は Lagrange 未定乗数である。極値化の 1 階条件は変数 $\mathbf{x}$ および Lagrange 未定乗数 λ に関する偏導関数がゼロに等しいことである。

$\begin{bmatrix}\partial\Lambda/\partial\mathbf{x}\\ \partial\Lambda/\partial\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial f/\partial\mathbf{x}-\lambda\partial g/\partial\mathbf{x}\\ -g(\mathbf{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 0\end{bmatrix}$。2 階条件は，解の点 $\mathbf{x}^0$ で，$(d\mathbf{x})'(\partial g/\partial\mathbf{x})=0$ を満足する非ゼロのベクトル $d\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ に対して 2 次形式 $(d\mathbf{x})'\left[\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial\mathbf{x}^2}\right](d\mathbf{x})$ が負値定符号ならば極大，正値定符号ならば極小である。本論では制約条件を目的関数に代入するように加工するので，形式上，解法は制約条件なしの極値問題と同じになる。関数 $y=f(\mathbf{x})$ の極値化の 1 階条件は $\partial y/\partial\mathbf{x}=\mathbf{0}$，2 階条件は $d\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ に対して 2 次形式が $(d\mathbf{x})'[\partial^2y/\partial\mathbf{x}^2](d\mathbf{x})<0$ で負値定符号ならば極大，$(d\mathbf{x})'[\partial^2y/\partial\mathbf{x}^2](d\mathbf{x})>0$ で正値定符号ならば極小である。

8) もし $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ に対する 2 次形式の値が負で，$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}<0$ ならば，2 次形式 $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ または行列 $\mathbf{A}$ を負値定符号であるという。もし $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}>0$ ならば，正値定符号であるという。もし行列 $\mathbf{A}$ が負値定符号であるならば，$\mathbf{A}$ の主座小行列式群は符号が交代的である。すなわち，$a_{ii}<0,\ a_{ii}a_{jj}-a_{ij}^2>0,\cdots$ である。

9) 2 パラメーター分布は確率分布の形状を指定するパラメーターが確率変数 x の平

均値と分散だけで指定される分布である。すなわち，$x \in \mathscr{N}(\mu, \sigma)$。

10) 分散共分散行列は確率変数ベクトルの各要素間の分散と共分散から成る正方行列をいう。

11) 極大期待生涯効用関数は消費者理論でいう間接効用関数である。

12) ベクトルが半非正とは，そのベクトルの要素がすべてはゼロにならず部分的に正の要素があるベクトルをいう。

13) 現物投資は自己資金で危険資産に投資する場合を指す。信用買いは，自己の証券または現金を証拠金ないし担保として投資資金を借り入れ，自己資金以上に危険資産に投資する場合を指す。空売りは，証券を借り入れて市場で売却した資金を貸し付けて運用する。いずれも返済は一定期間内に証券取引を決済して行う。

14) 確率変数のベクトル $\mathbf{R}_t$ が属する確率分布の形状を規定するパラメーターを期待値ベクトル $\boldsymbol{\mu}_t$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ に限定することは，要素である個々の確率変数の確率分布がすべて2パラメーター分布であることを仮定する。代表的な2パラメーター分布は正規分布である。危険資産収益率の確率分布が2パラメーター分布であるとする仮定は暫定的な物であって，実際にどのような分布に属すると見なすべきかについて学術的に十分な結論が得られていない。

15) 消費者効用理論で，間接効用関数 $v(\mathbf{p}, y)$ は価格ベクトル $\mathbf{p}$ に関して，非増加的 $\partial v/\partial \mathbf{p} \leqq 0$ であり，所得 y に関して増加的 $\partial v/\partial y > 0$ である。これらを合成すると $\mathbf{c}^* = -(\partial v/\partial \mathbf{p})/(\partial v/\partial y) \geqq 0$ を得る。これをRoyの等式という。本論の(34)式および(38)式がこれに相当する。

[参考文献]

Bellman, Richard [1957]：*Dynamic Programming*, Princeton, Princeton University Press, 1957.

Hakansson, N. H. [1969]： "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk, an Uncertain Lifetime, and Insurance," *International Economic Review*, vol. 10, October, 1969.

Hakansson, N. H. [1970]： "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility functions," *Econometrica*, vol. 38, September, 1970.

Phelps, E. S. [1962]： "The Accumulation of Risky Capital: A Sequential Utility Analysis," *Econometrica*, vol. 30, October, 1962.

Ramsey, F. P. [1928]： "A Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, vol.38, December, 1928.

von Neumann, J. & Oskar Morgenstern [1947]：*Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd ed., Princeton, Princeton University Press, 1947.

Yaari, M. E.[1965]：“Uncertain Lifetime, Life Insurance and the Theory of the Consumer,” *Review of Economic Studies*, vol. 32, April, 1965.

桐谷　維［1979］「生涯消費・資産選択のダイナミック・プログラミング・モデル」『経済と経済学』第 43 号，東京都立大学経済学会，1979 年。

桐谷　維［1986］『資産選択の現代理論』東洋経済新報社，1986 年。

桐谷　維［1997］「資産選択における E-V 接近と平均効用保存的拡散」神奈川大学大学院経済学研究科創立 30 周年記念論文集『現代経済の諸問題』，1997 年。

桐谷　維［2000］「生涯消費・資産選択の動学的多期間モデル」『商経論叢』第 36 巻，第 2 号，神奈川大学経済学会，2000 年。

桐谷　維［2001］「生涯消費財と危険資産混合の動学分析」『商経論叢』第 37 巻，第 1 号，神奈川大学経済学会，2001 年。